

あるクラスの測度値マルコフ過程の漸近挙動について

埼玉大学 道工 勇

D を R^d のある領域とし, $\mathcal{B}(D)$ で D 上のボレル σ -集合族を表す. $\mathcal{B}(D)$ 上の有限測度の全体およびコンパクトな台をもつ有限測度の全体をそれぞれ $M_F(D)$ および $M_c(D)$ と記す. 記号 $\|\mu\|$ は $M_F(D)$ の要素 μ の全測度 $\mu(D)$ を意味する. また $C_b^+(D)$ および $C_c^+(D)$ でそれぞれ D 上で定義された非負有界連続関数およびコンパクト台をもつ非負連続関数の全体を表すものとする. D 上で定義された k 回微分可能な指数 η のヘルダー空間を $C^{k,\eta}(D)$ で表す. ただし, $0 < \eta \leq 1$ である. 特に $C^\eta(D) = C^{0,\eta}(D)$ とする. 次に領域 D 上の楕円型微分作用素 L を

$$(0.1) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

で定める. ここで, $a(x) = (a_{ij}(x))$ は $x \in D$ に対して正定値対称行列であり, L の係数に対して, $a_{ij}(x) \in C^{1,\eta}(D)$ かつ $b_i(x) \in C^{1,\eta}(D)$ ($i, j = 1, \dots, d$) を仮定する. また可測関数 f の D 上の測度 ν に関する積分を

$$(0.2) \quad \langle \nu, f \rangle = \int_D f(x) \nu(dx)$$

と表す.

$X = \{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_\mu, \mu \in M_F(D)\}$ をパラメータ (L, β, α, D) を伴う超拡散過程 (superdiffusion) とする. すなわち, $X = \{X_t\}$ は時間に関して一様な $M_F(D)$ 値連続マルコフ過程であって, $C_b^+(D)$ の任意の要素 g に対して

$$(0.3) \quad \mathbb{E}_\mu \exp \left\{ - \int_D g(x) X_t(dx) \right\} = e^{-\langle \mu, u(\cdot, t) \rangle}$$

をみたす. ただし, $u \equiv u(x, t)$ は次のコーシー問題の非負最小解である:

$$(0.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= Lu(x, t) + \beta(x)u(x, t) - \alpha(x)u^2(x, t) \quad \text{on } D \times (0, \infty) \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) &= g(x) \in C_b^+(D). \end{aligned}$$

ただし, $\alpha, \beta \in C^\eta(D)$, $\eta \in (0, 1]$ であって, α は $\forall x \in D$ に対し正値で β は上に有界とする. 次に領域 D 上の作用素を $\mathcal{L}_0 = L + \beta$ とおく. $\mathcal{L}_0$ に関する主固有値を

$\lambda_c = \lambda_c(\mathcal{L}_0)$ とおく. $\xi^L = \{\xi_t^L; t \geq 0\}$ を D 上の L -拡散とし, 集合 A に対する停止時刻 $\tau(A)$ を

$$(0.5) \quad \tau(A) = \inf\{t \geq 0; \xi_t^L \in A^c\}$$

とする. また $A \subset\subset D$ であって, その境界 ∂A が $C^{2,\eta}$ クラスである部分集合のクラスを $B_{2,\eta}$ とする. このとき, $\forall x \in D$ に対して主固有値 λ_c は次の表現をもつ. すなわち, 領域 D の任意の元 x に対して,

$$(0.6) \quad \lambda_c = \sup_{A \in B_{2,\eta}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left\{ \exp \left(\int_0^t \beta(\xi_s^L) ds \right); \tau(A) > t \right\}.$$

ここで, $\mathbb{P}_x$ が $x \in D$ から出発する L -拡散 ξ^L の分布で, $\mathbb{P}_x(\xi_0^L = x) = 1$ をみたす確率測度のとき, $\mathbb{E}_x$ は $\mathbb{P}_x$ による期待値を表す.

Pinsky (1996) は $\lambda_c \leq 0$ のとき, 超拡散 $X = \{X_t; t \geq 0\}$ が局所消滅的であることを示した. したがって我々は $\lambda_c > 0$ のときの挙動に興味がある. ここでの目的は Engländer-Winter (2006) により示唆された超拡散 $X = \{X_t\}$ の長時間挙動について考察を加え, 検証を与えることにある. すなわち, 次の命題を明確に証明することである.

命題 0.1. $\lambda_c > 0$ とする. 作用素 $\mathcal{L} = L + \beta - \lambda_c$ は劣臨海的であると仮定する. このとき, $C_c^+(D)$ の任意の元 g に対して

$$(0.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_c t} \mathbb{E}_\mu \langle X_t, g \rangle = 0$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] I. DÔKU: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (2003), 1–80.
- [2] I. DÔKU: A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6** (2006), 145–205.
- [3] I. DÔKU: Alimit theorem of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Jpn.* **53** (2006), 577–593.
- [4] I. DÔKU: Limit theorems for rescaled immigration superprocesses. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B6** (2008), 56–69.
- [5] I. DÔKU: Comportements de la borne supérieure sur l'espérance au poids des super-processus avec immigration. *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **57** (2008), 211–223.
- [6] I. DÔKU: Comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus. *Preprint*, (2008), 1–10.
- [7] J. ENGLANDER and A. WINTER: Law of large numbers for a class of superdiffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **42** (2006), 171–185.
- [8] R.G. PINSKY: Transience, recurrence and local extinction properties of the support for supercritical finite measure-valued diffusions. *Ann. Probab.* **24** (1996), 237–267.