Differentiability of Spectral functions for Non-symmetric Diffusion Processes

谷田篤史 (京都大学大学院理学研究科)

平成 19 年 11 月 22 日

1 はじめに

$D \subset \mathbb{R}^d$ 上の二階楕円型偏微分作用素 $L := \frac{1}{2}\nabla \cdot a\nabla + b \cdot \nabla + W$ に対して，適当なクラスのポテンシャル $V \not\equiv 0$ による 1 パラメータの摂動 $L_t := L + tV$ を考え，スペクトル関数 $\lambda(t) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : L_t - \lambda$は D 上 supercritical$\}$ を考える．supercritical の定義は以下で与える．$a = I$，$b = 0$，$d = 1, 2$ のときは，Simon(1976) や Klaus(1977) によって $t = 0$ の周りでの摂動級数が調べられている．ここではより一般の L_t に対する $\lambda(t)$ の振る舞い，特に t に関する微分可能性を，Takdeda-Tsuchida [3] の手法を利用して考察してみたい．L が対称作用素ではないために，修正すべき点がある．なお [3] では対称安定過程に対して $\lambda(t)$ の微分可能性の必要十分条件を与えている．$\lambda(t)$ の微分可能性は，加法的汎関数 $\int_0^t V(X_s)ds$ の大偏差原理が成立するためのひとつの根拠になる．

2 設定

$0 < \alpha < 1$ として，係数には $a, b \in C^{1,\alpha}, W, V \in C^\alpha$ を仮定し，$a > 0$ は局所一様楕円性を仮定する．また $p(t, x, y)$ を推移確率密度とするとき，$G_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, x, y)dt$ に対して，V の α ポテンシャルを $G_\alpha V(x) := \int_D G_\alpha(x, y)V(y)dy$ で定義する．このとき，$\lim_{\alpha\to\infty} ||G_\alpha V||_\infty = 0$ を仮定する．さらに $D = \bigcup D_n$ なる相対コンパクトな D の近似 $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$ を考え，$\lim_{n\to\infty} ||G_\alpha V 1_{D_n^c}||_\infty = 0$ を満たすものとする．なおこの 2 つの条件は，いわゆる Kato クラスの Green tight な関数であることに対応する．

以下では二階楕円型偏微分作用素の criticality に基づいた考察を行うので，作用素の criticality を次で定義しておく．

定義 1 (**criticality**)**.** D 上の二階楕円型偏微分作用素 L に対して，$L\phi = 0, \phi > 0$ を満たす $\phi(x) \in C^2(D)$ を正値調和関数と呼び，その全体を $C_L(D)$ と書く．
(i) L が D 上 **supercritical** であるとは，$C_L(D) = \emptyset$ のときをいう．
(ii) L が D 上 **product** L^1 **critical** であるとは，L が 0-Green 関数を持たず ($G_0(x, y) \equiv \infty$)，$\phi_t\widetilde{\phi}_t \in L^1(D, dx)$ のときをいう．ただし $\phi_t \in C_L(D), \widetilde{\phi}_t \in C_{\widetilde{L}}(D)$ とする．また $\widetilde{L} = \frac{1}{2}\nabla \cdot a\nabla - b \cdot \nabla - \nabla \cdot b + W$ は L の共役作用素である．
(iii) L が D 上 **product not** L^1 **critical** であるとは，L が 0-Green 関数を持たず，$\phi_t\widetilde{\phi}_t \notin L^1(D, dx)$ のときをいう．
(iv) L が D 上 **subcritical** であるとは，L が 0-Green 関数 $G_0(x, y)$ をもつときをいう．

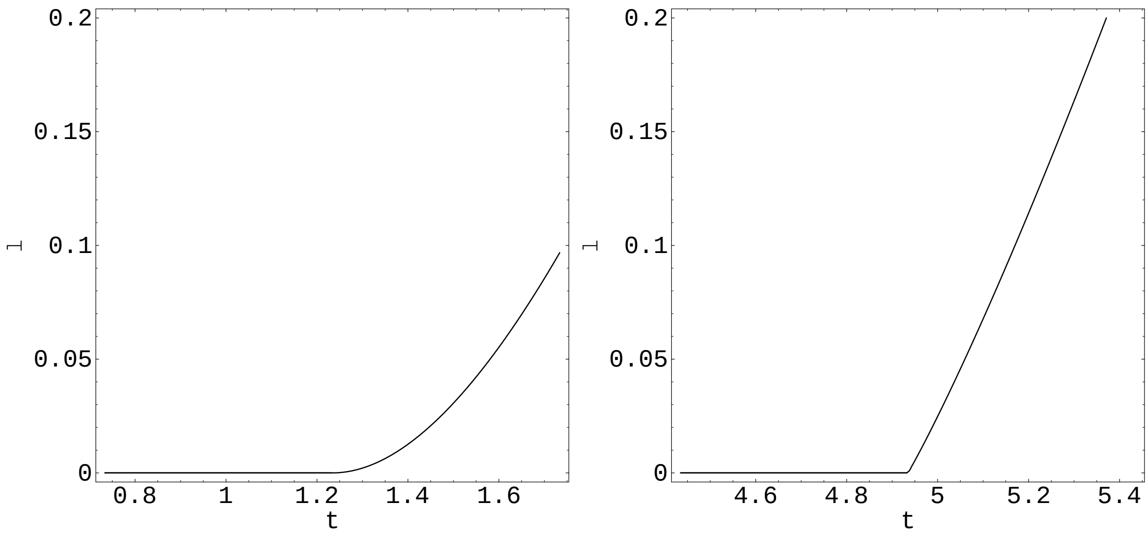
(ii),(iii) を合わせて L は D 上 **critical** という．L が D 上 critical であることと，$\widetilde{L}$ が D 上 critical であることは同値である．またこのとき $C_L(D)$ は 1 次元であり，正の定数倍をのぞいて一意的で，このときに限って $C_L(D)$ の元を **ground state** と呼ぶ．L が D 上 subcritical であるとき $C_L(D) \neq \emptyset$ ではあるが，次元は一般には分からない．

3 スペクトル関数の微分可能性

$t > t_0$ のとき，$\lambda(t)$ は $L^2(D, dx)$ の固有値になって，$L - \lambda(t)$ は product L^1 critical になる．このとき解析的摂動論 ([2]) より，$\lambda(t+\varepsilon) = \lambda(t) + \varepsilon \int_D \phi_t \widetilde{\phi}_t V dx + o(\varepsilon)$ と出来る．これと $\lim_{t \to t_0} \int_D \phi_t \widetilde{\phi}_t V dx = 0$ となるこを示すことによって，$\phi(t)$ の微分可能性について次のことがわかる．

定理 1. $L := \frac{1}{2}\nabla \cdot a\nabla + b \cdot \nabla$ は subcritical で，主固有値 $\lambda(0) = 0$ であると仮定する．$V(x) \geq 0$ として，$L_t = L + tV$ を考えると，$t_0 > 0$ が定まり，L_{t_0} は critical になる．さらに L_{t_0} が null critical であれば，$\lambda(t)$ は微分可能で，$\lambda'(t_0) = 0$ となる．

次の図は，$L = \frac{1}{2}\nabla^2 \,\mathrm{on}\, \mathbb{R}^d$，$V = 1_{\{|x|<1\}}$ の場合の $\lambda(t)$ の様子で，左が 3 次元 (L_{t_0} が null critical)，右が 5 次元 (L_{t_0} が positive critical) の場合のものである．



参考文献

[1] Donsker, M. and Varadhan, S. R. S., On the principal eignvalue of second-order ellipticdifferential operators, Comm. Pure Appl. Math., 29, 595-621. (1975).

[2] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer. (1984).

[3] Takeda, M. and Tsuchida, K., Differetiability of spectral functions for symmetric α-stable processes, Trans. Amer. Math. Soc., 359, 4031-4054, (2007).

[4] Vondraček, Z., An estimate for the L^2-norm of a quasi continuous function with respect to a smooth measure, Arch. Math., Vol. 67, 408-414, (1996).