半直線上のマルコフ過程の関数型極限定理

神大理　矢野 孝次

半直線上のマルコフ過程であって内部で連続な道を持つような過程に対する関数型極限定理を，前刷 [2] に従って報告する．その証明の特徴は，excursion 点過程の極限定理を定式化するところにある．これによって，マルコフ過程の関数型極限定理を excursion のレベルで論ずることができ，見通しがよい．

$[0,\infty)$ 上のマルコフ過程で，内部 $(0,\infty)$ では連続な道を持つようなものを考える．その生成作用素 $\mathcal{L}$ は，(適当なスケール変換の下で)

$$\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad \text{on } (0,\infty) \tag{1}$$

を満たし，原点で次の Feller の境界条件を満たす:

$$r\mathcal{L}u(0) = \int_{(0,\infty)} \{u(x) - u(0)\}\, j(\mathrm{d}x) + cu'(0). \tag{2}$$

ここで，m はスピード測度，j は跳入測度 (jumping-in measure)，r は原点での停留度 (stangancy rate)，c は原点から連続的に入る度合いを表す．可能な特性量 (m,j,c,r) に対して決まる原点出発のマルコフ過程を $X_{m,j,c,r}$ で表す．

Lamperti は半直線上のマルコフ過程で自己相似性を持つようなものを特徴付けた．特に，我々の過程 $X_{m,j,c,r}$ のうちで自己相似性を持つものを考えると，内部ではベッセル過程 ($\mathrm{d}m(x) = Cx^{\frac{1}{\alpha}-2}\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$) であり，原点での停留はなく ($r=0$)，境界での振舞いは次の 2 つの可能性に限られる:

(a) 原点から連続的に入る ($j=0$)．すなわち，反射壁ベッセル過程である．

(b) 原点からは跳入のみで ($c=0$)，跳入測度は $j((x,\infty)) = x^{-\beta}$.

我々の目標は，上記 (a),(b) の牽引域を調べることである．

技術的な理由により，次の仮定をおく:

(M) スピード測度は十分遠くで密度を持ち ($\mathrm{d}m(x) = m'(x)\mathrm{d}x$ on $(\exists x_0,\infty)$)，密度 $m'(x)$ は局所有界な可測関数で，無限遠で正則変動する:

$$m'(x) \sim \alpha^{-1}x^{\frac{1}{\alpha}-2}K(x) \qquad \text{as } x \to \infty. \tag{3}$$

また，原点で可積分性 $\int_{0+} x\log\log(1/x)\mathrm{d}m(x) < \infty$ を満たす．

右連続左極限を持つ関数空間に，Skorokhod の J_1-位相を入れて考える．また，過程 $X_{m,j,c,r}$ が退化しているとは，$X_{m,j,c,r}(t) \equiv 0$ が成り立つことを言う．主定理は，次の二つである．

Theorem 1. 過程 $X_{m,j,c,r}$ が存在し，退化していないとする．仮定 **(M)** が $0<\alpha<1$ に対して成り立つとし，次を仮定する:

(J1) $\displaystyle\int^{\infty} xj(\mathrm{d}x)<\infty.$

$u(\lambda)=\lambda^{\frac{1}{\alpha}}K(\lambda)$ とおく．このとき，

$$\frac{1}{\lambda}X_{m,j,c,r}(u(\lambda)\cdot)\to Y^{(\alpha)}(\cdot)\ (J_1)\ \textit{in law} \tag{4}$$

が成り立つ．ただし，$Y^{(\alpha)}$ は次元 $d=2-2\alpha$ の反射壁ベッセル過程.

Theorem 2. 過程 $X_{m,j,c,r}$ が存在し，仮定 **(M)** が成り立つとし，次を仮定する:

(J2) $j((x,\infty))\sim x^{-\beta}L(x)$ *as* $x\to\infty$ *for some* $0<\beta<\min\{1,1/\alpha\}$.

$u(\lambda)=\lambda^{\frac{1}{\alpha}}K(\lambda)$ とおく．このとき，

$$\frac{1}{\lambda}X_{m,j,c,r}(u(\lambda)\cdot)\to X_{m^{(\alpha)},j^{(\beta)},0,0}(\cdot)\ (J_1)\ \textit{in law} \tag{5}$$

が成り立つ．ただし，$\mathrm{d}m^{(\alpha)}(x)=\alpha^{-1}x^{\frac{1}{\alpha}-2}\mathrm{d}x$, $j^{(\beta)}((x,\infty))=x^{-\beta}$.

証明の粗筋は，次のようである:

(i) 求める極限定理は，対応 $(m,j,c,r)\mapsto X_{m,j,c,r}$ の連続性に帰着する．

(ii) マルコフ過程 $X_{m,j,c,r}$ の excursion 測度は次で与えられる:

$$\boldsymbol{n}_{m,j,c}(\Gamma)=\int_{(0,\infty)}j(\mathrm{d}x)\boldsymbol{Q}_m^x(\Gamma)+c\boldsymbol{n}_m(\Gamma) \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{Q}_m^x$ は吸収壁 $\mathcal{L}_m$-拡散過程の分布，$\boldsymbol{n}_m$ は反射壁 $\mathcal{L}_m$-拡散過程の excursion 測度.

(iii) excursion 測度 $\boldsymbol{n}_{m,j,c}$ をブラウン excursion 測度 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{BE}}$ の時間変更によって表す．[1] の結果を用い，(m,j,c) が収束すれば時間変更された道が $\boldsymbol{n}_{\mathrm{BE}}$-a.e. で収束することを示す.

(iv) マルコフ過程 $X_{m,j,c,r}$ の excursion 点過程 $\boldsymbol{N}_{m,j,c}$ を，ブラウン excursion 点過程 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{BE}}$ の時間変更によって，共通の確率空間上に構成する．(iii) を用い，(m,j,c) が収束すれば時間変更された道が $\boldsymbol{N}_{\mathrm{BE}}$-a.e. で収束することを示す.

(v) (iv) を用い，逆局所時間の収束を出し，マルコフ過程 $X_{m,j,c,r}$ の収束を出す.

参考文献

[1] P. J. Fitzsimmons and K. Yano. Time change approach to generalized excursion measures, and its application to limit theorems. *J. Theoret. Probab.,* to appear. Available at `http://dx.doi.org/10.1007/s10959-007-0108-8`.

[2] K. Yano. Convergence of excursion point processes and its applications to functional limit theorems of Markov processes on a half line. preprint. Available at `http://arxiv.org/abs/0705.3588`.