研究集会「確率解析とその周辺」

2008 年 11 月 20 日 (木) 13:30 ～ 11 月 21 日 (金) 15:40
名古屋大学ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー, ベンチャーホール

予稿集

研究集会「確率解析とその周辺」のお知らせ

平成 20 年度科学研究費補助金基盤研究 (A)「確率解析の理論と応用」(研究代表者：松本裕行), 平成 20 年度科学研究費補助金基盤研究 (B)「無限次元空間における確率解析」(研究代表者：重川一郎) の援助を受けて, 標記の研究集会を以下の要領で開催致しますのでご案内申し上げます.

日時: 2008 年 11 月 20 日 (木) 13:30 ∼ 11 月 21 日 (金) 15:40
場所: 名古屋大学ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー, ベンチャーホール

プ ロ グ ラ ム

11 月 20 日 (木)

13:30∼14:30 重川 一郎 (京都大)
Non-symmetric diffusions on Riemannian manifolds and the ultracontractivity

14:40∼15:40 楠岡 誠一郎 (慶應大)
Malliavin 解析による確率微分方程式の解の密度関数の存在

16:00∼17:00 Antoine Lejay(INRIA, France)
On rough differential equations

11 月 21 日 (金)

10:00∼11:00 道工 勇 (埼玉大)
あるクラスの測度値マルコフ過程の漸近挙動について

11:10∼12:10 梶野 直孝 (京都大)
Weyl type spectral asymptotics for Laplacians on Sierpinski carpets

— 昼 休 み —

13:30∼14:30 矢野 孝次 (神戸大)
対称安定過程に対する Feynman-Kac killing の処罰問題

14:40∼15:40 会田 茂樹 (大阪大)
Semiclassical limit of the lowest eigenvalue of $P(\phi)_2$ Hamiltonian on finite volume

世話人: 重川 一郎 (京大理), 松本 裕行 (名大情報), 会田 茂樹 (阪大基礎工).

Non-symmetric diffusions on Riemannian manifolds
and the ultracontractivity*

Ichiro Shigekawa† (Kyoto University)

1 Non-symmetric diffusions on Riemannian manifolds

Let (M, g) be a complete Riemannian manifold. We deonte the Riemannian volume by $m = \mathrm{vol}$. We consider a diffusion generated by

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\triangle + b. \tag{1}$$

Here $\triangle$ is the Laplace-Beltrami operator and b is a vector field on M. We regard it as an operator in $L^2(m)$. The dual operator is

$$\mathfrak{A}^* = \frac{1}{2}\triangle - b - \operatorname{div} b.$$

Associated symmetric bilinear form $\tilde{\mathscr{E}}$ is

$$\tilde{\mathscr{E}}(u, v) = \frac{1}{2}\int_M (\nabla u, \nabla v)\, dm + \frac{1}{2}\int_M uv \operatorname{div} b\, dm.$$

We take a point $o \in M$ and define $\rho(x) = d(o, x)$ where d is the Riemannian distance. We assume the following conditions:

(A.1) $\operatorname{div} b \geq 0$.

(A.2) There exists a non-increasing function $\kappa\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ with $\int_0^\infty \kappa(x)\, dx = \infty$ so that $|\nabla_b \rho| \leq \frac{1}{\kappa(\rho)}$.

Theorem 1. *Under the conditions (A.1), (A.2), the closure of* $(\mathfrak{A}, C_0^\infty(M))$ *generates a* C_0 *semigroup in* $L^2(m)$ *and the semigroup is Markovian.*

The same is true for $(\mathfrak{A}^*, C_0^\infty(M))$.

We denote the associated semigroups by $\{T_t\}$ and $\{T_t^*\}$.

Theorem 2. *Assume (A.1), (A.2) and that there exists a constant* c_2 *so that for all* $f \in \mathrm{Dom}(\tilde{\mathscr{E}}) \cap L^1(m)$

$$\|f\|_2^{2+4/\mu} \leq c_2\, \tilde{\mathscr{E}}(f, f)\, \|f\|_1^{4/\mu}.$$

Then, there exists a constant c_1 *so that for all* $f \in L^1$

$$\|T_t f\|_\infty \leq c_1 t^{-\mu/2} \|f\|_1, \quad \forall t > 0. \tag{2}$$

*November 19-21, 2008, "Stochastic Analysis and Related Topics" in Nagoya University
†E-mail: `ichiro@math.kyoto-u.ac.jp` URL: `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/`

Remark 1. Under the condition (A.2), we have

$$\frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2\, dm \le \tilde{\mathscr{E}}(u,u).$$

If the Brownian motion satisfies (2), then the diffusion satisfies (2).

2 Non-symmetric diffusions on compact Riemannian manifolds

If M is compact, then there exists an invariant probability measure. We denote it by ν. We now change the reference measure to ν. The operator $\mathfrak{A}$ of the form (1) can be written as

$$\mathfrak{A}f = -\frac{1}{2}\nabla_\nu^*\nabla f + (\tilde{b}, \nabla f)$$

where $\tilde{b}$ is a vector field with $\operatorname{div}_\nu \tilde{b} = 0$. Here ∇_ν^* is the dual operator of ∇ with respect to ν. div_ν is defined similarly.

The generator of the dual semigroup is

$$\mathfrak{A}_\nu^* g = -\frac{1}{2}\nabla_\nu^*\nabla g - (\omega_{\tilde{b}}, \nabla g).$$

Further the associated symmetric Dirichlet form is given by

$$\tilde{\mathscr{E}}(f,g) = \frac{1}{2}\int_M (\nabla f, \nabla g) d\nu.$$

By Using these, we have

Theorem 3. *The semigroup $\{T_t\}$ generated by $\mathfrak{A}$ has a density $p(t,x,y)$ with respect to ν and there exists a constant C so that*

$$\sup_{x,y} |p(t,x,y) - 1| \le Ce^{-\lambda t}, \quad \forall t \ge 1.$$

Here λ is the spectral gap of $\tilde{\mathscr{E}}$.

Malliavin 解析による確率微分方程式の解の密度関数の存在

慶應義塾大学大学院　理工学研究科
博士１年　楠岡誠一郎

確率微分方程式の解の密度関数の存在性については、N. Bouleau と F. Hirsch の結果がある。それは、係数がリプシッツ連続で楕円性に関する条件をあたえた場合に確率微分方程式の解の時刻ごとの分布が密度関数を持つというものである。しかし、係数が楕円性に関する条件を満たしている場合は係数が Lipschitz 連続でなくても、直感的に解は密度関数を持つように感じられる。そこで、係数が Lipschitz 連続よりも弱い連続性しか持たないときに確率微分方程式の解が密度関数を持つかどうかについて考察した。

一般に、確率微分方程式の係数がリプシッツ連続よりも弱い連続性しか持たないとき、解が Sobolev 空間に属するかどうかがわからないため、Sobolev 空間より広い関数のクラスを考える。

(B, H, μ) を抽象 Wiener 空間とする。

定義 1 確率変数のクラス $V_h(B)$ を、$(B, \mathscr{B}(B), \mu)$ 上の確率変数 F で、ある修正 $\widehat{F}$ が存在して、任意の x に対し $\widehat{F}(x+th)$ が t に関して有界区間で有界変動であるもの全体からなるクラスとする。

D_h を h 方向への方向微分とする。このとき、クラス $V_h(B)$ に属する確率変数に対して、次のような N. Bouleau と F. Hirsch の結果に対応した結果が得られる。

定理 2 F をクラス $V_h(B)$ に属する確率変数とする。$\widehat{F}$ を $V_h(B)$ の定義で現れる修正とすると、$\mathbf{R}$ 上の測度

$$(|D_h\widehat{F}|P)\circ\widehat{F}^{-1}$$

は１次元 Lebesgue 測度に対して絶対連続である。

この V_h を用いて、係数が必ずしも Lipschitz 連続でない確率微分方程式の解が密度関数を持つかどうかについて考える。

定理 3 d, r を正の整数とし、$(B(t))$ を r 次元 Brown 運動とする。

$$\sigma = (\sigma^i_j)_{i=1,\dots d, j=1,\dots r} \in C_b([0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^r),$$
$$b = (b^i)_{i=1,\dots d} \in C_b([0,T]\times C([0,T]\to\mathbf{R})\to\mathbf{R}^d),$$

次の d 次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX^i(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\sigma^i_j(t, X^i(t))dB^j(t) + b^i(t, X)dt \quad i = 1, 2, \dots d, \\ X(0) = x_0 \in \mathbf{R}^d. \end{cases}$$

ある定数 M, K と、ある $[0,T]$ 上の Radon 測度 η が存在して、

$$\max_{i,j} |\sigma^i_j(t,x)| \le M, \quad \text{for all} \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R},$$
$$\max_i |b^i(t,w) - b^i(t,w')| \le K \left(\int_0^t |w(s) - w'(s)| d\eta(s) + |w(t) - w'(t)| \right),$$
$$\text{for all} \quad t \in [0,T],\ w, w' \in C([0,T] \to \mathbf{R}^d),$$

を満たし、確率微分方程式には pathwise uniqueness があるとする。

このとき、解 $(X(t))$ は Wiener 空間 (W, H, μ) 上で定義することができ、任意の t、$i = 1, 2, \cdots, d$、$h \in H$ に対して $X^i(t)$ は $V_h(W)$ に属する。さらに、定義 1 で現れる $X^i(t)$ の修正を $\widehat{X^i(t)}$ と書くと、$\mathbf{R}$ 上の測度

$$\left(\left| D_h \widehat{X^i(t)} \right| \mu \right) \circ X^i(t)^{-1}$$

は 1 次元 Lebesgue 測度に対して絶対連続である。

係数が Lipschitz 連続のときは、N. Bouleau と F. Hirsch の結果により、楕円性に関する条件から $|DX(t)|_H$ の正値性が導かれる。しかし、係数が Lipschitz 連続でないときには同じ方法が使えず、一般には $D_h X(t)$ の情報を得るのは困難である。しかし、特別な場合に関しては $D_h X(t)$ の正値性を得ることができた。それが次の定理である。

定理 4 r を正の整数とし、$(B(t))$ を r 次元 Brown 運動とする。次の 1 次元確率微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^r \sigma_j(t, X(t)) dB^j(t) + b(t, X(t)) dt \\ X(0) = x_0 \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

この確率微分方程式が pathwise uniqueness を持つと仮定する。係数には次を仮定する。

$$\sigma = (\sigma_j)_{j=1,\dots r} \in C_b([0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^r),$$
$$b \in C_b([0,T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}),$$

ある定数 M と K が存在して

$$\max_j |\sigma_j(t,x)| \le M, \quad \text{for all} \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R},$$
$$|b(t,x) - b(t,y)| \le K|x - y| \quad \text{for all} \quad x, y \in \mathbf{R} \text{ and } t \in [0,T],$$

を満たすとし、$\mathbf{R}$ の閉部分集合 S が存在し、任意の $j = 1, 2, \cdots, r$ に対し $\mathbf{R} \setminus S$ 上で σ_j は 2 階微分可能で微分が連続であり、$\mathbf{R} \setminus S$ 上で $\sum_{j=1}^r \sigma_j$ は正であるとする。

このとき、任意の t に対し、$\mathbf{R} \setminus S$ 上の測度

$$\mu \circ X(t)^{-1} \big|_{\mathbf{R} \setminus S}$$

は $\mathbf{R} \setminus S$ 上に制限した 1 次元 Lebesgue 測度に対して絶対連続である。

On rough differential equations

Antoine Lejay
INRIA, Nancy, France

A rough differential equation (RDE) is the solution of a controlled differential equation in the sense of “rough paths”, which means that the control is an iregular path. This theory was developped in to deal with irregular paths such as Brownian path, ... and allows one to give a pathwise notion of solution of Stochastic Differential Equation (the main point of this theory initiated by T. Lyons is to extend the paths as paths with values in a non-commutative tensor Lie group). During this talk, after some considerations on rough differential equations, we will show how to drop the hypothesis of boundedness of the vector fields which are integrated so that vector fields with linear growth may be considered.

研究集会「確率解析とその周辺」・平成 20 年 11 月 19 日（水）〜21 日（金）
名古屋大学ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー

あるクラスの測度値マルコフ過程の漸近挙動について

埼玉大学　　道工　勇

D を R^d のある領域とし, $\mathcal{B}(D)$ で D 上のボレル σ-集合族を表す. $\mathcal{B}(D)$ 上の有限測度の全体およびコンパクトな台をもつ有限測度の全体をそれぞれ $M_F(D)$ および $M_c(D)$ と記す. 記号 $\|\mu\|$ は $M_F(D)$ の要素 μ の全測度 $\mu(D)$ を意味する. また $C_b^+(D)$ および $C_c^+(D)$ でそれぞれ D 上で定義された非負有界連続関数およびコンパクト台をもつ非負連続関数の全体を表すものとする. D 上で定義された k 回微分可能な指数 η のヘルダー空間を $C^{k,\eta}(D)$ で表す. ただし, $0 < \eta \leqslant 1$ である. 特に $C^\eta(D) = C^{0,\eta}(D)$ とする. 次に領域 D 上の楕円型微分作用素 L を

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{0.1}$$

で定める. ここで, $a(x) = (a_{ij}(x))$ は $x \in D$ に対して正定値対称行列であり, L の係数に対して, $a_{ij}(x) \in C^{1,\eta}(D)$ かつ $b_i(x) \in C^{1,\eta}(D)$ $(i.j = 1,\ldots,d)$ を仮定する. また可測関数 f の D 上の測度 ν に関する積分を

$$\langle \nu, f\rangle = \int_D f(x)\nu(dx) \tag{0.2}$$

と表す.

$X = \{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_\mu, \mu \in M_F(D)\}$ をパラメータ (L,β,α,D) を伴う超拡散過程 (superdiffusion) とする. すなわち, $X = \{X_t\}$ は時間に関して一様な $M_F(D)$ 値連続マルコフ過程であって, $C_b^+(D)$ の任意の要素 g に対して

$$\mathbb{E}_\mu \exp\left\{-\int_D g(x)X_t(dx)\right\} = e^{-\langle \mu, u(\cdot,t)\rangle} \tag{0.3}$$

をみたす. ただし, $u \equiv u(x,t)$ は次のコーシー問題の非負最小解である:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu(x,t) + \beta(x)u(x,t) - \alpha(x)u^2(x,t) \quad \text{on} \quad D\times(0,\infty) \\ &\lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = g(x) \in C_b^+(D). \end{aligned} \tag{0.4}$$

ただし, $\alpha, \beta \in C^\eta(D)$, $\eta \in (0,1]$ であって, α は $\forall x \in D$ に対し正値で β は上に有界とする. 次に領域 D 上の作用素を $\mathcal{L}_0 = L + \beta$ とおく. $\mathcal{L}_0$ に関する主固有値を

$\lambda_c = \lambda_c(\mathcal{L}_0)$ とおく. $\xi^L = \{\xi^L_t; t \geq 0\}$ を D 上の L-拡散とし, 集合 A に対する停止時刻 $\tau(A)$ を

$$\tau(A) = \inf\{t \geq 0;\ \xi^L_t \in A^c\} \tag{0.5}$$

とする. また $A \subset\subset D$ であって, その境界 ∂A が $C^{2,\eta}$ クラスである部分集合のクラスを $B_{2,\eta}$ とする. このとき, $\forall x \in D$ に対して主固有値 λ_c は次の表現をもつ. すなわち, 領域 D の任意の元 x に対して,

$$\lambda_c = \sup_{A \in B_{2,\eta}} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{E}_x \left\{ \exp\left(\int_0^t \beta(\xi^L_s) ds \right);\ \tau(A) > t \right\}. \tag{0.6}$$

ここで, $\mathbb{P}_x$ が $x \in D$ から出発する L-拡散 ξ^L の分布で, $\mathbb{P}_x(\xi^L_0 = x) = 1$ をみたす確率測度のとき, $\mathbb{E}_x$ は $\mathbb{P}_x$ による期待値を表す.

Pinsky (1996) は $\lambda_c \leqslant 0$ のとき, 超拡散 $X = \{X_t; t \geq 0\}$ が局所消滅的であることを示した. したがって我々は $\lambda_c > 0$ のときの挙動に興味がある. ここでの目的は Englander-Winter (2006) により示唆された超拡散 $X = \{X_t\}$ の長時間挙動について考察を加え, 検証を与えることにある. すなわち, 次の命題を明確に証明することである.

命題 0.1. $\lambda_c > 0$ とする. 作用素 $\mathcal{L} = L + \beta - \lambda_c$ は劣臨海的であると仮定する. このとき, $C^+_c(D)$ の任意の元 g に対して

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\lambda_c t} \mathbb{E}_\mu \langle X_t, g \rangle = 0 \tag{0.7}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] I. Dôku: Weighted additive functionals and a class of measure-valued Markov processes with singular branching rate. *Far East J. Theo. Stat.* **9** (2003), 1–80.

[2] I. Dôku: A certain class of immigration superprocesses and its limit theorem. *Adv. Appl. Stat.* **6** (2006), 145–205.

[3] I. Dôku: Alimit theorm of superprocesses with non-vanishing deterministic immigration. *Sci. Math. Jpn.* **53** (2006), 577–593.

[4] I. Dôku: Limit theorems for rescaled immigration superprocesses. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B6** (2008), 56–69.

[5] I. Dôku: Comportements de la borne supérieure sur l'espérance au poids des super-processus avec immigaration. *J. Saitama Univ. Fac. Educ.* **57** (2008), 211–223.

[6] I. Dôku: Comportement limite sur l'espérance au poids des super-processus. *Preprint*, (2008), 1–10.

[7] J. Englander and A. Winter: Law of large numbers for a class of superdiffusions. *Ann. Inst. H. Poincar; Probab. Stat.* **42** (2006), 171–185.

[8] R.G. Pinsky: Transience, recurrence and local extinction properties of the support for supercritical finite measure-valued diffusions. *Ann. Probab.* **24** (1996), 237–267.

Weyl type spectral asymptotics for Laplacians on Sierpinski carpets

梶野直孝　（京都大）

Let $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ be the eigenvalues of the Laplacian associated with the Brownian motion on a generalized (i.e. possibly higher dimensional) Sierpinski carpet, and let $Z(t) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$, $t > 0$. B. M. Hambly has shown that there exists a strictly positive periodic continuous function G_0 such that $Z(t) - t^{-d_f/d_w} G(\log t^{-1}) = o(t^{-d_f/d_w})$ as $t \downarrow 0$, where d_f (resp. d_w) is the Hausdorff dimension (resp. walk dimension) of the carpet.

In this talk I will present the following two results closely related to Hambly's result above:
(1) $Z(t) - t^{-d_f/d_w} G(\log t^{-1})$ in the above formula also admits a similar asymptotic behavior.
(2) Even if we consider a time change (with respect to a self-similar measure) of the original Brownian motion on the carpet, the associated partition function admits a similar asymptotic behavior as long as the corresponding heat kernel is subject to the Sub-Gaussian upper bound.

対称安定過程に対する Feynman-Kac killing の処罰問題

神戸大理　矢野 孝次*

Roynette–Vallois–Yor (cf. [2]) はブラウン運動に様々な重みを与えて正規化したものの長時間極限定理を処罰問題と呼んだ．Najnudel–Roynette–Yor ([1]) は，重み過程のいくつかのクラスについて個別に得られた処罰問題が，ある universal な σ-有限測度によって統一的に理解されることを示した．

本講演では，Feynman-Kac killing の場合に的を絞り，ブラウン運動に対する処罰問題の対称安定過程への一般化を [4] に沿って述べる．この研究は Marc Yor 氏 (Paris VI) および矢野裕子氏 (京大数理研) との共同研究である．また，その証明の中で重要な役割を果たす，対称安定過程の調和変換のフェラー性 ([3]) についても触れたい．

処罰問題 (penalisation problems) とは次のような問題を指す．$(X_t, \mathcal{F}_t, P_x)$ を一次元 α-安定過程の canonical representation とする．指数 α は $1 < \alpha \le 2$ を満たすと仮定する．このとき原点は正則かつ再帰的となり，局所時間 $L(t,x)$ が対応する．$\mathbb{R}$ 上の非負測度 $V(\mathrm{d}x)$ に対し，重み過程 $(\mathcal{E}_t^V)$ を

$$\mathcal{E}_t^V = \exp - \int L(t,x)V(\mathrm{d}x) \tag{1}$$

で定義する．処罰問題とは，重み過程 $(\mathcal{E}_t^V)$ に関して正規化された測度の長時間極限

$$\frac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{P_x[\mathcal{E}_t^V]} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{d}P_x^V \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s) \tag{2}$$

を調べることである．ここで，収束の意味は，

$$\frac{P_x[F_s \mathcal{E}_t^V]}{P_x[\mathcal{E}_t^V]} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_x^V[F_s] \qquad \text{for any } F_s\text{: bdd } \mathcal{F}_s\text{-m'ble} \tag{3}$$

が成り立つことを言う．

Najnudel–Roynette–Yor ([1]) にならい，σ-有限測度 $\mathscr{P}$ を

$$\mathscr{P} = (\text{const.}) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/\alpha}} Q^{(u)} \bullet P_0^h \tag{4}$$

で定義する．ここで，$Q^{(u)}$ は 0 から 0 への長さ u のピン止め過程であり，P_0^h は調和変換，すなわち周遊測度 $\boldsymbol{n}$ と調和関数 $|\cdot|^{\alpha-1}$ を用いて次のように定義される $\mathcal{F}_\infty$ 上の確率測度である:

$$\mathrm{d}P_0^h|_{\mathcal{F}_t} = (\text{const.})|X_t|^{\alpha-1}\mathrm{d}\boldsymbol{n}|_{\mathcal{F}_t}. \tag{5}$$

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathscr{P}$ の下での $(x + X_t : t \ge 0)$ の分布を $\mathscr{P}_x$ と書く．

*E-mail: `kyano@math.kobe-u.ac.jp`　URL: `http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/`

定理 1. $0 < \displaystyle\int (1+|x|^{\alpha-1})V(\mathrm{d}x) < \infty$ を仮定する．このとき次が成り立つ:

(i) $\dfrac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{\boldsymbol{n}(R>t)} \xrightarrow{t\to\infty} \mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x \quad \text{along } (\mathcal{F}_s)$;

(ii) $\dfrac{P_x[\mathcal{E}_t^V]}{\boldsymbol{n}(R>t)} \xrightarrow{t\to\infty} \mathscr{P}_x[\mathcal{E}_\infty^V] =: \varphi_V(x)$;

(iii) $(\mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x)|_{\mathcal{F}_t} = \varphi_V(X_t)\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x|_{\mathcal{F}_t}$.

定理 1 によって，処罰問題の答えは次のように与えられる:

$$\frac{\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x}{P_x[\mathcal{E}_t^V]} \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\mathcal{E}_\infty^V \mathrm{d}\mathscr{P}_x}{\varphi_V(x)} =: \mathrm{d}P_x^V \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{6}$$

また，極限測度 P_x^V は次で特徴づけられる:

$$\mathrm{d}P_x^V|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\varphi_V(X_t)}{\varphi_V(x)}\mathcal{E}_t^V \mathrm{d}P_x|_{\mathcal{F}_t}. \tag{7}$$

定理 1 の証明においては，meander の収束が重要な役割を果たす．ここで meander とは，

$$\mathrm{d}M^{(t)} = \frac{1_{\{R>t\}}}{\boldsymbol{n}(R>t)}\mathrm{d}\boldsymbol{n}|_{\mathcal{F}_t} \tag{8}$$

で定義される $\mathcal{F}_t$ 上の確率測度を指す．

定理 2. $(\mathcal{E}_t : t \geq 0)$ は $0 \leq \mathcal{E}_t \leq 1$ なる乗法的汎関数とするとき，

$$\mathcal{E}_t \mathrm{d}M^{(t)} \xrightarrow{t\to\infty} \mathcal{E}_\infty \mathrm{d}P_0^h \qquad \text{along } (\mathcal{F}_s). \tag{9}$$

定理 2 の証明のために，調和変換過程に対するスケール極限の漸近独立性が必要となるが，それは次の定理によって示される．

定理 3. 確率過程 $(|X_t|, P_x^h)$ はフェラー性を持つ．

参考文献

[1] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. A global view of Brownian penalisations. *Monograph, submitted*, 2008.

[2] B. Roynette and M. Yor. Penalising brownian paths: Rigorous results and meta-theorems. *Monograph, to appear in Lecture Notes in Math.*, 2008.

[3] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *submitted*, arXiv:0805.3881, 2008.

[4] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *submitted*, 2008.

Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of $P(\phi)_2$ Hamiltonian on finite volume

Shigeki Aida
Osaka University

In this talk, we discuss the semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a $P(\phi)_2$-Hamiltonian on a finite volume interval. Let $I = [-l/2, l/2]$ $(l > 0)$ and $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ be the Laplace operator with periodic boundary condition on $L^2(I, dx)$. Let $\tilde{A} = (m^2 - \Delta)^{1/4}$ and define

$$H^s(I, dx) = \left\{ h \in \mathrm{D}(\tilde{A}^{2s}) \mid \|h\|_{H^s} := \|\tilde{A}^{2s} h\|_{L^2(I,dx)} \right\}.$$

In particular set $H = H^{1/2}(I, dx)$. Let (W, H, μ) be the associated abstract Wiener space. For example, $W = H^{-s_0}(I, dx)$ for any positive s_0. Note that W is the space of Schwartz distributions. Let $A = \Phi \circ \tilde{A} \circ \Phi^{-1}$, where $\Phi : L^2(I, dx) \to H$ is the natural unitary transformation. A is a self-adjoint operator on H. Let $-L_A$ be the generator of the following Dirichlet form:

$$\mathcal{E}_A(f, f) = \int_W \|ADf(w)\|_H^2 d\mu.$$

Let $P(u) = \sum_{k=0}^{2N} a_k u^k$ be a polynomial function with $a_{2N} > 0$ and $N \geq 2$. Let g be a periodic positive smooth function on $\mathbb{R}$ such that $g(x + l) = g(x)$ for all x. We define the potential function on W by

$$V_\lambda(w) = \lambda : V\left(\frac{w}{\sqrt{\lambda}}\right) :, \tag{1}$$

$$: V\left(\frac{w}{\sqrt{\lambda}}\right) : = \int_I : P\left(\frac{w(x)}{\sqrt{\lambda}}\right) : g(x)dx, \tag{2}$$

where $\lambda > 0$ and $: P(w(x)) :$ is defined by the Wick product with respect to μ. $\lim_{n\to\infty} \int_I : P\left(\frac{w_n(x)}{\sqrt{\lambda}}\right) : g(x)dx$ exists in $L^2(\mu)$ and we denote the limit by $: V\left(\frac{w}{\sqrt{\lambda}}\right) :$. Here note that we cannot define $\int_I w(x)^k g(x)dx$ for $k \geq 2$. The operator $(-L_A + V_\lambda, \mathfrak{F}C_A^\infty(W))$ ($\mathfrak{F}C_A^\infty(W)$ denotes the set of smooth cylindrical functions) is essentially self-adjoint in $L^2(\mu)$ and we denote the self-adjoint extension by $-L_A + V_\lambda$. $-L_A + V_\lambda$ is called a $P(\phi)_2$ Hamiltonian on a finite volume interval I and is a representation of the quantization of the Hamiltonian whose classical field equation is the non-linear Klein-Gordon equation with space-time dimension 2:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t, x) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(t, x) + \frac{m^2}{2} w(t, x) + P'(w(t, x))\, g(x) = 0 \qquad (t, x) \in \mathbb{R} \times I. \tag{3}$$

Physically λ is the inverse of the Planck constant $\hbar$ and our problem is to determine the semi-classical limt of the lowest eigenvalue $E_0(\lambda)$ of $-L_A + V_\lambda$ as $\lambda \to \infty$ in terms of the potential function U which is given below.

Definition 1 Let $U(h) = \frac{1}{4}\|Ah\|_H^2 + V(h)$ for $h \in \mathrm{D}(A)$ and $U(h) = +\infty$ for $h \notin \mathrm{D}(A)$. Here $V(h) = \int_I P(h(x))g(x)dx$ and $h \in H$.

It is easy to see that $U(h)$ is a smooth functional on $H^1(I, dx)$. The following is our main theorem.

Theorem 2 *Assume* (A1) *and* (A2).
(A1) *$U(h)$ ($h \in H^1(I, dx)$) is a non-negative function and has finitely many zero point set $N = \{h_1, \ldots, h_n\}$.*
(A2) *Suppose* (A1). *The Hessian $\frac{1}{2}D^2U(h_i) \in L(H^1(I, dx), H^1(I, dx))$ is a strictly positive operator for all $1 \le i \le n$.*

Let $E_0(\lambda) = \inf \sigma(-L_A + V_\lambda)$. Then

$$\lim_{\lambda \to \infty} E_0(\lambda) = \min_{1 \le i \le n} E_i, \tag{4}$$

where E_i is the lowest eigenvalue of $-L_A + Q_{v_i}(w)$ and $Q_{v_i}(w) = \int_I : w(x)^2 : v_i(x)dx$, $v_i(x) = \frac{1}{2}P''(h_i(x))g(x)$. Explicitly,

$$\inf \sigma(-L_A + Q_{v_i}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\tilde{A}_{v_i}^2 - \tilde{A}^2 - 2\tilde{A}^{-1}M_{v_i}\tilde{A}^{-1}\right) \tag{5}$$

$$= -\frac{1}{4}\|\left(\tilde{A}_{v_i}^2 - \tilde{A}^2\right)\tilde{A}^{-1}\|_{L_{(2)}(L^2(I,dx))}^2. \tag{6}$$

tr *denotes the trace in $L^2(I, dx)$.*

References

[1] S. Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space : I. Unbounded one particle Hamiltonians, submitted, 2008.

[2] S. Aida, Semi-classical limit of the lowest eigenvalue of a Schrödinger operator on a Wiener space : II. $P(\phi)_2$-model on a finite volume, to appear in Journal of Functional Analysis.

[3] A. Arai, Trace formula, a Golden-Thompson inequality and classical limit in Boson Fock space, J. Funct. Anal. **136**, (1996), 510–547.

[4] J. Dereziński and C. Gérard, Spectral and scattering theory of spatially cut-off $P(\varphi)_2$ Hamiltonians, Commn. Math. Phys. **213** (2000), no.1, 39–125.

[5] W.J. Eachus and L. Streit, Exact solution of the quadratic interaction Hamiltonian, Reports on Mathematical Physics **4**, No. 3, 161–182, 1973.

[6] L. Rosen, Renormalization of the Hilbert space in the mass shift model, J. Mathematical Phys. **13** (1972), 918–927.

[7] B. Simon, Continuum embedded eigenvalues in a spatially cutoff $P(\phi)_2$ field theory, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 223–226.

[8] B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean (quantum) field theory, Princeton University Press, New Jersey, (1974).