

Daniell 積分とその応用

東京理科大学理学研究科 齋藤 洋樹

1902 年に Lebesgue が測度論を発表した後、1916 年に Daniell は違った見方から積分論を構築していた。測度から積分という道筋をたどる Lebesgue に対し、Daniell は始めから積分を構成したのである。すなわち、関数空間とその上の正值線形汎関数から始める方法である。現在、Daniell 積分と呼ばれるものには様々なバリエーションがあり、同じ名前の用語でも微妙な定義の違いがある。特別な状況で Lebesgue 積分と Daniell 積分は一致するが、一般には互いに同値なものとは限らない。そこで、本報告では最初に我々が採用する方式を紹介し、いくつかの注意点を述べる。その後、応用として Radon-Nikodym の定理、確率論への応用とその問題点について述べる。

定理 1. $\mathcal{H}$ を Stone 条件を満たす基本関数空間とする。 $\int, Q$ を $\mathcal{H}$ 上の 2 つの Daniell 積分とし、 Q は $\int$ に対して絶対連続とする。このとき、非負実数値関数束 $\langle h \rangle$ が存在し、

$$Q(f) = \int f \langle h \rangle \quad (f \in \mathcal{H})$$

が成り立つ。□

定理 1 の $\langle h \rangle$ は、基本関数 f に対し $f \langle h \rangle$ が $\int$ 可積分関数となるような関数束である。Stone 条件とは、 $\forall h \in \mathcal{H} \implies h \wedge 1 \in \mathcal{H}$ となることである。

ここで、Daniell 積分論における絶対連続を定義し、関数束 $\langle h \rangle$ について説明しなければならない。零集合は積分の種類に依存することに注意する。積分が 2 種類存在するような議論をするときには、 Q 零集合、 $\int$ 零集合などのように区別することにする。

定義 1. Q が $\int$ に対して絶対連続であるとは、任意の $\int$ 零集合が Q 零集合となることである。□

つぎに関数束 $\langle h \rangle$ の定義をする。まず、任意の $\varphi \in \mathcal{H}^+$ に対し、 $E := \{\varphi > 0\}$ の形の集合 E を基本可測集合と呼ぶことにする。基本可測集合全体を $\mathcal{E}$ で表す。

定義 2. 局所可積分関数束 $\langle h \rangle$ とは、任意の $E \in \mathcal{E}$ に対応させた Daniell 可測関数 h_E の集まりで、

- (1) $(\forall h_E \in \langle h \rangle)[h_E = h_E I(E)]$
- (2) $(\forall E \in \mathcal{E}, \forall F \in \mathcal{E}; E \subset F)[h_E = h_F I(E) \text{ (a.e.)}]$
- (3) $(\forall f \in \mathcal{H})(\forall h_E \in \langle h \rangle)[f h_E \text{ が Daniell 可積分関数になる.}]$
を満たすもののことである。□

定義 3. $\langle h \rangle$ を非負局所可積分関数束 (つまり任意の E に対し、 $h_E \geq 0$) とする。任意の基本関数 k に対して $E = \{k \neq 0\}$ とおけば、 $E \in \mathcal{E}$ となり、定義 2 (3) から、 $k h_E \in \mathcal{L}$ である。この $k h_E$ を $k \langle h \rangle$ で表し、 $\int k \langle h \rangle = \int k h_E$ と決める。□

もし $1 \in \mathcal{H}^+$ ならば、 $\Omega \in \mathcal{E}$ であり、Stone 条件の下では σ -有限と同値になる。定義 2 (2) より任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して $h_E = h_\Omega I(E)$ となるので、 $\langle h \rangle$ を h_Ω で代表させられる。しかし、一般に $\langle h \rangle$ を代表する単独の関数は存在しない。ここで注意されたいのは、本報告における Radon-Nikodym の定理には σ -有限に対応する仮定がおかれていないことである。しかし、Lebesgue 積分論で同じように関数束の概念を導入しても解決することはできない。このように Lebesgue 積分と Daniell 積分には決定的な違いがある。

次に、確率論への応用であるが、Radon-Nikodym の定理を用いて、条件付期待値の Daniell 積分での定式化について述べる。Daniell 積分において確率論を論じると時の基本的な設定は、 $1 \in \mathcal{H}$, $\int 1 = 1$ である。最初の仮定から、 $\mathcal{H}$ は Stone 条件を満たし、 σ -有限であることは明らかである。

本報告における Daniell 積分の定義と記号, 概略をまとめておく.

- $\mathcal{H}$ (基本関数空間): 線形空間かつ, $\forall h \in \mathcal{H} \implies |h| \in \mathcal{H}$.
 $\int h$ (基本積分): 正値線形汎関数で, 次の条件を満たす. $h_n \searrow 0 \implies \int h_n \rightarrow 0$.
- $\mathcal{H}^+$: 基本関数の単調増加極限関数全体 (関数値は ∞ も許す).
 $\int f = \lim \int \varphi_n \quad f \in \mathcal{H}^+, \varphi_n \in \mathcal{H}$.
- $\mathcal{H}_{int}^+$: $f \in \mathcal{H}^+$ s.t. $\int f \in \mathbf{R}$.
- $Z \subset \Omega$ が零集合とは, ある $f \in \mathcal{H}_{int}^+$ が存在し

$$\infty I(Z) \leq f$$

とできることである.

- $\mathcal{M}$ (可測関数空間): $\exists h_n \in \mathcal{H}, h_n \rightarrow \varphi$ (a.e.) (関数値は ∞ も許す).
- $\mathcal{L}^+$: $\varphi = f - g$ (a.e.) $f \in \mathcal{H}^+, g \in \mathcal{H}_{int}^+$.
 $\int \varphi = \int f - \int g$.
- $\mathcal{L}$ (可積分関数空間): $\varphi = f - g$ (a.e.) $f, g \in \mathcal{H}_{int}^+$.
 $\int \varphi = \int f - \int g$.

参考文献

- [1] K.Bichteler, Integration. A Functional Approach. Birkhauser, Basel(1998).
- [2] K.Bichteler, Stochastic Integration With Jump. Cambridge University Press, Cambridge(2002)
- [3] M.M. Rao, Measure Theory and Integration. John Wiley & Sons (1987).
- [4] G.E. Shilov and B.L. Gurevich transformed by R.A. Silverman, Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach. Dover Publications, Inc. New York. (1977).
- [5] A.J. Weir, General Integration and Measure. II. Cambridge University Press, Cambridge (1974).
- [6] A.C. Zaanen, Integration 2nd Edition. North-Holland Publishing Company (1967).