

Large deviations for discontinuous additive functionals of symmetric stable processes

東北大学大学院理学研究科数学専攻 土田兼治

ある確率過程の大偏差原理を証明するための有効な方法として Gärtner-Ellis の定理 [1] がある．その定理の主張は，

「その確率過程に対する対数モーメント母関数の微分可能性は，その確率過程に対する大偏差原理が成り立つための十分条件である」

である．しかし，対数モーメント母関数の微分可能性を証明することは一般には難しい．本講演では，オーダーが α の対称安定過程から生成される不連続な加法的汎関数の対数モーメント母関数がスペクトル関数になることに注目して，スペクトル関数の微分可能性を示すことにより，Gärtner-Ellis の定理を用いて大偏差原理を証明することを紹介する． $M = (P_x, X_t)$ をオーダーが α の対称安定過程とし， $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\alpha)}))$ をその Dirichlet 形式とする． $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta$ 上の正で有界対称な関数 $F(x, y)$ を用いて，以下のような対称形式を考える：

$$\mathcal{E}^{\theta F}(u, v) = \mathcal{E}^{(\alpha)}(u, v) - \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} u(x)v(y) \left(e^{\theta F(x, y)} - 1 \right) N(x, y) dx dy, \quad \theta \in \mathbb{R}^1$$

ここで， $N(x, y) = K(d, \alpha)|x - y|^{-d-\alpha}$ である．これは次のような Schrödinger 型作用素

$$\mathcal{H}^{\theta F} f(x) = \frac{1}{2}(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) - \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(e^{\theta F(x, y)} - 1 \right) N(x, y) dy$$

に関する 2 次形式，つまり $\mathcal{E}^{\theta F}(u, v) = (\mathcal{H}^{\theta F} u, v)_{L^2}$ である．この Schrödinger 型作用素のスペクトルのボトムによって，スペクトル関数 $C(\theta)$ を次のように定義する：

$$C(\theta) = -\inf \left\{ \mathcal{E}^{\theta F}(u, u) : u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}^{(\alpha)}), \int_{\mathbb{R}^d} u^2 dx = 1 \right\}.$$

以下では本論の仮定となる測度，関数の定義をする．まず測度の定義から始める．

定義 1 (1) 正の Radon 測度 μ に対して， $\mu \in \mathcal{K}$ (Kato class) に属するとは，

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq \epsilon} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} = 0$$

が成り立つときにいう．

(2) 測度 $\mu \in \mathcal{K}$ がクラス $\mathcal{K}_\infty$ に属するとは，

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|y| \geq R} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} = 0$$

が成り立つときにいう．

次に関数 F のクラスを定義する．

定義 2 (1) $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上で正の Borel 関数が有界対称であり, かつ任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $F(x, x) = 0$ となる関数 F がクラス $\mathcal{J}_\infty$ に属するとは,

$$\mu_F := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{F(x, y)}{|x - y|^{d+\alpha}} dy \right) dx \in \mathcal{K}_\infty$$

であるときをいう.

(2) 関数 $F \in \mathcal{J}_\infty$ がクラス $\mathcal{A}_\infty$ に属するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある Borel 測度 K で $\mu_F(K) < \infty$ となるものと, 定数 $\delta > 0$ が存在して, すべての可測集合 $B \subset K$ で $\mu_F(B) < \delta$ となるものに対し,

$$\sup_{(x, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta} \iint_{((K \setminus B) \times (K \setminus B))^c} \frac{G(y, z)F(x, y)G(z, w)}{G(x, w)} \frac{1}{|y - z|^{d+\alpha}} dz dy \leq \epsilon$$

が成り立つときにいう.

定理 1 $d \leq 2\alpha$ であり, $F \in \mathcal{A}_\infty$ ならば $C(\theta)$ は微分可能である.

$F \in \mathcal{J}_\infty$ とする. そのとき,

$$A_t(F) = \sum_{0 < s \leq t} F(X_{s-}, X_s)$$

と定義し, これは F によって定義される加法的汎関数という. この加法的汎関数は t に関して不連続である. この $A_t(F)$ に対して,

$$f(\theta) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log E_x[\exp(\theta A_t(F))]$$

を (もしこの極限が存在するならば), $A_t(F)$ に関する対数モーメント母関数という. 最近, Takeda-Tawara[2] によって, $\mathcal{H}^{\theta F}$ に関する L^p 空間上の半群 $p_t^{\theta F}$ のスペクトルの下限が p に関して独立であることが示された. この事実を用いて, スペクトル関数 $C(\theta)$ と $A_t(F)$ に関する対数モーメント母関数 $f(\theta)$ とが等しくなることがわかる. よって, 定理 1 と Gärtner-Ellis の定理によって, 以下の定理を得る.

定理 2 $d \leq 2\alpha$ と仮定する. $F \in \mathcal{A}_\infty$ に対して, $A_t(F)$ に関する大偏差原理が成立する, すなわち,

(i) 任意の開集合 $K \subset \mathbb{R}^1$ に対し,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_x \left(\frac{A_t(F)}{t} \in K \right) \leq - \inf_{\lambda \in K} I(\lambda).$$

(ii) 任意の開集合 $G \subset \mathbb{R}^1$ に対し,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log P_x \left(\frac{A_t(F)}{t} \in G \right) \geq - \inf_{\lambda \in G} I(\lambda)$$

ここで, $I(\lambda)$ は $C(\theta)$ の Fenchel-Legendre 変換: $I(\lambda) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}^1} \{\lambda\theta - C(\theta)\}$ である.

例 1 K_1, K_2 を $\mathbb{R}^d$ ($d \leq 2\alpha$) の互いに素なコンパクト集合とする. $F(x, y) = I_{K_1}(x)I_{K_2}(y) + I_{K_2}(x)I_{K_1}(y)$ のとき, $A_t(F)$ は時刻 t までに対称安定過程 M が K_1, K_2 間をジャンプするその回数を表す. 定理 2 により, この加法的汎関数の大偏差原理が得られる.

参考文献

- [1] Dembo, A., Zeitouni, O.: Large deviations techniques and applications, Second edition, Applications of Mathematics, **38**, Springer-Verlag, New York, (1998).
- [2] Takeda, M., Tawara, Y.: L^p -independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups, preprint.