非局所型 Feynman-Kac 半群のスペクトル下限の L^p 独立性

東北大学大学院理学研究科数学専攻
田原 喜宏

「確率解析とその周辺」
於 東京工業大学
2007 年 11 月 22 日

本講演では, L^p 空間上の非局所型 Feynman-Kac 半群のスペクトル下限が p に独立であるという結果を紹介する.

X を局所コンパクト可分距離空間とし, m を $\mathrm{supp}[m] = X$ であるような Radon 測度とする. $\mathbb{M} = (\Omega, \mathcal{M}, \mathcal{M}_t, \theta_t, \mathbb{P}_x, X_t, \zeta)$ を (X, m) 上の純飛躍型 m-対称 Hunt 過程, その Lévy system を (N, H) と書く. さらに, 推移半群 $\{p_t\}_{t\geq 0}$ を $p_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ で定義する. $\mathbb{M}$ は過渡的で, Green 函数 $G(x, y)$ が存在し, 以下の条件 (I)–(IV) を持つものとする.

(I) (既約性) $p_t(1_A f)(x) = 1_A p_t f(x)$ m-a.e. ならば $m(A) = 0$ または $m(X \setminus A) = 0$ である.

(II) (保存性) $p_t 1 = 1$.

(III) (強 Feller 性) $p_t(\mathcal{B}_b(X)) \subset C_b(X)$.

(IV) ($C_\infty(X)$ の不変性) $p_t(C_\infty(X)) \subset C_\infty(X)$.

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $\mathbb{M}$ に対応する正則 Dirichlet 形式とする. このとき, 仮定 (I)-(IV) と Beurling-Deny の公式より, Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は以下の様に表現される.

$$\mathcal{E}(u, u) = \int_{X \times X \setminus \triangle} (u(x) - u(y))^2 J(dx, dy) = \frac{1}{2} \int_{X \times X} (u(x) - u(y))^2 N(x, dy) \mu_H(dy).$$

次に摂動のクラスを定義する.

定義 1 (Kato クラス, Green 緊密な測度). μ を滑らかな Radon 測度として, Revuz 対応によって表される加法的汎函数を $A_t(\mu)$ と書く.

1. **μ が Kato クラスに属する** ($\mu \in \mathcal{K}$ と書く) とは, $\lim_{t\to 0} \sup_{x \in X} \mathbb{E}_x[A_t(|\mu|)] = 0$ となる事をいう.
2. μ が **Green 緊密な測度である** ($\mu \in \mathcal{K}_\infty$ と書く) とは, $\mu \in \mathcal{K}$ であって, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, あるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して, $\sup_{x \in X} \int_{K^c} G(x, y)|\mu|(dy) \leq \epsilon$ となる事をいう.

定義 2 (クラス $\mathcal{J}_\infty$). F を $X \times X$ 上の有界 Borel 可測函数で, $F(x, y) = F(y, x)$, $F(x, x) = 0$ なるものとする. **F が $\mathcal{J}_\infty$ に属する**とは,

$$\mu_F(dx) := \int_X F(x, y) N(x, dy) d\mu_H(dx) \in \mathcal{K}_\infty$$

となる事をいう.

$F \in \mathcal{J}_\infty$ に対して, Schrödinger 形式 $(\mathcal{E}^F, \mathcal{F})$ を以下に定める.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^F(u, u) &:= \mathcal{E}(u, u) - \int_{X \times X} u(x)u(y)F_1(x, y)N(x, dy)\mu_H(dy), \quad u \in \mathcal{F}. \\ &= \mathcal{E}_F(u, u) - \int_X u^2 d\mu_{F_1} \end{aligned}$$

ただし, $F_1 := e^F - 1$ とし, $\mathcal{E}_F$ は $\mathcal{F}$ を定義域とする Dirichlet 形式:

$$\mathcal{E}_F(u,u) := \frac{1}{2}\int_{X\times X\setminus\triangle}(u(x)-u(y))^2 e^{F(x,y)}N(x,dy)\mu_H(dx)$$

である. このとき, $(\mathcal{E}^F, \mathcal{F})$ に対応する非局所型 Feynman-Kac 半群 $\{p_t^F\}_{t\geq 0}$ は,

$$p_t f(x) = \mathbb{E}_x[\exp(A_t(F))f(X_t)]$$

と表される. $A_t(F)$ は $A_t(F) = \sum_{0<s\leq t} F(X_{s-}, X_s)$ で定義される非連続な加法的汎函数である. p_t^F のスペクトル下限を以下に定義する.

$$\lambda_p(F) = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|p_t^F\|_{p,p}, \quad 1\leq p\leq\infty$$

ただし, $\|\cdot\|_{p,p}$ は $L^p(X;m)$ から $L^p(X;m)$ への作用素ノルムである. 特に, 以下の等式が成立する:

$$\lambda_2(F) = \inf\left\{\mathcal{E}^F(u,u) \mid u\in\mathcal{F}, \int u^2 dm = 1\right\}, \quad \lambda_\infty(F) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\sup_{x\in X}\mathbb{E}_x[\exp(A_t(F))].$$

p_t^F のスペクトル下限が p 独立であるとは, $\lambda_p(F)$ の値が p に依存せずに一定である事を言う. このとき, 以下の定理が成立する:

定理 1. $\mathbb{M}$ が (I)-(IV) を満たし, $F\in\mathcal{J}_\infty$ とする. このとき, $\lambda_p(F) = \lambda_2(F)$ $(1\leq p\leq\infty)$ である事と, $\lambda_2(F)\leq 0$ である事は同値である.

上の定理に基き, スペクトル下限の L^p 独立性が保存される例と生じる例を以下に挙げる.

例 1 ($\mathbb{R}^d$ 上の α 安定過程 [1]). Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ を,

$$\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) = \frac{K(d,\alpha)}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\setminus\triangle}\frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy$$
$$\mathcal{F}^{(\alpha)} = \left\{u\in L^2(\mathbb{R}^d;dx) \mid \mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u)<\infty\right\}.$$

$\left(\text{ただし, } K(d,\alpha) = \dfrac{\alpha\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{2^{1-\alpha}\pi^{d/2}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\right)$ と定義する. このとき, $F\in\mathcal{J}_\infty$ ならば, $\lambda_2(F)\leq 0$. すなわち, スペクトル下限の L^p 独立性が成立する.

例 2 (双曲空間 $\mathbb{H}^d$ 上の "α 安定過程" [2]). $(B_t, \mathbb{P}_x)$ を双曲空間 $\mathbb{H}^d$ 上の Brown 運動とする. このとき, Brown 運動に対応する Dirichlet 形式をスペクトル定理によって, $\mathcal{E}(u,u) = \int_0^\infty \lambda d(E_\lambda u, u)$ と表す. ここで, $\mathcal{E}^{(\alpha)}(u,u) := \int_0^\infty \lambda^{\alpha/2} d(E_\lambda u, u)$ と定義すると, $(\mathcal{E}^{(\alpha)}, \mathcal{F}^{(\alpha)})$ に対する L^2 空間上のスペクトル下限は $\lambda_2(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{(d-1)^2}{4}\right)^{\alpha/2} > 0$ となり, L^p **独立性は成立しない**. ところが, $F\in\mathcal{J}_\infty$ $F\geq 0, F\not\equiv 0$ に対して, θ を十分大きく取れば, $\lambda_2(\theta F)\leq 0$ すなわち, L^p **独立性が成立する**.

References

[1] M. Takeda and Y. Tawara. L^p-independence of spectral bounds of non-local Feynman-Kac semigroups. preprint.

[2] Y. Tawara. L^p-independence of spectral bounds of Schrödinger-type operators with non-local potentials. in preparation.