

Malliavin 解析による確率微分方程式の解の密度関数の存在

慶應義塾大学大学院 理工学研究科

博士 1 年 楠岡誠一郎

確率微分方程式の解の密度関数の存在性については、N. Bouleau と F. Hirsch の結果がある。それは、係数がリプシッツ連続で楕円性に関する条件をあたえた場合に確率微分方程式の解の時刻ごとの分布が密度関数を持つというものである。しかし、係数が楕円性に関する条件を満たしている場合は係数が Lipschitz 連続でなくても、直感的に解は密度関数を持つように感じられる。そこで、係数が Lipschitz 連続よりも弱い連続性しか持たないときに確率微分方程式の解が密度関数を持つかどうかについて考察した。

一般に、確率微分方程式の係数がリプシッツ連続よりも弱い連続性しか持たないとき、解が Sobolev 空間に属するかどうか分からないため、Sobolev 空間より広い関数のクラスを考える。

(B, H, μ) を抽象 Wiener 空間とする。

定義 1 確率変数のクラス $V_h(B)$ を、 $(B, \mathcal{B}(B), \mu)$ 上の確率変数 F で、ある修正 $\hat{F}$ が存在して、任意の x に対し $\hat{F}(x + th)$ が t に関して有界区間で有界変動であるもの全体からなるクラスとする。

D_h を h 方向への方向微分とする。このとき、クラス $V_h(B)$ に属する確率変数に対して、次のような N. Bouleau と F. Hirsch の結果に対応した結果が得られる。

定理 2 F をクラス $V_h(B)$ に属する確率変数とする。 $\hat{F}$ を $V_h(B)$ の定義で現れる修正とすると、 $\mathbf{R}$ 上の測度

$$(|D_h \hat{F}|P) \circ \hat{F}^{-1}$$

は 1 次元 Lebesgue 測度に対して絶対連続である。

この V_h を用いて、係数が必ずしも Lipschitz 連続でない確率微分方程式の解が密度関数を持つかどうかについて考える。

定理 3 d, r を正の整数とし、 $(B(t))$ を r 次元 Brown 運動とする。

$$\begin{aligned}\sigma &= (\sigma_j^i)_{i=1, \dots, d, j=1, \dots, r} \in C_b([0, T] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^r), \\ b &= (b^i)_{i=1, \dots, d} \in C_b([0, T] \times C([0, T] \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^d),\end{aligned}$$

次の d 次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX^i(t) = \sum_{j=1}^r \sigma_j^i(t, X^i(t)) dB^j(t) + b^i(t, X) dt & i = 1, 2, \dots, d, \\ X(0) = x_0 \in \mathbf{R}^d. \end{cases}$$

ある定数 M, K と、ある $[0, T]$ 上の Radon 測度 η が存在して、

$$\begin{aligned} \max_{i,j} |\sigma_j^i(t, x)| &\leq M, \quad \text{for all } (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}, \\ \max_i |b^i(t, w) - b^i(t, w')| &\leq K \left(\int_0^t |w(s) - w'(s)| d\eta(s) + |w(t) - w'(t)| \right), \\ &\text{for all } t \in [0, T], w, w' \in C([0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d), \end{aligned}$$

を満たし、確率微分方程式には pathwise uniqueness があるとする。

このとき、解 $(X(t))$ は Wiener 空間 (W, H, μ) 上で定義することができ、任意の $t, i = 1, 2, \dots, d, h \in H$ に対して $X^i(t)$ は $V_h(W)$ に属する。さらに、定義 1 で現れる $X^i(t)$ の修正を $\widehat{X^i(t)}$ と書くと、 $\mathbf{R}$ 上の測度

$$\left(\left| D_h \widehat{X^i(t)} \right| \mu \right) \circ X^i(t)^{-1}$$

は 1 次元 Lebesgue 測度に対して絶対連続である。

係数が Lipschitz 連続のときは、N. Bouleau と F. Hirsch の結果により、楕円性に関する条件から $|DX(t)|_H$ の正値性が導かれる。しかし、係数が Lipschitz 連続でないときには同じ方法が使えず、一般には $D_h X(t)$ の情報を得るのは困難である。しかし、特別な場合に関しては $D_h X(t)$ の正値性を得ることができた。それが次の定理である。

定理 4 r を正の整数とし、 $(B(t))$ を r 次元 Brown 運動とする。次の 1 次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \sum_{j=1}^r \sigma_j(t, X(t)) dB^j(t) + b(t, X(t)) dt \\ X(0) = x_0 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

この確率微分方程式が pathwise uniqueness を持つと仮定する。係数には次を仮定する。

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_j)_{j=1, \dots, r} \in C_b([0, T] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^r), \\ b &\in C_b([0, T] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}), \end{aligned}$$

ある定数 M と K が存在して

$$\begin{aligned} \max_j |\sigma_j(t, x)| &\leq M, \quad \text{for all } (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}, \\ |b(t, x) - b(t, y)| &\leq K|x - y| \quad \text{for all } x, y \in \mathbf{R} \text{ and } t \in [0, T], \end{aligned}$$

を満たすとし、 $\mathbf{R}$ の閉部分集合 S が存在し、任意の $j = 1, 2, \dots, r$ に対し $\mathbf{R} \setminus S$ 上で σ_j は 2 階微分可能で微分が連続であり、 $\mathbf{R} \setminus S$ 上で $\sum_{j=1}^r \sigma_j$ は正であるとする。

このとき、任意の t に対し、 $\mathbf{R} \setminus S$ 上の測度

$$\mu \circ X(t)^{-1} \big|_{\mathbf{R} \setminus S}$$

は $\mathbf{R} \setminus S$ 上に制限した 1 次元 Lebesgue 測度に対して絶対連続である。