

# 第13回城崎新人セミナー

Kinosaki Freshman Seminar

## 報告集 編

城崎総合支所 2階 城崎市民センター大会議室

平成28年2月15日-2月19日

## はじめに

城崎新人セミナーは、第1回から第10回までは京都大学 GCOE「数学のトップリーダーの育成-コア研究の深化と新領域の開拓」における事業の一環として、また今年度は昨年度、一昨年度と同様に、先生方の科学研究費の援助を受け、第12回目を迎えることができました。本セミナーは、数学の様々な分野を専門としている大学院生および研究者が分野の垣根を越えて議論や交流を行うことにより視野を広げ、研究を発展させることを目的としてきました。

第13回目を迎えた本セミナーは、招待参加者6名の先生方を含め、計35名の参加のもと、2016年2月15日から2月19日までの期間に行われました。招待参加者の入谷寛先生（京都大学）、阿部拓郎先生（京都大学）、阿部健先生（京都大学）、大杉英史先生（関西学院大学）、高津飛鳥先生（首都大学東京）、山川大亮先生（東京工業大学）には、それぞれの専門分野について、初歩的な所から最先端に至るまでを丁寧に説明して頂き、また参加者全員にも、自身の結果について、講演またはポスター発表をして頂きました。我々運営委員の配慮が至らない場面も多々ございましたが、分野の垣根を越えた交流という当セミナーの目的も概ね達成され、有意義なセミナーにすることができたと感じております。

また、本セミナーは京都大学数学事務の方をはじめ、多くの方の協力を得て開催することができました。特に、つたや旅館の川口さんにはこの上ない程に協力して下さいました。川口さんの協力がなしでは滞りなくセミナーを開催することはできなかつたと感じております。この場を借りて、深謝の意を表したいと思っております。

当セミナーの参加者がこれを機に互いにより交流を深め、日本の数学の発展に寄与していくことを切に願っております。

第13回城崎新人セミナー運営委員長 高田 土満

同運営委員 蘆田 総平

川越 大輔

木村 満晃

社本 陽太

土谷 昭善

鳥生 梓

# 目次

1	招待講演者	1
	軸対称ナビエ・ストークス流の正則性について . . . . .	1
	阿部 健 (京都大学)	
	超平面配置の自由性と組合せ論 . . . . .	6
	阿部 拓郎 (京都大学)	
	トーリックイデアルのグレブナー基底とその応用 . . . . .	11
	大杉 英史 (関西学院大学)	
	最適輸送理論とその周辺 . . . . .	16
	高津 飛鳥 (首都大学東京)	
	線形常微分方程式とルート系 . . . . .	21
	山川 大亮 (東京工業大学)	
2	一般講演者	26
	Cabling formulae of quandle cocycle invariants for surface knots . . . . .	26
	石川 勝巳 (京都大学)	
	Fibred Fibration Categories . . . . .	31
	上村 太一 (京都大学)	
	定常渦斑の数値計算法とその数値検証に向けた展望 . . . . .	36
	宇田 智紀 (京都大学)	
	有限位数の巡回同型を持つファイバー曲面のスロープについて . . . . .	41
	榎園 誠 (大阪大学)	
	複素三次体の一般 Greenberg 予想について . . . . .	45
	片岡 武典 (東京大学)	
	2次元定常輸送方程式の解の正則性 . . . . .	50
	川越 大輔 (京都大学)	
	有限体・局所体上の帯球関数に現れる $q$ -超幾何型選点系直交多項式 . . . . .	55
	川村 晃英 (京都大学)	
	$W$ 代数の自由場実現 . . . . .	60
	元良 直輝 (京都大学)	
	正標数の代数多様体における non-nef locus について . . . . .	64
	佐藤 謙太 (東京大学)	
	Dynamical degree and arithmetic degree of fiber preserving self-maps . . . . .	69
	佐野 薫 (京都大学)	
	3次元単純整凸多面体の Ehrhart 多項式 . . . . .	73
	須山 雄介 (大阪市立大学)	
	Ehrhart 多項式の係数の符号に関する分類問題 . . . . .	78
	土谷 昭善 (大阪大学)	
	マルコフ切替を持つ拡散過程の指数安定性 . . . . .	83
	鳥生 梓 (京都大学)	

屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題 . . . . .	87
野場 啓 (京都大学)	
The Hilbert scheme of two point of Enriques surface . . . . .	92
林 太郎 (大阪大学)	
次数 6 の del Pezzo ファイブレーションを持つ 3 次元概 Fano 多様体の分類について . . . . .	97
福岡 尊 (東京大学)	
変形 BGG 圏と Schur-Weyl 双対性 . . . . .	102
藤田 遼 (京都大学)	
測地線連分数の周期性について . . . . .	107
戸次 鵬人 (東京大学)	
On the Hilbert schemes of finite algebras . . . . .	112
松澤 陽介 (東京大学)	
components of stable Auslander–Reiten quivers that contain non-periodic Heller lattices of string modules: the case of the Kronecker algebra $\mathcal{O}[X, Y]/(X^2, Y^2)$ over a complete D.V.R . . . . .	117
宮本 賢伍 (大阪大学)	
積分変換と D 加群 . . . . .	122
八尋 耕平 (東京大学)	
2 元生成クライン群に関する Jørgensen の理論 . . . . .	127
山崎 亮介 (東京大学)	
Bifurcation and linear stability of solitary waves for the coupled nonlinear Schrödinger equation . . . . .	132
山添 祥太郎 (京都大学)	
トロピカル幾何学とモノドロミー変換 . . . . .	137
山本 悠登 (東京大学)	

# 軸対称ナビエ・ストークス流の正則性について

阿部 健\*

京都大学理学部数学教室, 2016年2月

## 1 軸対称初期値に対する時間大域可解性

本稿では領域  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  上のナビエ・ストークス方程式の初期値境界値問題について考察する.

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p &= 0 \quad \text{in } \Pi \times (0, T), \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Pi \times (0, T), \\ (D(u)n)_{\tan} &= 0, \quad u \cdot n = 0 \quad \text{on } \partial\Pi \times (0, T), \\ u &= u_0 \quad \text{on } \Pi \times \{t = 0\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで  $D(u) = (\nabla u + \nabla^T u)/2$  は変形テンソル,  $n$  を外向き単位法ベクトル,  $f_{\tan}$  をベクトル場  $f$  の境界  $\partial\Pi$  上の接成分とする. 初期値  $u_0$  は軸対称として初期値境界値問題 (1.1) の時間大域可解性を考察する. ベクトル場  $u$  が軸対称であるとは, 回転行列  $A = (e_r(\eta), e_\theta(\eta), e_z)$  と  $\mathbb{R}^3$  の基底  $e_r = (\cos \eta, \sin \eta, 0)^T$ ,  $e_\theta = (-\sin \eta, \cos \eta, 0)^T$ ,  $e_z = (0, 0, 1)^T$  に対して  $u(x) = A^T u(Ax)$  が全ての  $x \in \Pi$  と  $\eta \in (0, 2\pi)$  に対して成立するときを言う. 軸対称ベクトル場  $u$  は円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用いて

$$u = u^r(r, z)e_r(\theta) + u^\theta(r, z)e_\theta(\theta) + u^z(r, z)e_z$$

と表示でき, 方位角成分  $u^\theta$  は旋回と呼ばれる. 全空間  $\Pi = \mathbb{R}^3$  上, 軸対称旋回なし初期値に対して (1.1) の解が時間大域的に滑らかになることはよく知られている [15], [23] ([17]). しかし軸対称旋回あり初期値に対して, 解が有界であり続けるかは一般に不明である. これまでに軸対称旋回ありナビエ・ストークス流に対しては, 速度場の動径成分に対するセリン型の正則性判定法 [20], [21] や渦度場の方位角成分に対する正則性判定法 [4] が証明されている ([13] も参照). また最近ではチェン等 [5], [6] とコッホ等 [14] によりタイプ I 爆発解の非存在がデジョルジの方法やリュウビル型定理を用いて証明されている ([22] も参照). ここで時刻  $t = T_*$  での爆発がタイプ I であるとはある定数  $C$  が存在し,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{C}{\sqrt{T_* - t}} \quad t < T_*$$

が成立することを言う. ルレイの爆発解の評価によりタイプ I 爆発は最小の爆発率になることが知られており [19] ([9], [2]), タイプ I 条件のもとでの解の正則性解明は重要である. 実際, 半線形熱方程式においてはタイプ I 爆発が起こり, さらに適当な初期条件のもとではタイプ I 爆発しか起こらないことが証明されている [10]. 爆発がタイプ I でない場合はタイプ II と呼ばれるが, タイプ II 爆発率は拡大  $u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$ ,  $\lambda > 0$ , により保たれないためスケール優臨界爆発と考えることができる.

\*kabe@math.kyoto-u.ac.jp 本研究は科研費 (研究スタート支援 15H06312) の助成を受けたものである.

## 2 外部問題

本稿では全空間  $\mathbb{R}^3$  上の軸対称ナビエ・ストークス流のスケール優臨界爆発について考察する。これまでのところスケール優臨界爆発の可能性についてはあまり研究がなされていない。本稿では外部問題により全空間上の軸対称解を近似する方法を考察する。領域  $\Pi^\varepsilon$  を半径  $\varepsilon > 0$  の円柱の外部  $\Pi^\varepsilon = \{x = (x_{\text{tan}}, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_{\text{tan}}| > \varepsilon, x_3 \in \mathbb{R}\}$  として、滑り境界条件の元で外部問題 (1.1) を考える。軸対称旋回なし初期値に対しては (1.1) の時間大域解が存在し、さらに極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  で解は全空間上の軸対称解に近づくことが知られている [15]。本稿では旋回がある場合の (1.1) の時間大域可解性について報告する。

定理 1 (I1) 任意に定数  $T > 0$  と  $\varepsilon > 0$  を与える。

(i) (時間大域可解性) 任意の軸対称旋回あり初期値  $u_0 \in H^1 \cap L^2_\sigma(\Pi^\varepsilon)$ ,  $ru_0^\theta \in \mathcal{H}^1 \cap L^2(\Pi^\varepsilon)$ , に対して (1.1) の解  $u_\varepsilon = v_\varepsilon + u_\varepsilon^\theta e_\theta \in C([0, T]; L^2_\sigma(\Pi^\varepsilon))$  で

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\in L^\infty(0, T; H^1(\Pi^\varepsilon)), \\ \partial_t u_\varepsilon &\in L^2(0, T; L^2(\Pi^\varepsilon)), \\ \nabla^2 u_\varepsilon &\in L^2(0, T; L^2_{ul}(\overline{\Pi^\varepsilon})), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi^\varepsilon} (|v_\varepsilon|^2 + |u_\varepsilon^\theta|^2) dx + 2 \int_0^t \int_{\Pi^\varepsilon} (|\nabla v_\varepsilon|^2 + |\nabla u_\varepsilon^\theta|^2 + \left| \frac{u_\varepsilon^\theta}{r} \right|^2) dx dt \\ &+ \frac{2}{\varepsilon} \int_0^t \int_{\partial \Pi^\varepsilon} |u_\varepsilon^\theta|^2 d\mathcal{H} dt \leq \int_{\Pi^\varepsilon} (|v_0|^2 + |u_0^\theta|^2) dx \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

を満たすものが一意に存在する。ここで  $L^2_\sigma(\Pi^\varepsilon)$  は  $L^2$ -ソレノイダルベクトル空間を表し,  $\mathcal{H}^1(\Pi^\varepsilon)$  は  $\nabla \varphi \in L^2(\Pi^\varepsilon)$  かつ  $\varphi \in L^2(\partial \Pi^\varepsilon)$  となる関数  $\varphi \in L^1_{loc}(\Pi^\varepsilon)$  全体の空間を表す。

(ii) (方位角成分の評価) さらに  $ru_0^\theta \in L^\infty(\Pi^\varepsilon)$  を仮定する。このとき評価

$$|u_\varepsilon^\theta(r, z, t)| \leq \frac{1}{r} \|ru_0^\theta\|_{L^\infty} \quad r > \varepsilon, z \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (1.4)$$

が成立する。

(iii) (動径成分, 垂直成分の評価) 渦度場の方位角成分  $\Omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon^\theta / r$ ,  $\omega_\varepsilon^\theta = \partial_z v_\varepsilon^r - \partial_r v_\varepsilon^z$ , に対して評価

$$\int_{\Pi^\varepsilon} |\Omega_\varepsilon|^2 dx + \int_0^t \int_{\Pi^\varepsilon} |\nabla \Omega_\varepsilon|^2 dx dt \leq \int_{\Pi^\varepsilon} |\Omega_0|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon^4} \|ru_0^\theta\|_{L^\infty}^2 \|u_0\|_{L^2}^2 \quad t > 0 \quad (1.5)$$

が成立する。

注意 2 (i) 方程式 (1.1) の軸対称旋回あり初期値に対する時間大域可解性は, 有界領域  $\Pi_R^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon < r < R, |z| < R\}$  の場合にザジャツコウスキ [24] ([25]) により証明されている。ここではガレルキン近似とストークス作用素の  $L^p$  最大正則性を用いて (1.1) の時間大域解を構成している。論文 [1] においては (1.1) と同値な軸対称旋回なしブジネスク方程式の時間大域可解性を示し, 評価 (1.3)-(1.5) とともに (1.1) の時間大域可解性を証明した。

(ii) 速度場の方位角成分の評価 (1.4) は方程式に付随するスケーリングで普遍である。即ち, 任意の  $T_* > 0$  に対して

$$u^\theta(r, z, t) = \varepsilon u_\varepsilon^\theta(\varepsilon r, \varepsilon z, \varepsilon^2 t + T_*)$$

と定めると  $u^\theta$  は  $\Pi^1 \times (-T_*/\varepsilon^2, 0)$  上定義された関数で評価

$$|u^\theta(r, z, t)| \leq \frac{1}{r} \|ru_0^\theta\|_{L^\infty} \quad r > 1, z \in \mathbb{R}, -\frac{T_*}{\varepsilon^2} < t < 0$$

を満たす. 従って速度場の方位角成分の爆発率はスケール臨界である.

(iii) 速度場の動径成分, 垂直成分の評価 (1.5) は, スケール臨界となる爆発率よりも少し早い. 旋回なし初期値に対しては (1.5) の右辺第二項はゼロになり, 渦度場のエネルギーノルム  $\|\Omega_\varepsilon\|_{L^2(\Pi^\varepsilon)}$  はパラメーター  $\varepsilon > 0$  に対して一様有界になる. これにより (1.1) の軸対称解  $u_\varepsilon$  は  $\varepsilon \rightarrow 0$  で  $\mathbb{R}^3$  上の滑らかな解へ近づく [15]. 旋回がある場合には  $\|\Omega_\varepsilon\|_{L^2(\Pi^\varepsilon)}$  は極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  で非有界となる可能性があるが, 評価 (1.5) により渦度場のエネルギーノルム  $\|\Omega_\varepsilon\|_{L^2(\Pi^\varepsilon)}$  の爆発率は高々  $O(\varepsilon^{-2})$  程度であることがわかる. 領域  $\Pi^\varepsilon \times (0, T_*)$  上の (1.1) の解に対して, 極限  $\varepsilon \rightarrow 0$  での渦度場のエネルギーノルムの爆発が臨界であるとは, ある定数  $C$  が存在し

$$\|\Omega_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T_*; L^2(\Pi^\varepsilon))} \leq \frac{C}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \quad \varepsilon < 1$$

が成立することを言う. 上の評価が満たされるとき,

$$\Omega(r, z, t) = \varepsilon^3 \Omega(\varepsilon r, \varepsilon z, \varepsilon^2 t + T_*)$$

と定めれば,  $\Omega$  は  $\Pi^1 \times (-T_*/\varepsilon^2, 0)$  上定義された関数で, エネルギーノルム  $\|\Omega\|_{L^\infty(-T_*/\varepsilon^2, 0; L^2(\Pi^\varepsilon))}$  は  $\varepsilon$  について一様有界になる. 渦度場のエネルギーノルムの爆発がスケール優臨界とは

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{3/2} \|\Omega_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T_*; L^2(\Pi^\varepsilon))} = \infty$$

となる場合をいう. 評価 (1.5) により渦度場のエネルギーノルムのスケール優臨界爆発は遅いレート  $3/2 \leq \alpha < 2$  になることが従う. 即ち, 任意の  $T_* > 0$  に対して,  $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha \|\Omega_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T_*; L^2(\Pi^\varepsilon))} = \infty$  となる定数  $\alpha \geq 2$  は存在しない.

(iv) オイラー方程式の場合, 軸対称旋回なし初期値に対する時間大域的可解性は [23] において証明されている. 円柱領域  $\Pi = \{\varepsilon < r < R\}$  においても軸対称旋回なしオイラー方程式の時間大域可解性が証明されているが [3], 旋回がある場合の時間大域的可解性は不明である. ホウとルオ [11] による数値計算では軸対称旋回ありオイラー方程式の解は境界上爆発する可能性が指摘されている. 外部領域  $\Pi^\varepsilon$  における軸対称旋回ありオイラー方程式は半空間上の 2 次元零粘性ブジネスク方程式ともみなすことができる. 2 次元零粘性ブジネスク方程式に対する 1 次元爆発モデルの研究については [12], [7], [8] を参照.

注意 3 最近, 軸対称初期値に対するコーシー問題のスケール優臨界爆発がレイ等 [16] によって研究されている. そこではエネルギー有界かつ  $ru_0^\theta$  が有界となる初期値に対して  $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$  上の滑らかな軸対称旋回あり解が評価

$$|u(x, t)| \leq C \frac{|\log r|^{\frac{1}{2}}}{r^2} \quad 0 < t \leq T$$

を対称軸  $r = 0$  付近で満たすことが報告されている. 定数  $C$  は初期値にのみ依存する定数である. 証明は渦度場の方位角成分の各点評価を速度場の局所エネルギーと  $ru^\theta$  の  $L^\infty$  評価を用いて評価する方針である. (渦度場の方位角成分の各点評価については [18] も参照).

## 参考文献

- [1] K. Abe, Global well-posedness of the axisymmetric Navier-Stokes equations in the exterior of an infinite cylinder, Preprint. 2015
- [2] K. Abe, The Navier-Stokes equations in a space of bounded functions, *Commun. Math. Phys.*, 338, 849-865, (2015)
- [3] D. Chae and O. Y. Imanuvilov, Generic solvability of the axisymmetric 3-D Euler equations and the 2-D Boussinesq equations, *J. Differential Equations*, 156, 1–17, (1999)
- [4] D. Chae and J. Lee, On the regularity of the axisymmetric solutions of the Navier-Stokes equations, *Math. Z.*, 239, 645–671, (2002)
- [5] C.-C. Chen, R. M. Strain, T.-P. Tsai and H.-T. Yau, Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations, *Int. Math. Res. Not*, 9, 31 (2008)
- [6] C.-C. Chen, R. M. Strain, T.-P. Tsai and H.-T. Yau, Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. II, *Comm. Partial Differential Equations*, 34, 203–232, (2009)
- [7] K. Choi, A. Kiselev and Y. Yao, Finite time blow up for a 1D model of 2D Boussinesq system, *Comm. Math. Phys.*, 334, 1667–1679 (2015)
- [8] K. Choi, T. Hou, A. Kiselev, G. Luo, V. Sverak and Y. Yao, On the Finite-Time Blowup of a 1D Model for the 3D Axisymmetric Euler Equations, arXiv:1407.4776
- [9] Y. Giga, K. Inui and S. Matsui, On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data, *Advances in fluid dynamics*, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 4, 27–68 (1999)
- [10] Y. Giga and R. V. Kohn, Characterizing blowup using similarity variables, *Indiana Univ. Math. J.*, 36, 1–40 (1987)
- [11] T. Hou and G. Luo, Potentially Singular Solutions of the 3D Incompressible Euler Equations, arXiv:1310.0497
- [12] T. Hou and G. Luo, On the finite-time blow up of a 1D model for the 3D incompressible Euler equations, arXiv:1311.2613
- [13] Q. Jiu and Z. Xin, Some regularity criteria on suitable weak solutions of the 3-D incompressible axisymmetric Navier-Stokes equations, *Lectures on partial differential equations*, Int. Press, Somerville, MA, 2, 119–139, 2003
- [14] G. Koch, N. Nadirashvili, G. A. Seregin and V. Sverak, Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications, *Acta Math.*, 203, 83-105, (2009)
- [15] O. A. Ladyzenskaya, Unique global solvability of the three-dimensional Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of axial symmetry, *Zap. Nauch. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov*, 7, 155-177 (1968)

- [16] Z. Lei, E. A. Navas and Qi S. Zhang, A priori bound on the velocity in axially symmetric Navier-Stokes equations, *Commun. Math. Phys.*, 341, 289–307, (2016)
- [17] S. Leonardi, J. Malek, J. Necas and Pokorny, M., On axially symmetric flows in  $\mathbf{R}^3$ , *Z. Anal. Anwendungen*, 18, 639–649, (1999)
- [18] J. B. Loftus and Qi S. Zhang, A priori bounds for the vorticity of axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations, *Adv. Differential Equations*, 15, 531–560, (2010)
- [19] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, 63, 193–248, (1934)
- [20] J. Neustupa and M. Pokorny, An interior regularity criterion for an axially symmetric suitable weak solution to the Navier-Stokes equations, *J. Math. Fluid Mech.*, 2, 381–399, (2000)
- [21] J. Neustupa and M. Pokorny, Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component, *Proceedings of Partial Differential Equations and Applications (Olomouc, 1999)*, 126, 469–481, 2001
- [22] G. Seregin and V. Sverak, On type I singularities of the local axi-symmetric solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Partial Differential Equations*, 34, 171–201 (2009)
- [23] M. R. Ukhovskii and V. I. Iudovich, Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space, *J. Appl. Math. Mech.*, 32, 52-61 (1968)
- [24] W.M. Zajączkowski, Global existence of axially symmetric solutions to Navier-Stokes equations with large angular component of velocity, *Colloq. Math.*, 100, 243–263, (2004)
- [25] W.M. Zajączkowski, Global axially symmetric solutions with large swirl to the Navier-Stokes equations, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 29, 295–331, (2007)

# 超平面配置の自由性と組み合わせ論

阿部 拓郎\*

京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻, 2016年2月

## 1 超平面配置とその代数

$V$  を体  $\mathbb{K}$  上の  $\ell$  次元ベクトル空間,  $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell]$  をその座標環とする.  $\mathcal{A}$  が  $V$  中の超平面配置であるとは,  $\mathcal{A}$  が  $V$  中の, 原点を通る超平面の有限族であるときにいう. 断らない限り,  $\bigcap_{H \in \mathcal{A}} H = \{0\}$  を仮定する. 定義から,  $\mathcal{A} \ni H$  を定義する線形形式が定まる. それを一つ固定して  $\alpha_H \in V^*$  と表す.  $\text{Der} S := \bigoplus_{i=1}^{\ell} S \partial_{x_i}$  で  $\mathbb{K}$  線形な  $S$  導分加群を表す. このとき超平面配置の代数として以下の加群を定義する,

定義 1.1

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \text{Der } S \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H \ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

を  $\mathcal{A}$  の対数的ベクトル場とよぶ.

対数的ベクトル場は一般には反射的加群となる. すなわち自然に存在する写像  $D(\mathcal{A}) \rightarrow (D(\mathcal{A})^*)^*$  が同型となる. これはねじれない加群よりは強く, 自由加群よりは弱い条件である. 実際, 一般に対数的ベクトル場は自由加群ではない. よって対数的ベクトル場が自由加群であるとき,  $\mathcal{A}$  を自由配置と呼ぶ.  $D(\mathcal{A})$  は定義から明らかに次数付加群のため, 自由配置  $\mathcal{A}$  の対数的ベクトル場には斉次基底  $\theta_1, \dots, \theta_\ell$  がとれる. 階数が  $\ell$  であることは, ゼロイデアルでの局所化を包含関係式

$$\text{Der } S \supset D(\mathcal{A}) \supset \left( \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H \right) \text{Der } S$$

に当てはめることでわかる. このとき自由配置  $\mathcal{A}$  の指数  $\exp(\mathcal{A})$  を,  $(\deg \theta_1, \dots, \deg \theta_\ell)$  で定義する. ここで斉次な  $\theta \in \text{Der } S$  に対して  $\deg \theta := \deg \theta(\alpha) \ (\forall \alpha \in V^*, \theta(\alpha) \neq 0)$  たる多項式次数で定義する. 斉次もよって, この値が常に一致するものとして定義される.

この定義は技巧的に見えるかもしれないが, その祖は超平面配置研究の始祖たるワイル配置の不変式論にある. 簡単に復習しよう.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  とし,  $W$  をワイル群とする. もしワイル群やルート系に不慣れな方は,  $W$  が  $\ell$  次対称群の場合を思い描いて頂いてよい. すると  $W$  の  $V$  への作用は自然に  $S$  へと拡張されるので, その不変部分環  $R := S^W$  が考えられる. Chevalley の有名な結果より,  $R = \mathbb{R}[P_1, \dots, P_\ell]$  となるような  $\mathbb{R}$  上代数的独立な斉次多項式  $P_1, \dots, P_\ell$  が存在する (基本不変式). これらの取り方は, 次数が最も小さいもの以外には任意性があるが, その次数は基本不変式の取り方によらないことが知られている. このとき  $W$  の指数  $\exp(W)$  は,  $(\deg P_1 - 1, \dots, \deg P_\ell - 1)$  で定義され

\*2016年3月より九州大学マスコアインダストリ研究所へ異動. abe@imi.kyushu-u.ac.jp

る. 例えば  $W$  が対称群の場合, 基本不変式はまさに基本対称式であるから,  $\exp(W) = (0, 1, \dots, \ell-1)$  である.

さて, ワイル群は位数 2 の鏡映で生成される (対称群の場合はいわゆる互換), これをベクトル空間への作用の観点から考えると, 線形な超平面を鏡映面とする折り返しという幾何学的操作にあたる. これらの事実を合わせれば, ワイル群を考えることと, ワイル群に含まれる全ての鏡映の鏡映面の集合  $\mathcal{A}_W$  を考えることは同じである. これはまさにルート系の立場であるが, この  $\mathcal{A}_W$  を  $W$  に対するワイル配置と呼ぶ. ここまで来れば想像がつくと思うが, このとき以下が成立する:

**定理 1.2 (斎藤恭司, [S])**

$\mathcal{A}_W$  は自由配置であり,  $\exp(\mathcal{A}_W) = \exp(W)$ .

証明は具体的に自由基底を構成することで行われ, そこでは基本不変式が活躍するがあまり深くは踏み込まないこととする. 興味を持たれた方は, [OT] などをご参照頂きたい. 超平面配置研究の基本的かつ網羅的な教科書である.

よってこの, 群作用の鏡映面全体という枠組みを取っ払い, 超平面の有限集合全てを, 言わば “群作用を持たない鏡映面全体” ととらえることで一般化したものが超平面配置である. 故にまずはワイル配置やワイル群の場合のよい性質がどれくらい成立するかに興味がある. その典型といえるのが指数である. 例えばワイル配置の場合, 以下が知られている.

**定理 1.3**

ユークリッド空間あるいは複素ベクトル空間中の超平面配置  $\mathcal{A}$  に対して  $M(\mathcal{A}) := (V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  とする. このとき

$$\text{Poin}(M(\mathcal{A}_W); t) := \sum_{i=0}^{\ell} \dim H^i(M(\mathcal{A}_W), \mathbb{C}) t^i = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t),$$

ここで  $(d_1, \dots, d_{\ell})$  はワイル群  $W$  の指数.

つまりワイル群の指数は, ワイル配置の補空間のポアンカレ多項式あるいはベッチ数を記述している. では, 指数が定義できる配置としてワイル配置あるいはワイル群の一般化とみなせる自由配置についてはどうだろうか. 予想が付くかもしれないが (そして実際はかなり衝撃的な事実であるが), 全く同じ以下の主張が成立する:

**定理 1.4 (寺尾宏明, [T])**

$\mathcal{A}$  が指数  $(d_1, \dots, d_{\ell})$  の複素あるいは実ベクトル空間中の自由配置であれば,

$$\text{Poin}(M(\mathcal{A}); t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + d_i t),$$

が成立.

これにより, 一般に群作用がないため不変部分環のような自然かつ素性のよい対応する代数が存在しない超平面配置に対しては, 対数的ベクトル場を考えることで非常に興味深い性質が導かれることがわかる. 超平面配置の代数学は, 寺尾の分解定理と呼ばれる定理 1.4 をその始祖とし, 今日まで発展を続けている. 実際, 対数的ベクトル場は, 超平面配置の代数を代数幾何・位相幾何・組み合わせ論と結び架け橋の役割を果たす. 近年は特に, [Y1] を契機とした, 代数幾何的手法を用いた発展が目覚ましい (このあたりについては例えば [Y2] を参照). 例えば, 以下のような非常に基本的かつ不思議な性質も, 対数的ベクトル場の代数幾何的理解を通して証明される.

**定理 1.5 ([A1])**

$\mathcal{A}$  を  $\mathbb{R}^2$  中のアフィン直線の有限族とする.  $Poin(M(\mathcal{A}); t) = (1 + at)(1 + bt)$  とおこう. ここで  $a \leq b$  がどちらも実数であると仮定する. このとき任意の直線  $L \subset \mathbb{R}^2$  に対して ( $\mathcal{A}$  に含まれていなくてもよい),  $n_L := |\{L \cap H \neq \emptyset \mid H \in \mathcal{A}, L \neq H\}|$  とすると,  $a < n_L < b$  たる  $L$  は存在しない. 言い換えると,  $\chi(\mathcal{A}; t) := Poin(M(\mathcal{A}); -t^{-1})t^2 = (t - a)(t - b)$  と置いた際,  $\chi(\mathcal{A}; n_L) \geq 0$  となる (この定式化では,  $a, b$  はどのような値でもよい). 更に,  $\chi(\mathcal{A}; n_L) = 0$  たる  $L$  が存在すれば,  $\mathcal{A}$  の錐化  $c\mathcal{A}$  は指数  $(1, a, b)$  の自由配置となる.

定理 1.5 は非常にシンプルな主張であるため, 既に別の視点から証明されているあるいは知られていてもおかしくないと思われるが, 発表から三年たってもそういった指摘がないため, どうやら自由配置を用いた [A1] での証明が初めてらしい. 代数幾何を用いない, 組み合わせ論的な, それも数え上げを用いた証明が存在すべきと考えるので, 興味のある方はトライしてみると面白いかもしれない.

## 2 自由性と組み合わせ論

さて, §1 では自由性の性質とそれがもたらす超平面配置の諸性質を見てきた. この章では逆に, 自由性はどのような性質から決まるかを考えてみよう. そのための基本的な道具は超平面配置の組み合わせ論である.

**定義 2.1**

(1)  $L(\mathcal{A}) := \{\cap_{H \in B} H \mid B \subset \mathcal{A}\}$  を  $\mathcal{A}$  の交差束という. 交差束には逆包含関係で半順序が入り, 半順序集合となる. 交差束上にメビウス関数  $\mu$  を,  $\mu(V) := 1, \mu(X) := -\sum_{X \subsetneq Y \subsetneq V, Y \in L(\mathcal{A})} \mu(Y)$  ( $L(\mathcal{A}) \ni X \subsetneq V$ ) という関係で定める.

(2)

$$\pi(\mathcal{A}; t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)(-t)^{\text{codim } X}, \quad \chi(\mathcal{A}; t) := \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X)t^{\dim X}$$

と定義する. 前者を  $\mathcal{A}$  のポアンカレ多項式, 後者を特性多項式と呼ぶ.

交差束は超平面配置の交わり方の情報を保存するものであり, 超平面配置の組み合わせ論的情報といわれる. 超平面配置に関する基本的かつ安直にできる問題設定として, 超平面配置のどのような性質が組み合わせ論的に決まるか, というものがある. 組み合わせ論的情報は非常に弱いもののため, ほとんどのものは決まらないように思われるかもしれないが, 実は以下の定理が存在する.

**定理 2.2 (Orlik-Solomon, [OS])**

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$  とする. このとき  $M(\mathcal{A})$  のコホモロジー環  $H^*(M(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$  は, 積構造も含めて  $L(\mathcal{A})$  にのみ依存する. その系として,

$$Poin(M(\mathcal{A}); t) = \pi(\mathcal{A}; t).$$

定理 2.2 は,  $L(\mathcal{A})$  の情報のみを用いて Orlik-Solomon 代数と呼ばれる代数を構成し, それがコホモロジー環と環同型となることを証明するという方法で示される. このように非常に重要な構造が組み合わせ論にのみ依存することが知られており, ”超平面配置のどのような性質が性質が組み合わせ論的であるか“, という問題設定はやはり重要かつ興味深いものである. とはいえ, 組み合わせ論的でないものも多く, 例えば  $M(\mathcal{A})$  の基本群は組み合わせ論的でないことが知られている.

さて、以上を踏まえて以下の予想を考えよう：

**予想 2.3 (寺尾予想, 1981)**

$\mathcal{A}$  の自由性は  $L(\mathcal{A})$  にのみ依存して決まる。即ち二つの超平面配置  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  で、半順序集合間の同型  $L(\mathcal{A}) \simeq L(\mathcal{B})$  が存在するペアを考えたととき、 $\mathcal{A}$  が自由ならば  $\mathcal{B}$  も自由。

これは実は予想としてではなく、”問題“として寺尾により提出されたものであるが、実に 35 年の間、証明されることも反例が見つかることもないまま過ぎている。 $l = 2$  の場合は正しいこと、というか全ての配置が自由なことが簡単にわかるので、最初に問題となるケースは  $l = 3$  の場合であるが、この場合ですら本質的な進展はない。計算機を使っていろいろな実験が進められているが、わかっていることは  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  で  $l = 3$  ならば、 $|\mathcal{A}| \leq 12$  で寺尾予想は正しい、という結果くらいであり ([WY], [FV], [ACKN] などを参照)、解決には極めて遠い。

寺尾予想に対するアプローチの一つとして、剰余的自由配置が最近の結果として存在する。以下、それを紹介するための準備を行う。

**定義 2.4**

超平面配置  $\mathcal{A}$  と  $X \in L(\mathcal{A})$  に対して、

$$\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}, \mathcal{A}^X := \{H \cap X \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X\}$$

で定義する。前者を  $X$  での局所化、後者を  $X$  への制限と呼ぶ。

**定理 2.5 ([A2], 剰余定理)**

ある  $H \in \mathcal{A}$  で、 $\pi(\mathcal{A}^H; t) \mid \pi(\mathcal{A}; t)$  かつ  $\mathcal{A}^H$  が自由であるものが存在すれば、 $\mathcal{A}$  も自由。

剰余定理は次元に関する帰納法を働かせるのに極めて有効である。つまり組み合わせ論的に定まる以下の集合が意味を持つ；

**定義 2.6**

$$X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_\ell$$

が  $\mathcal{A}$  の旗であるとは、 $X_i \in L(\mathcal{A})$ ,  $\text{codim } X_i = i$  ( $i = 0, \dots, \ell$ ) である時に言う。 $\mathcal{A}$  の旗  $\{X_i\}$  が剰余旗であるとは、 $\pi(\mathcal{A}^{X_i}; t) \mid \pi(\mathcal{A}^{X_{i-1}}; t)$  ( $i = 1, \dots, \ell$ ) たるときにいう。

二次元の超平面配置はすべて自由であることが簡単にわかるため、以下が定理 2.5 を繰り返していることで直ちにわかる。

**定理 2.7 ([A2])**

$\mathcal{A}$  が剰余旗を持てば  $\mathcal{A}$  は自由。また、 $\mathcal{A}$  が剰余旗を持つかどうかは組み合わせ論的に決まる。

剰余旗を持つ配置を剰余的自由配置と呼ぶ。剰余的自由配置は、これまでに知られていた寺尾予想の成立する自由配置のカテゴリを拡張するものであり、かつ旗への制限に対応する配置のポアンカレ多項式の情報しか使わず自由性がわかるという点で極めて興味深い。無論、剰余的でない自由配置も存在するため寺尾予想の解決には程遠いが、思っていたより自由性は組み合わせ論的であるという印象を、定理 2.7 からは受ける。

逆を言えば、定理 2.7 は交差束  $L(\mathcal{A})$  のうちのほんの一部、しかも数値的なものしか用いておらず (それでも自由性がかなりわかるところが面白いわけであるが)、 $L(\mathcal{A})$  の情報をより詳細に用いた自由性判定法を見つけることが、今後の自由性研究の一つの鍵になると考えられる。

## 参考文献

- [A1] T. Abe, Roots of characteristic polynomials and intersection points of line arrangements. *J. Singularities*, Vol. 8 (2014), pp100–117.
- [A2] T. Abe, Divisionally free arrangements of hyperplanes. *Invent. Math.* to appear. DOI:10.1007/s00222-015-0615-7
- [ACKN] T. Abe, M. Cuntz, H. Kawanoue and T. Nozawa, Non-recursive freeness and non-rigidity of plane arrangements. *Discrete Math.* to appear. arXiv:1411.3351.
- [FV] D. Faenzi and J. Vallès, Logarithmic bundles and line arrangements, an approach via the standard construction. *J. London Math. Soc.* Vol. 90 (2014), no. 3, pp675-694
- [OS] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, *Invent. Math.* Vol. 56 (1980), no. 2, pp167–189.
- [OT] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [S] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math*, Vol 27 (1980), no. 2, pp265–291.
- [T] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.* Vol. 63 (1981), pp159–179.
- [WY] M. Wakefield and S. Yuzvinsky, Derivations of an effective divisor on the complex projective line. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 359 (2007), pp4389–4403.
- [Y1] M. Yoshinaga, Characterization of a free arrangement and conjecture of Edelman and Reiner. *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, pp449–454.
- [Y2] M. Yoshinaga, Freeness of hyperplane arrangements and related topics. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse*, Vol. 23 (2014), no. 2, pp483–512.

# トーリックイデアルのグレブナー基底とその応用

大杉 英史\*

関西学院大学 理工学部 数理科学科, 2016年2月

## 1 グレブナー基底

グレブナー基底とは、多項式環のイデアルの生成系の中で特別な性質『多項式をグレブナー基底の元を使って割り算すると、余りが一意に定まる』を持つものである。可換代数、代数幾何に止まらず、離散幾何、統計学、暗号理論などへの応用があり、近年の計算機、および、アルゴリズム・ソフトウェアの発展に伴って広範な研究分野において活発に研究されている。きっと皆さんの研究分野にも何かしら関わりがあると思うので、グレブナー基底の定義だけでも眺めてみて欲しい。

体  $K$  上の  $n$  変数多項式環  $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$  の単項式全体を  $\mathcal{M}_n$  で表す。集合  $\mathcal{M}_n$  上の順序  $<$  が単項式順序であるとは、以下の3条件をみたすときにいう。

1.  $<$  は全順序である。すなわち、任意の2つの単項式は比較可能である。
2.  $1 \neq \forall u \in \mathcal{M}_n$  に対して、 $1 < u$ 。すなわち、すべての単項式の中で1は最小の単項式である。
3.  $u, v, w \in \mathcal{M}_n, u < v \Rightarrow uv < vw$ 。

これらの条件は、多項式の割り算と深く関連している。代表的な単項式順序として、辞書式順序、次数辞書式順序、(次数)逆辞書式順序が挙げられる。

**例 1.1** (辞書式順序  $(x_1 > \dots > x_n)$ )。2つの単項式を比較する際、まず、 $x_1$  に関して次数を比較して、大きい方が大きい。同じなら  $x_2$  に関して次数を比較して、大きい方が大きい。同じなら  $x_3$  に関して次数を比較して …。

単項式順序  $<$  を1つ固定する。多項式  $0 \neq f \in K[\mathbf{x}]$  に現れる単項式の中で  $<$  に関して最大のものを  $\text{in}_<(f)$  で表し、 $f$  の先頭単項式という。イデアル  $I \subset K[\mathbf{x}]$  に対して、 $I$  の元先頭単項式で生成されるイデアル  $\text{in}_<(I) := \langle \text{in}_<(f) \mid 0 \neq f \in I \rangle$  を  $I$  のイニシャルイデアルという。有限集合  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$  が  $<$  に関する  $I$  のグレブナー基底であるとは、 $\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(g_1), \dots, \text{in}_<(g_t) \rangle$  が成り立つときにいう。これは、『任意の  $0 \neq f \in I$  に対して、 $\text{in}_<(f)$  はある  $\text{in}_<(g_i)$  で割り切れる』という条件と同値である。また、『 $K[\mathbf{x}]$  の元を集合  $\mathcal{G}$  を使って割り算すると、余りが一意に定まる』とも同値であるが、多変数多項式の  $\mathcal{G}$  による割り算の定義は省略する。

イデアル  $I$  と単項式順序が与えられれば、そのグレブナー基底は必ず存在し、 $I$  を生成することが知られている。グレブナー基底は一意ではないが、以下のような特別なグレブナー基底を考えれば、一意に存在することが知られている。イデアル  $I \subset K[\mathbf{x}]$  のグレブナー基底  $\mathcal{G}$  が被約(簡約ともいう)であるとは、任意の  $g \in \mathcal{G}$  に対して、 $g$  はモニックであり、 $g$  に現れる任意の単項式が  $\{\text{in}_<(g') \mid g \neq g' \in \mathcal{G}\}$  の元で割り切れないときにいう。グレブナー基底の例を挙げよう。

\*ohsugi@kwansei.ac.jp

**例 1.2.** イデアル  $I = \langle x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7 \rangle \subset K[x_1, \dots, x_7]$  と辞書式順序  $\langle x_1 \rangle \cdots \langle x_7 \rangle$  に関して,  $\{x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7\}$  は  $I$  のグレブナー基底ではない. 実際,

$$x_5(x_1x_2 - x_3x_4) - x_2(x_1x_5 - x_6x_7) = x_2x_6x_7 - x_3x_4x_5 \in I$$

の先頭項  $x_2x_6x_7$  は  $\langle x_1x_2, x_1x_5 \rangle$  に属さない. 実は,  $\{x_1x_2 - x_3x_4, x_1x_5 - x_6x_7, x_2x_6x_7 - x_3x_4x_5\}$  は  $I$  の  $\langle$  に関する (被約) グレブナー基底となる.

生成系がグレブナー基底であるかどうかを判定する **Buchberger** 判定法や, 生成系からグレブナー基底を計算する **Buchberger** アルゴリズムにおいては, 上の例のような「先頭単項式の打ち消し合い」によって定義される  $S$ -多項式が鍵となる. グレブナー基底の最も基本的な応用は, 多項式連立方程式の変数消去を行う消去法 (消去定理) である ([J, 第 1 章] 参照). 辞書式順序ならば必ず消去法が適用できるが, 実際には, 辞書式順序のグレブナー基底計算は時間が掛かることが多いため, もう少し工夫が必要となる. このような重要な応用が存在することもあり, グレブナー基底は, Macaulay2, SINGULAR, CoCoA, Risa/Asir, Mathematica, Maple など多くの数式処理ソフトウェアに実装されている. ([J, 第 3 章] 参照.)

## 2 トーリックイデアル

トーリックイデアルとは, 有限個の格子点 (整数座標を持つ点) に付随するイデアルであり, 2 項式で生成されることが知られている. ここで, 2 項式とは,  $x_1x_2 - x_3^2$  のように次数の等しい 2 つの単項式の差として表される多項式をいう. 格子点の集合  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$  が  $\mathbb{R}^d$  の配置であるとは,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$  が存在して,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_1 = \dots = \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}_n = 1$  をみたすときにいう. 多くの応用でこの条件を必要とするので, 定義に含める慣習があるが, 教科書・分野によっては仮定しない場合もある. 負のべきも許す単項式をローラン単項式といい, それらの線形結合をローラン多項式という. 変数  $t_1, \dots, t_d$  に関するローラン多項式環を  $K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}] = K[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_d, t_d^{-1}]$  で表す. また,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$  のとき,  $\mathbf{t}^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}$  と表す. 配置  $A$  に対して,  $K$  上  $\{\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}\}$  で生成される半群環  $K[A] = K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}] \subset K[\mathbf{t}, \mathbf{t}^{-1}]$  を  $A$  のトーリック環という. 体  $K$  上の  $n$  変数多項式環  $K[\mathbf{x}] = K[x_1, \dots, x_n]$  に対して, 全射準同型  $\pi: K[\mathbf{x}] \rightarrow K[A]$  を  $\pi(x_i) = \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) で定義し, その核  $I_A := \ker \pi (\subset K[\mathbf{x}])$  を  $A$  のトーリックイデアルという. 一般に, トーリックイデアルは素イデアルであり,  $A$  を  $d \times n$  行列とみなせば, 以下のような 2 項式で生成されることが知られている:

$$\left\{ \prod_{b_i > 0} x_i^{b_i} - \prod_{b_j < 0} x_j^{-b_j} \in K[\mathbf{x}] \mid \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{0} \right\}$$

また, トーリックイデアルの被約グレブナー基底は 2 項式からなることが知られている. トーリックイデアルは可換環論においては古くから研究対象であったが, 1990 年代の 3 大発明

- (a) 整数計画問題への応用 ([CT])
- (b) 分割表のマルコフ連鎖モンテカルロ法による検定への応用 ([DS])
- (c) 頂点が格子点であるような凸多面体の三角形分割への応用 ([St])

を契機として, 様々な分野の研究者によって注目され, 研究が進められている. この原稿では, (b), (c) について簡単に紹介する. ((a) については, 第 10 回城崎新人セミナー報告集の鎌田英也著「グレブナー基底と整数計画問題」参照. また, 紹介しきれなかった内容については, [J] を参照.)

### 3 頂点が格子点であるような凸多面体の三角形分割への応用

集合  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$  (しばしば  $d \times n$  行列  $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$  と同一視) に対して,

$$\text{Conv}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{a}_i \in \mathbb{Q}^d \mid 0 \leq r_i \in \mathbb{Q}, \sum_{i=1}^n r_i = 1 \right\}$$

を  $A$  の凸閉包という. 集合  $P \subset \mathbb{Q}^d$  が整凸多面体であるとは,  $P = \text{Conv}(A)$  をみたす有限集合  $A \subset \mathbb{Z}^d$  が存在するときをいう.

例 3.1. 配置  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  に対して,  $\text{Conv}(A)$  は 3 次元空間に浮かぶ四角形.

整凸多面体  $P$  が単体であるとは,  $P$  の頂点数が  $1 + \dim P$  であるときにいう. 例えば, 線分, 三角形, 四面体は単体である. 配置  $A$  の被覆とは, 頂点が全て  $A$  の元であるような単体の集合  $\Delta$  で,  $\text{Conv}(A) = \bigcup_{F \in \Delta} F$  をみたすものをいう. 配置  $A$  の被覆  $\Delta$  が三角形分割であるとは,

1.  $F'$  が  $F \in \Delta$  の面ならば,  $F' \in \Delta$
2.  $F, F' \in \Delta$  ならば,  $F \cap F'$  は  $F$  の面, かつ,  $F'$  の面

が成り立つときにいう. 配置  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$  および  $K[\mathbf{x}]$  の単項式順序  $<$  に対して,

$$\Delta(\text{in}_<(I_A)) := \left\{ \text{Conv}(B) \mid B \subset A, \prod_{\mathbf{a}_i \in B} x_i \notin \sqrt{\text{in}_<(I_A)} \right\}$$

をイニシャル複体という. ( $\sqrt{\text{in}_<(I_A)}$  は  $\text{in}_<(I_A)$  の根基イデアル.) Sturmfels [St] は, イニシャル複体が Gelfand たちが定義した正則三角形分割と呼ばれる三角形分割と一致することを示した. 特に, 以下が成り立つ.

定理 3.2. イニシャル複体  $\Delta(\text{in}_<(I_A))$  は  $A$  の三角形分割である.

配置  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  に対して,  $\mathbb{Z}A := \{\sum_{i=1}^n z_i \mathbf{a}_i \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$  と定義する. 配置  $A$  の被覆  $\Delta$  に属する任意の極大単体  $\sigma$  の頂点集合  $B$  に対して, 指数  $[\mathbb{Z}A : \mathbb{Z}B]$  を  $\sigma$  の正規化体積という. 特に,  $\sigma$  の正規化体積が 1 であることと,  $\mathbb{Z}A = \mathbb{Z}B$  は同値である. 配置  $A$  の被覆 (三角形分割)  $\Delta$  が **unimodular** であるとは,  $\Delta$  に属する任意の極大単体  $\sigma$  の正規化体積が 1 であるときにいう. もし, unimodular な三角形分割が構成できれば, 極大単体の数を数えることで  $\text{Conv}(A)$  の正規化体積が計算できる. 以下が成り立つ [St].

定理 3.3.  $\Delta(\text{in}_<(I_A))$  が unimodular  $\iff \sqrt{\text{in}_<(I_A)} = \text{in}_<(I_A)$ .

また, unimodular な三角形分割の存在は,  $A$  に良い性質を保証することが知られている. 例えば, 以下のような性質がよく研究されている:

- (i)  $A$  は **unimodular** (任意の三角形分割は unimodular) ( $\iff \sqrt{\text{in}_<(I_A)} = \text{in}_<(I_A)$  for  $\forall <$ )
- (ii)  $A$  は **compressed** ( $\iff$  任意の逆辞書式順序  $<$  に対して,  $\sqrt{\text{in}_<(I_A)} = \text{in}_<(I_A)$ )
- (iii)  $A$  は unimodular な正則三角形分割を持つ ( $\iff \sqrt{\text{in}_<(I_A)} = \text{in}_<(I_A)$  for some  $<$ )
- (iv)  $A$  は unimodular な三角形分割を持つ

(v)  $A$  は unimodular な被覆を持つ

(vi)  $K[A]$  は 正規 ( $\Leftrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}A = \mathbb{Z}A \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}A$ )

一般に, (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (v)  $\Rightarrow$  (vi) が成り立つが, それぞれの逆は正しくない. 特に, 条件 (vi) は可換環論だけではなく, 次章で述べる代数統計の分野でも重要であり, その十分条件としてグレブナー基底に関連した条件 (i), (ii), (iii) がよく研究されている. ただし, 一般論で色々なことを証明するのはなかなか困難である. 有限グラフやマトロイドなど, 組合せ論的な対象から配置 (トーリックイデアル) を構成し, その配置がいつ上記の条件をみたすかをグラフやマトロイドの言葉で記述するような研究が盛んになされており, 有用な特徴付けを活用して重要な例も構成されている. 例えば [OH] では, グラフに付随する辺凸多面体で (iv) をみたすが (iii) をみたさないものを構成しているが, このような例は辺凸多面体以外では見つからない.

## 4 分割表のマルコフ連鎖モンテカルロ法による検定への応用

例えば, 以下の表 ([J, 第 4 章]) は  $5 \times 5$  の 2 元分割表である.

代数 \ 統計	5	4	3	2	1	計
5	2	1	1	0	0	4
4	8	3	3	0	0	14
3	0	2	1	1	1	5
2	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	0	1	1
計	10	6	5	2	3	26

このデータに関して, 代数と統計の成績に関連があるのかどうかを調べるため, 関連がないという仮説 (帰無仮説) を立て, 検定するという手法が取られる. 通常は, 検定統計量の漸近分布を利用するが, 例えば, この例のように 0 が多い表の場合, 漸近分布の当てはまりが良くないことがある. その場合, もとのデータと同じ行和, 列和を持つ表全体

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \left| \begin{array}{ccc|ccc} & & & 4 & & \\ & & & 14 & & \\ & & & 5 & & \\ & & & 2 & & \\ & & & 1 & & \\ \hline & 10 & 6 & 5 & 2 & 3 & 26 \end{array} \right. , 0 \leq t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

を考え,  $F$  に属するすべての表について, 統計量を計算し, もとのデータの統計量と比較する手法が取られる (Fisher の正確検定). ところが,  $F$  の元が列挙不可能なほど多いときにはこの方法も使えない. (この例の場合,  $\#F = 229,174$  である.) そのような場合には, マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いて,  $F$  上をランダムウォークして,  $F$  の元をサンプリングし, 統計量を計算することによって分析する. 例えば,  $\sum \alpha_i = \sum \beta_j$  をみたす  $\alpha_i, \beta_j$  に対して,

$$F = \left\{ T = (t_{ij}) \left| \begin{array}{ccc|ccc} & t_{11} & t_{12} & t_{13} & \alpha_1 & \\ & t_{21} & t_{22} & t_{23} & \alpha_2 & \\ \hline & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & \end{array} \right. , 0 \leq t_{ij} \in \mathbb{Z} \right\}$$

の任意の2元は  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  の元を足したり引いたりすることで  $F$  の元を経由して移り合えるので、これを用いて  $F$  上のランダムウォークを行う。このような  $M$  をマルコフ基底という。この例 ( $2 \times 3$  分割表) の場合、配置として以下のような行列を考えれば、 $I_A$  の生成系と、 $M$  が対応していることが見て取れる：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} + t_{12} + t_{13} \\ t_{21} + t_{22} + t_{23} \\ t_{11} + t_{21} \\ t_{12} + t_{22} \\ t_{13} + t_{23} \end{pmatrix}.$$

$$I_A = \langle x_1x_5 - x_2x_4, \quad x_1x_6 - x_3x_4, \quad x_2x_6 - x_3x_5 \rangle.$$

(注意：2元表の場合は、トーリックイデアルを持ち出さなくてもマルコフ基底は容易に分かる。) 一般に以下が成り立つ [DS].

**定理 4.1.** 検定を行う統計モデルに対応する行列  $A$  の核に属する有限個の整数行列からなる集合がマルコフ基底であることと、対応する2項式の集合が  $I_A$  の生成系をなすことは同値である。

よって、 $I_A$  の有限生成系を求めることができれば、マルコフ基底を構成することができる。例えば、簡単のため、各  $\mathbf{a}_i$  が非負整数ベクトルであるとする、 $J_A = \langle x_1 - \mathbf{t}^{\mathbf{a}_1}, \dots, x_n - \mathbf{t}^{\mathbf{a}_n} \rangle \subset K[\mathbf{x}, \mathbf{t}]$  に対して  $I_A = J_A \cap K[\mathbf{x}]$  が成り立つので消去法によって  $I_A$  の有限生成系が求まる。しかし、残念ながら多くの場合にこの方法は非実用的である。高次元の表に対しては、(いくつかのクラスを除いて)  $I_A$  の生成系は未解明であり、計算困難である。そのため、toric fiber 積 [Su] や、入れ子配置 [AHOT] など、大規模なトーリックイデアルを、いくつかの小規模なトーリックイデアルに分解するような理論の開発が試みられている。

## 参考文献

- [AHOT] S. Aoki, T. Hibi, H. Ohsugi and A. Takemura, Gröbner bases of nested configurations, *J. Algebra* **320** (2008), 2583–2593.
- [CT] P. Conti and C. Traverso, Buchberger algorithm and integer programming, in *Proceedings of AAECC-9 (New Orleans) Springer LNCS 539* (1991), 130–139.
- [DS] P. Diaconis and B. Sturmfels, Algebraic algorithms for sampling from conditional distributions, *Annals of Statistics* **26** (1998), 363–397.
- [J] JST CREST 日比チーム編, グレブナー道場, 共立出版, 2011.
- [OH] H. Ohsugi and T. Hibi, A normal  $(0, 1)$ -polytope none of whose regular triangulations is unimodular, *Discrete Comput. Geom.* **21** (1999), 201–204.
- [St] B. Sturmfels, Gröbner bases of toric varieties, *Tohoku Math. J.* **43** (1991), 249–261.
- [Su] S. Sullivant, Toric fiber products, *J. Algebra* **316** (2007), 560–577.

# 最適輸送理論とその周辺

高津 飛鳥\*

首都大学東京, 2016年2月

## 1 復習

講演では“物質をある場所から他の場所へ運ぶ費用を最小化”するための最適輸送理論とその周辺を紹介した. 特に最適輸送理論に起源を持つ Wasserstein 幾何-確率測度のなす空間上の距離の幾何-を取り扱った.

定義 1.1. 完備可分距離空間  $(X, d)$  に対し,  $\mathcal{P}_2(X)$  を  $X$  上の 2 次モーメントが有限なボレル確率測度のなす集合とする. すなわち

$$\mathcal{P}_2(X) := \left\{ \mu: X \text{ 上のボレル確率測度} \mid \text{ある } x_0 \in X \text{ が存在し } \int_X d(x_0, x)^2 d\mu(x) < \infty \right\}$$

である. また  $X$  上のボレル確率測度  $\mu, \nu$  に対し,  $X \times X$  上のボレル確率測度  $\pi$  が

$$\pi(B \times X) = \mu(B), \quad \pi(X \times B) = \nu(B), \quad \forall B \subset X: \text{ボレル集合}$$

を満たすとき  $\pi$  を  $\mu, \nu$  のカップリングと呼ぶ. さらに

$$W_2(\mu, \nu) := \inf_{\pi: \mu, \nu \text{ のカップリング}} \|d\|_{L^2(\pi)} = \inf_{\pi: \mu, \nu \text{ のカップリング}} \left( \int_{X \times X} d(x, y)^2 d\pi(x, y) \right)^{\frac{1}{2}}$$

を  $\mu, \nu$  の Wasserstein 距離, 下限を達成するカップリングを最適カップリングと呼ぶ.

注記 1.2. 最適カップリングは一意的とは限らないが常に存在する ([4, Theorem 4.1]). そして  $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$  もまた完備可分距離空間になり,  $(X, d)$  の最短線と  $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$  の最短線は密接に関係する ([4, Theorem 6.18]). 例えば  $W_2$ -最短測地線  $\{\mu_t\}_{t \in [0, 1]}$  を考え,  $A_0, A_1$  をそれぞれ  $\mu_0, \mu_1$  の台とする. すると任意の  $t \in [0, 1]$  に対し

$$\mu_t(\{\gamma_t \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ は最短測地線で } \gamma_0 \in A_0, \gamma_1 \in A_1 \text{ を満たす}\}) = 1$$

が成立つ ([4, Theorem 7.21]). これは標語的には“確率測度のなす空間内の測地線は測地線のなす空間上の確率測度”であることを意味する.

そしてこの距離構造を用いたリッチ曲率の下限・次元の上限の特徴付けが Lott–Villani[1] や Sturm[3] によって与えられた. この二条件は任意の最短線が分岐しない距離空間に対しては同値であり, ここでは Sturm による特徴付けを紹介する.

---

\*asuka@tmu.ac.jp

そのために以下, 距離空間  $(X, d)$  とその上のボレル測度  $\omega$  に対し

$$\mathcal{P}_2(X, \omega) := \{\mu \in \mathcal{P}_2(X) \mid \mu \text{ は } \omega \text{ に絶対連続}\}$$

と定義する. さらに  $N \in (1, \infty)$  に対し,  $\mathcal{P}_2(X, \omega)$  上の汎関数  $S_{N, \omega}$  を

$$S_{N, \omega}(\mu) := - \int_X \rho(x)^{1-\frac{1}{N}} d\omega(x) = - \int_X \rho(x)^{-\frac{1}{N}} d\mu(x), \quad \forall \mu = \rho\omega \in \mathcal{P}_2(X, \omega)$$

と定める. (これは 2.2 節で定義される講演中に用いた汎関数  $\tilde{S}_{N, \omega}$  とは異なるが, 以下で考える汎関数の凸性の議論に関しては同値な対象となる.) さらに  $K \in \mathbb{R}, N \in (1, \infty)$  と  $t \in (0, 1)$  に対し

$$\beta_{K, N}^t(\theta) := \begin{cases} \infty & \text{if } K\theta^2 \geq (N-1)\pi^2, \\ \left( \frac{\sin(t\theta\sqrt{K/(N-1)})}{t \sin(\theta\sqrt{K/(N-1)})} \right)^{N-1} & \text{if } 0 < K\theta^2 < (N-1)\pi^2, \\ 1 & \text{if } K\theta^2 = 0, \\ \left( \frac{\sinh(t\theta\sqrt{-K/(N-1)})}{t \sinh(\theta\sqrt{-K/(N-1)})} \right)^{N-1} & \text{if } K\theta^2 < 0 \end{cases}$$

と定める. これは空間形のヤコビ方程式に関係する量である ([4, Definition 14.19] 参照). そして任意の  $\mu_0 = \rho_0\omega, \mu_1 = \rho_1\omega \in \mathcal{P}_2(M, \omega)$  に対し, ある  $\mu_0, \mu_1$  の最適カップリング  $\pi$  と  $\mu_0, \mu_1$  を結ぶ  $\mathcal{P}_2(X, \omega)$  に横たわる  $W_2$ -最短測地線  $\{\mu_t\}_{t \in [0, 1]}$  が存在し

$$S_{N, \omega}(\mu_t) \leq - \int_{X \times X} \left[ (1-t) \left( \frac{\rho_0(x)}{\beta_{K, N}^{1-t}(d(x, y))} \right)^{-\frac{1}{N}} + t \left( \frac{\rho_1(y)}{\beta_{K, N}^t(d(x, y))} \right)^{-\frac{1}{N}} \right] d\pi(x, y) \quad (1)$$

が任意の  $t \in (0, 1)$  に対し成立つとき,  $(X, d, \omega)$  は条件  $\text{CD}(K, N)$  を満たすと言う.

**定理 1.3.** ([3, Theorem 1.7]) 完備連結リーマン多様体  $(M, g)$  と  $K \in \mathbb{R}, N \in (1, \infty)$  を考える. このとき  $M$  のリッチ曲率が  $K$  以上かつ次元が  $N$  以下であることと,  $(M, d_g, \text{vol}_g)$  が条件  $\text{CD}(K, N)$  を満たすことは同値である. ここで  $d_g$  と  $\text{vol}_g$  はそれぞれ  $(M, g)$  の距離関数と体積測度である.

**注記 1.4.** 条件  $\text{CD}(K, N)$  ではある一つの最適カップリングと  $W_2$ -最短測地線について考察したが, 任意の  $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(M, \text{vol}_g)$  に対しその最適カップリングとそれらを結ぶ  $W_2$ -最短測地線  $\{\mu_t\}_{t \in [0, 1]}$  は一意的である ([4, Corollaries 9.3, 7.23]). さらにこの  $W_2$ -最短測地線は  $\mathcal{P}_2(M, \text{vol}_g)$  内に横たわる ([4, Theorem 8.7]). よって  $\mathcal{P}_2(M, \text{vol}_g)$  は  $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$  の凸集合である.

このようにリーマン多様体のリッチ曲率の下限・次元の上限は条件  $\text{CD}(K, N)$  で特徴付けられ,  $\text{CD}(K, N)$  は曲率次元条件 (Curvature–Dimension condition) と呼ばれる. そして条件  $\text{CD}(K, N)$  の定義には微分構造を必要としないので, 任意の最短線が分岐しない測度距離空間  $(X, d, \omega)$  に対しても論じることができる<sup>1</sup>. ここで測度距離空間とは任意の二点を最短線で結ぶことができる完備可分距離空間  $(X, d)$  とその上の  $\sigma$ -有限なボレル測度  $\omega$  のなす三組  $(X, d, \omega)$  のことである. さらに  $\text{CD}(K, N)$  を満たす測度距離空間はリッチ曲率の下限が  $K$ ・次元の上限が  $N$  であるリーマン多様体のように振舞うことが分かり, 測度距離空間上の幾何解析は著しく進展した.

また講演では  $K = 0$  の場合のみを紹介した. このとき  $\beta_{0, N}^t \equiv 1$  なので, (1) は

$$S_{N, \omega}(\mu_t) \leq - \int_{X \times X} \left[ (1-t)\rho_0(x)^{-\frac{1}{N}} + t\rho_1(y)^{-\frac{1}{N}} \right] d\pi(x, y) = (1-t)S_{N, \omega}(\mu_0) + tS_{N, \omega}(\mu_1)$$

<sup>1</sup>最短線が分岐する測度距離空間に対しては Lott–Villani [1] による条件を考えるが, 煩雑になるためここでは割愛する.

と  $S_{N,\omega}$  の  $W_2$ -最短測地線に沿った凸性になる. ここで等式は  $\pi$  が  $\mu_0, \mu_1$  のカップリングであることから従う. そして  $CD(0, N)$  を満たす測度距離空間がリッチ曲率の下限が  $0$ ・次元の上限が  $N$  であるリーマン多様体のように振舞う例として, 以下の *Brunn–Minkowski* 不等式を紹介した.

**定理 1.5.** ([3, Proposition 2.1]) 測度距離空間  $(X, d, \omega)$  は  $CD(0, N)$  を満たすとす. このとき任意の正測度を持つコンパクト集合  $A_0, A_1 \subset X$  と  $t \in (0, 1)$  に対し,

$$A_t := \{\gamma_t \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ は最短測地線で } \gamma_0 \in A_0, \gamma_1 \in A_1 \text{ を満たす}\}$$

と定めれば,

$$\omega(A_t)^{\frac{1}{N}} \geq (1-t)\omega(A_0)^{\frac{1}{N}} + t\omega(A_1)^{\frac{1}{N}}$$

が成立つ.

## 2 宿題の解答

宿題は「定理 1.5 を示せ」と「 $N \rightarrow \infty$  のとき (定理 1.3, 1.5 は) どうなるかを観察せよ」であった.

### 2.1 定理 1.5 の証明

ここでは [3, Proposition 2.1] の証明と同様に示す.  $i = 0, 1$  に対し  $A_i$  はコンパクトで  $\omega$  は  $\sigma$ -有限なので  $\omega(A_i) < \infty$  である. そこで

$$1_{A_i}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A_i, \\ 0 & \text{if } x \notin A_i, \end{cases} \quad \mu_i := \frac{1_{A_i}}{\omega(A_i)}\omega$$

とおけば,  $A_i$  のコンパクト性より  $\mu_i \in \mathcal{P}_2(X, \omega)$  である. またある  $\mu_0, \mu_1$  の最適カップリング  $\pi$  と  $\mu_0, \mu_1$  を結ぶ  $\mathcal{P}_2(X, \omega)$  に横たわる  $W_2$ -最短測地線  $\{\mu_t\}_{t \in [0, 1]}$  が存在し

$$S_{N,\omega}(\mu_t) \leq (1-t)S_{N,\omega}(\mu_0) + tS_{N,\omega}(\mu_1) \quad (2)$$

が成立つ. ここで

$$S_{N,\omega}(\mu_i) = - \int_X \rho_i(x)^{-\frac{1}{N}} d\mu(x) = -\omega(A_i)^{\frac{1}{N}}$$

であり, 注記 1.2 より  $\mu_t(A_t) = 1$  なので

$$S_{N,\omega}(\mu_i) = - \int_{A_t} \rho_t(x)^{-\frac{1}{N}} d\mu_t(x) = - \int_{A_t} \rho_t(x)^{1-\frac{1}{N}} d\omega(x)$$

となる. そして (2) より  $\omega(A_t) > 0$  が従い,  $\omega(A_t) = \infty$  ならば主張は正しい. そこで  $\omega(A_t) < \infty$  を仮定すると, Jensen の不等式 から

$$S_{N,\omega}(\mu_i) = -\omega(A_t) \int_{A_t} \rho_t(x)^{1-\frac{1}{N}} \frac{d\omega(x)}{\omega(A_t)} \geq -\omega(A_t) \left( \int_{A_t} \rho_t(x) \frac{d\omega(x)}{\omega(A_t)} \right)^{1-\frac{1}{N}} = -\omega(A_t)^{\frac{1}{N}}$$

が従う. これらの式を整理して  $\omega(A_t)^{\frac{1}{N}} \geq (1-t)\omega(A_0)^{\frac{1}{N}} + t\omega(A_1)^{\frac{1}{N}}$  を得る.

注記 2.1. 一般の  $CD(K, N)$  を満たす測度距離空間に対する *Brunn–Minkowski* 不等式は例えば [3, Proposition 2.1][4, Theorem 30.7] を参照にして頂きたい. この曲がった空間に対する *Brunn–Minkowski* 不等式はリーマン多様体に対してさえも最適輸送を用いることで初めて示された. そしてこの *Brunn–Minkowski* 不等式からリッチ曲率の下限が  $K$ ・元の上限が  $N$  であるリーマン多様体満たす *Bishop–Gromov* 不等式と同様の不等式が導かれる ([3, Theorem 2.3][4, Theorem 30.11] 参照).

## 2.2 $N \rightarrow \infty$ でどうなるか?

定理 1.3 において  $N \rightarrow \infty$  とすれば次元に関する制約がなくなり, 完備連結リーマン多様体に対しそのリッチ曲率が  $K$  以上であることがある条件  $\text{CD}(K, \infty)$  を満たすことに同値だと予測される. そして  $\text{CD}(K, N)$  は汎関数  $S_{N, \omega}$  の不等式 (1) で特徴付けられたので,  $\text{CD}(K, \infty)$  もある汎関数の不等式で特徴付けられると予想される. ここで  $N \rightarrow \infty$  のとき  $S_{N, \omega}$  は一般に意味のある量に収束しないが,  $S_{N, \omega}$  に適切なスケールを施した汎関数  $\tilde{S}_{N, \omega}(\mu) := N(S_{N, \omega}(\mu) + 1)$  は収束して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{S}_{N, \omega}(\mu) = S_\omega(\mu) := \int_X \rho(x) \log \rho(x) d\omega(x), \quad \forall \mu = \rho\omega \in \mathcal{P}_2(X, \omega)$$

となる. なぜなら正数上の関数

$$s_N(r) := -N(r^{-\frac{1}{N}} - 1)$$

を用いれば

$$\tilde{S}_{N, \omega}(\mu) = \int_X \rho(x) s_N(\rho(x)) d\omega(x) = \int_X s_N(\rho(x)) d\mu(x), \quad \forall \mu = \rho\omega \in \mathcal{P}_2(X, \omega)$$

と表現され, そして  $\tau < N$  に対し定義される  $s_N$  の逆関数  $\sigma_N(\tau)$  は

$$\sigma_N(\tau) = \left(1 - \frac{\tau}{N}\right)^{-N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^\tau$$

という性質を持ち,  $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(t) = \log t$  となるからである. また (1) は

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{N, \omega}(\mu_t) &\leq -N \int_{X \times X} \left[ (1-t) \left( \frac{\rho_0(x)}{\beta_{K, N}^{1-t}(d(x, y))} \right)^{-\frac{1}{N}} + t \left( \frac{\rho_1(y)}{\beta_{K, N}^t(d(x, y))} \right)^{-\frac{1}{N}} \right] d\pi(x, y) + N \\ &= \int_{X \times X} \left[ (1-t) s_N \left( \frac{\rho_0(x)}{\beta_{K, N}^{1-t}(d(x, y))} \right) + t s_N \left( \frac{\rho_1(y)}{\beta_{K, N}^t(d(x, y))} \right) \right] d\pi(x, y) \end{aligned}$$

と同値である. さらに  $0 < K\theta^2 < (N-1)\pi^2$  ならば  $\sin$  のテイラー展開を用いることで

$$\beta_{K, N}^t(\theta) = \left( \frac{\sin(t\theta\sqrt{K/(N-1)})}{t \sin(\theta\sqrt{K/(N-1)})} \right)^{N-1} = \left( 1 + \frac{K(1-t^2)\theta^2}{3!(N-1)} + o\left(\frac{1}{N-1}\right) \right)^{N-1} \text{ as } N \rightarrow \infty$$

を得るので,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \beta_{K, N}^t(\theta) = \exp(K(1-t^2)\theta^2/6)$  となる. 同様に一般の  $K \in \mathbb{R}, N \in (1, \infty)$  と  $t \in (0, 1]$  そして  $\theta \in \mathbb{R}$  に対しても

$$\beta_{K, \infty}^t(\theta) := \lim_{N \rightarrow \infty} \beta_{K, N}^t(\theta) = \exp\left(\frac{K}{6}(1-t^2)\theta^2\right)$$

を得る. ここで  $\pi(\Omega) = 1$  となる適切な集合  $\Omega \subset X \times X$  上で  $N \rightarrow \infty$  としたときに  $\beta_{K, N}^t(d(x, y))$  の収束が  $s_N$  の収束に較べて一様に速ければ,

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{X \times X} \left[ (1-t) s_N \left( \frac{\rho_0(x)}{\beta_{K, N}^{1-t}(d(x, y))} \right) + t s_N \left( \frac{\rho_1(y)}{\beta_{K, N}^t(d(x, y))} \right) \right] d\pi(x, y) \\ &= \int_{X \times X} \left[ (1-t) \log \left( \frac{\rho_0(x)}{\beta_{K, \infty}^{1-t}(d(x, y))} \right) + t \log \left( \frac{\rho_1(y)}{\beta_{K, \infty}^t(d(x, y))} \right) \right] d\pi(x, y) \\ &= (1-t) \int_{X \times X} \log(\rho_0(x)) d\pi(x, y) + t \int_{X \times X} \log(\rho_1(y)) d\pi(x, y) \\ &\quad - \int_{X \times X} \left[ (1-t) \log(\beta_{K, \infty}^{1-t}(d(x, y))) + t \log(\beta_{K, \infty}^t(d(x, y))) \right] d\pi(x, y) \\ &= (1-t) S_\omega(\mu_0) + t S_\omega(\mu_1) - \frac{K}{2} t(1-t) \int_{X \times X} d(x, y)^2 d\pi(x, y) \end{aligned}$$

となる. さらに  $\pi$  は最適なので

$$\int_{X \times X} d(x, y)^2 d\pi(x, y) = W_2(\mu_0, \mu_1)^2$$

である. 以上を鑑みて (任意の最短線が分岐しない) 測度距離空間  $(X, d, \omega)$  が条件  $\text{CD}(K, \infty)$  を満たすことを, 任意の  $\mu_0 = \rho_0 \omega, \mu_1 = \rho_1 \omega \in \mathcal{P}_2(M, \omega)$  に対し, ある  $\mu_0, \mu_1$  の最適カップリング  $\pi$  と  $\mu_0, \mu_1$  を結ぶ  $\mathcal{P}_2(X, \omega)$  に横たわる  $W_2$ -最短測地線  $\{\mu_t\}_{t \in [0,1]}$  が存在し

$$S_\omega(\mu_t) \leq (1-t)S_{N,\omega}(\mu_0) + tS_{N,\omega}(\mu_1) - \frac{K}{2}t(1-t)W_2(\mu_0, \mu_1)^2$$

が任意の  $t \in (0, 1)$  に対し成立つこと, と定義することは妥当である. そして実際に次が成立つ.

**定理 2.2.** ([2, Theorem 1.1]) 完備連結リーマン多様体  $(M, g)$  と  $K \in \mathbb{R}$  を考える. このとき  $M$  のリッチ曲率が  $K$  以上であることと,  $(M, d_g, \text{vol}_g)$  が条件  $\text{CD}(K, \infty)$  を満たすことは同値である.

**注記 2.3.** (1)  $\text{CD}(1, \infty)$  を満たす測度距離空間の最もたる例は, ユークリッド空間とその上の標準ガウス測度がなす測度距離空間である. ここでユークリッド空間の次元は任意である.

(2)  $\mathbb{R}^n$  上の滑らかな関数  $f$  と  $K \in \mathbb{R}$  に対し,  $f$  のヘッセ行列の固有値が下から一様に  $K$  で抑えられること (このことを  $\text{Hess} f \geq K$  と書く) と, 任意の  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  と  $t \in (0, 1)$  に対し

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) - \frac{K}{2}t(1-t)|x_0 - x_1|^2$$

が成立つことは同値である ([4, Proposition 16.2] 参照). よって測度距離空間  $(X, d, \omega)$  に対し, もし  $(\mathcal{P}_2(X, \omega), W_2)$  が可微分構造を許容し汎関数  $S_\omega$  が滑らかならば,  $(X, d, \omega)$  が条件  $\text{CD}(K, \infty)$  を満たすことは  $\text{Hess} S_\omega \geq K$  と同値である. よって  $K = 0$  のとき, 上述の議論は

$$\begin{array}{ccc} (X, d, \omega) \text{ が条件 } \text{CD}(0, N) \text{ を満たす} & \iff & \text{Hess} \tilde{S}_{N,\omega} \geq 0 \\ N \rightarrow \infty \downarrow & & N \rightarrow \infty \downarrow & \text{このようにみなせる.} \\ (X, d, \omega) \text{ が条件 } \text{CD}(0, \infty) \text{ を満たす} & \iff & \text{Hess} S_\omega \geq 0 \end{array}$$

また 2.1 節にある定理 1.5 の証明において  $S_{N,\omega}$  を  $S_\omega$  に置き換え同様の議論を行う, あるいは

$$\begin{aligned} \omega(A_t)^{\frac{1}{N}} &\geq (1-t)\omega(A_0)^{\frac{1}{N}} + t\omega(A_1)^{\frac{1}{N}} \\ \iff N(\omega(A_t)^{\frac{1}{N}} - 1) &\geq (1-t)N(\omega(A_0)^{\frac{1}{N}} - 1) + tN(\omega(A_1)^{\frac{1}{N}} - 1) \end{aligned}$$

と変形して  $N \rightarrow \infty$  とすることで,  $\text{CD}(0, \infty)$  を満たす測度距離空間  $(X, d, \omega)$  上の Brunn-Minkowski 不等式は

$$\log \omega(A_t) \geq (1-t) \log \omega(A_0) + t \log \omega(A_1)$$

と定式化されることも分かる.

## 参考文献

- [1] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, *Ann. of Math.* **169** (2009), 903–991.
- [2] M.-K. von Renesse and K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* **58** (2005), 923–940.
- [3] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Math.* **196** (2006), 133–177.
- [4] C. Villani, *Optimal transport, old and new*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

# 線形常微分方程式とルート系

山川 大亮 \*

東京工業大学 大学院理工学研究科, 2016 年 2 月

次のような形で表される連立線形常微分方程式をフックス系と呼ぶ:

$$\frac{dv}{dx} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} v.$$

ここで独立変数  $x$  は複素変数, 未知関数  $v$  はある有限次元複素ベクトル空間  $V$  に値を取る  $x$  の関数で,  $A_i$  達は  $x$  に依らない  $V$  の線形変換,  $t_1, \dots, t_m$  は  $\mathbb{C}$  内の相異なる  $m$  点である. 本稿は, フックス系に対する (加法版) Katz の定理と <sup>えびら</sup> 籠のワイル群との関係について紹介した第 13 回城崎新人セミナーにおける講演内容をまとめたものである.

## 1 中間畳み込みと Katz の定理

この節で, [8] における Katz の理論を基に Dettweiler–Reiter が導入した加法的中間畳み込みと呼ばれるものを定義し, それを用いて加法版 Katz の定理を紹介する.

以降, 有限次元複素ベクトル空間  $V$  と有限個の線形変換  $A_1, \dots, A_m \in \text{End}(V)$  からなる組  $(V, \mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A} := (A_i)_{i=1}^m$  を留数データと呼ぶ事にする. 留数データ  $(V, \mathbf{A})$  及び  $\mathbb{C}$  内の相異なる  $m$  点  $t_1, \dots, t_m$  が与えられるとそれに付随してフックス系  $dv/dx = \sum_{i=1}^m A_i(x - t_i)^{-1}v$  が定まる事に注意しておこう.

**定義 1.1.** 留数データ  $(V, \mathbf{A})$  及び複素数  $\lambda$  に対し, 次のようにして定まる留数データ  $(V', \mathbf{A}')$  を  $mc_\lambda(V, \mathbf{A})$  と書いて  $(V, \mathbf{A})$  の  $\lambda$  による (加法的) 中間畳み込みと呼ぶ:

1.  $W = \bigoplus_{i=1}^m (V / \text{Ker } A_i)$  とおき, 直和成分  $V / \text{Ker } A_i$  に対応する  $W$  の射影子を  $E_i$  とおく.
2.  $Q: V \rightarrow W$  を  $v \mapsto (v + \text{Ker } A_i)_{i=1}^m$  と定め,  $P: W \rightarrow V$  を  $(v_i + \text{Ker } A_i)_{i=1}^m \mapsto \sum_{i=1}^m A_i v_i$  と定める. (このとき  $PE_iQ = A_i$  が成り立つ事に注意しよう.)
3.  $V' = W / \text{Ker}(QP + \lambda \text{Id}_W)$  とおき,  $W$  から  $V'$  への自然な全射を  $P'$ ,  $QP + \lambda \text{Id}_W$  が誘導する単射  $V' \rightarrow W$  を  $Q'$  とおく. (従って  $Q'P' = QP + \lambda \text{Id}_W$  が成り立つ.)
4.  $\mathbf{A}' = (A'_i)_{i=1}^m$  を  $A'_i = P'E_iQ'$  と定める.

このように中間畳み込みは留数データの純粋に代数的な変換であるが, フックス系の変換と考えたとき解析的な意味を持つ. これについて少し説明しよう.

---

\*yamakawa@math.titech.ac.jp

$t_1, \dots, t_m$  を  $\mathbb{C}$  内の相異なる  $m$  点とし, 留数データ  $(V, \mathbf{A})$  にフックス系

$$\frac{dv}{dx} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} v$$

を対応させよう. このとき定義の記号を用いて  $T = \sum_{i=1}^m t_i E_i \in \text{End}(W)$  とおくと,

$$\sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} = \sum_{i=1}^m P(x - t_i)^{-1} E_i Q = P(x \text{Id}_W - T)^{-1} Q$$

が成り立つ. そこで  $\partial_x = d/dx$  において  $V \oplus W$  に値を取る関数に対する方程式

$$\begin{pmatrix} \partial_x \text{Id}_V & -P \\ Q & -x \text{Id}_W + T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を考えると, これは元のフックス系と本質的に同じ方程式である. 実際, フックス系の解  $v$  に対し  $w = (x \text{Id}_W - T)^{-1} Qv$  とおけば  $v, w$  は上の方程式の解となり, 逆に関しても方程式の第 2 行から  $Qv = (x \text{Id}_W - T)w$ , すなわち  $w = (x \text{Id}_W - T)^{-1} Qv$  を第 1 行に代入する事でフックス系

$$\partial_x v = Pw = P(x \text{Id}_W - T)^{-1} Qv = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x - t_i} v$$

が得られる. さて書き換えた方程式に対し, 形式的なラプラス変換を施してみよう. すなわち新しい独立変数  $y$  を導入し,  $\partial_x$  を  $y$  に,  $x$  を  $-\partial_y$  に置き換える. すると新しい方程式

$$\begin{pmatrix} y \text{Id}_V & -P \\ Q & \partial_y \text{Id}_W + T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{v} \\ \check{w} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が得られる. これから  $\check{v}$  を消去すると

$$\partial_y \check{w} = -T\check{w} - Q\check{v} = -\left(T + \frac{QP}{y}\right) \check{w}$$

となる.

一方,  $mc_\lambda(V, \mathbf{A}) = (V', \mathbf{A}')$  に対しても

$$\sum_{i=1}^m \frac{A'_i}{x - t_i} = \sum_{i=1}^m P'(x - t_i)^{-1} E_i Q' = P'(x \text{Id}_W - T)^{-1} Q'$$

が成り立つので, これも

$$\begin{pmatrix} \partial_x \text{Id}_{V'} & -P' \\ Q' & -x \text{Id}_W + T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と書き換える事ができる. 先と同様, ラプラス変換を施して未知関数の片方を消去する事で方程式

$$\partial_y \check{w}' = -\left(T + \frac{Q'P'}{y}\right) \check{w}'$$

を得る.  $Q'P' = QP + \lambda \text{Id}_W$  であるから,  $\check{w}' = y^{-\lambda} \check{w}$  によって二つの微分方程式が移り合う事が分かる.

まとめると,  $(V, \mathbf{A})$  と  $mc_\lambda(V, \mathbf{A})$  は, 両者のある種のラプラス変換がべき関数をかける操作によって結びつくような関係にある. これが「畳み込み」と呼ばれる所以である.

加法版 Katz の定理は、ある特別なクラスの留数データに対し、中間畳み込みを用いてその下部ベクトル空間の次元を簡約するアルゴリズムを与える。

留数データ  $(V, \mathbf{A})$  に対し  $A_0 = -\sum_{i=1}^m A_i \in \text{End}(V)$  とおく。留数定理から

$$A_0 = \text{res}_{x=\infty} \left( \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{x-t_i} dx \right)$$

が成り立つ事に注意しよう。また  $A \in \text{End}(V)$  に対し  $\text{ad}_A: \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$  を  $\text{ad}_A(X) = AX - XA$  と定める。

**定義 1.2.** (1) 留数データ  $(V, \mathbf{A})$  が既約であるとは、 $A_1, \dots, A_m$  で保たれる  $V$  の部分ベクトル空間が  $\{0\}, V$  のみである事をいう。

(2) 既約留数データ  $(V, \mathbf{A})$  は、等式

$$\sum_{i=0}^m \text{rank ad}_{A_i} = 2(\dim V)^2 - 2$$

が成り立つとき剛性を持つという。

何故上の等式が成り立つとき「剛性を持つ」というのかは次の事実が教えてくれる：

**定理 1.3.** (1) 任意の  $n$  次正方行列  $A \in M_n(\mathbb{C})$  に対し、その共役類  $\mathcal{O}$  は  $M_n(\mathbb{C})$  の複素部分多様体で次元は  $\text{rank ad}_A$  に等しい。

(2)  $M_n(\mathbb{C})$  の共役類  $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m$  に対し、

$$\mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_m) := \left\{ (A_i)_{i=0}^m \in \prod_{i=0}^m \mathcal{O}_i \mid \sum_{i=0}^m A_i = 0, (\mathbb{C}^n, (A_i)_{i=1}^m) \text{ は既約} \right\} / \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

は空でなければ連結な複素多様体の構造を持ち、次元は  $\sum_{i=0}^m \text{rank ad}_{A_i} - 2n^2 + 2$  に等しい。ここで  $A_i$  は  $\mathcal{O}_i$  の任意の元である。

$\mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_m)$  を留数多様体と呼ぶ。

**補足 1.4.** (1) 定理 (1) は代数群の作用に関する一般的事実から従う。

(2)  $\mathcal{M}$  が複素多様体の構造を持つ事は、シンプレクティック幾何学におけるハミルトン簡約の理論と、複素リー群の固有作用に関するスライス定理を用いて示す事ができる。ハミルトン簡約やスライス定理に関しては例えば [5] を参照されたい。

(3)  $\mathcal{M}$  が空でないための  $\mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_m$  に対する必要十分条件を求める問題は加法的 *Deligne-Simpson 問題* と呼ばれている。これは  $\mathcal{M}$  の連結性と併せて Crawley-Boevey によって [2, 3] において解かれた。

中間畳み込みは留数多様体の間の写像として次のような性質を持つ：

**定理 1.5.**  $mc_\lambda$  は留数多様体の間の双正則写像

$$\mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_m) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(n'; \mathcal{O}'_0, \dots, \mathcal{O}'_m)$$

を誘導する。また双正則写像として  $mc_\lambda \circ mc_\mu = mc_{\lambda+\mu}$ ,  $mc_0 = \text{Id}$  を満たす。

留数データ  $(V, \mathbf{A})$  及び複素数の組  $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^m$  に対し

$$\text{add}_\lambda(V, \mathbf{A}) = (V, (A_i + \lambda_i \text{Id}_V)_{i=1}^m)$$

とおく。

定理 1.6 (加法版 Katz の定理 [4]).  $(V, \mathbf{A})$  を剛性を持つ既約留数データとし,  $\dim V > 1, A_0 = 0$  と仮定する. 各  $A_i$  の固有値  $\lambda_i$  で固有空間の次元が最も大きいものを取り,

$$\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i, \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^m, \quad (V', \mathbf{A}') = (\text{add}_{-\lambda} \circ \text{mc}_{\lambda} \circ \text{add}_{-\lambda})(V, \mathbf{A})$$

とおくと,  $\dim V' < \dim V, A'_0 = 0$  が成り立つ.

もし  $\dim V' > 1$  ならば,  $(V', \mathbf{A}')$  に更に定理を適用する事ができる. このようにして, 剛性を持つ既約留数データは行列のスカラーシフトと中間畳み込みを有限回繰り返す事で  $\dim V = 1$  とする事ができる. 中間畳み込みは未知関数のある種の畳み込みと関係するため, このアルゴリズムによって剛性を持つ既約フックス系の解の積分表示を得る. 例えば [6] を参照されたい.

## 2 中間畳み込みと鏡映

定義 2.1. 有限集合  $Q_0, Q_1$  と写像  $s, t: Q_1 \rightarrow Q_0$  からなる四つ組  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  を <sup>えびら</sup> 籠 (有向グラフ) と呼ぶ.  $Q_0$  の元を頂点,  $Q_1$  の元を矢と呼び,  $a \in Q_1$  に対し  $s(a)$  を  $a$  の始点,  $t(a)$  を  $a$  の終点と呼ぶ.

以降籠はループを持たない, すなわち任意の  $a \in Q_1$  に対し  $s(a) \neq t(a)$  を満たすものしか考えない.

格子  $\mathbb{Z}^{Q_0} = \bigoplus_{p \in Q_0} \mathbb{Z}e_p$  上の対称双線形形式

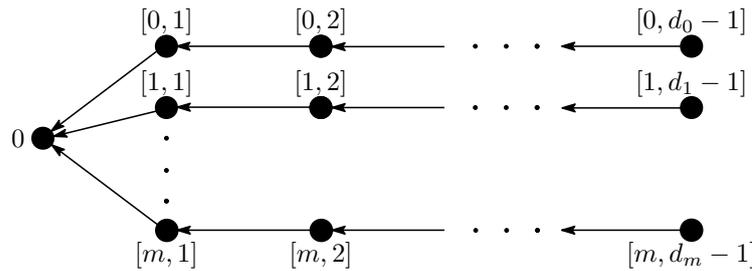
$$(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 2 \sum_{p \in Q_0} n_p m_p - \sum_{a \in Q_1} (n_{s(a)} m_{t(a)} + n_{t(a)} m_{s(a)})$$

に関する  $e_p$  の鏡映

$$s_p: \mathbb{Z}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{Z}^{Q_0}; \quad \mathbf{n} \mapsto \mathbf{n} - (\mathbf{n}, e_p)e_p$$

が生成する群  $W := \langle s_p \mid p \in Q_0 \rangle \subset \text{Aut}(\mathbb{Z}^{Q_0})$  をワイル群と呼ぶ.

留数多様体を定めるデータ  $(n; \mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_m)$  が与えられたとき, 各  $\mathcal{O}_i$  の最小多項式の次数を  $d_i$  として次のような星形籠  $Q$  を考える.



$\mathcal{O}_i$  の最小多項式の根を重複度込みで  $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,d_i}$  と並べ,  $A_i \in \mathcal{O}_i$  を任意に取って  $\mathbf{n} = (n_p)_{p \in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$  を

$$n_0 = n, \quad n_{[i,j]} = \text{rank}(A_i - \lambda_{i,1} I_n) \cdots (A_i - \lambda_{i,j} I_n)$$

と定める. すると  $\dim \mathcal{M}(n; \mathcal{O}_0, \dots, \mathcal{O}_m) = 2 - (\mathbf{n}, \mathbf{n})$  が成り立つ事を確かめられる.

また  $\zeta = (\zeta_p)_{p \in Q_0} \in \mathbb{C}^{Q_0}$  を

$$\zeta_0 = - \sum_{i=0}^m \lambda_{i,1}, \quad \zeta_{[i,j]} = \lambda_{i,j} - \lambda_{i,j+1}$$

と定める.

**定理 2.2.** 留数多様体を定めるデータ  $(n; \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m)$ ,  $(n'; \mathcal{O}'_1, \dots, \mathcal{O}'_m)$  が二つ与えられたとし, 上記の方法で各々に  $(Q, \mathbf{n}, \zeta)$ ,  $(Q', \mathbf{n}', \zeta')$  が付随しているとする.  $Q, Q'$  を含む脚が  $m$  本の星形筋  $\tilde{Q}$  を取り, 自明な方法で  $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^{\tilde{Q}_0}$ ,  $\zeta, \zeta' \in \mathbb{C}^{\tilde{Q}_0}$  とみなす. もしある  $p \in \tilde{Q}_0$  について  $(\mathbf{n}', \zeta') = (s_p(\mathbf{n}), s_p^T(\zeta))$ ,  $\zeta_p \neq 0$  なら, ある  $\lambda$  に関する  $add_{-\lambda} \circ mc_\lambda \circ add_{-\lambda}$  によって双正則写像

$$\mathcal{M}(n; \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(n'; \mathcal{O}'_1, \dots, \mathcal{O}'_m)$$

が定まる.

この事実は例えば [1] で (特別な場合に) 紹介されている. これを用いる事で, 加法版 Katz の定理におけるアルゴリズムをワイル群の作用によって解釈する事ができる.

こういった中間畳み込みの概念や筋のワイル群作用との関係については, 最近フックス系ではない連立線形常微分方程式  $dv/dx = A(x)v$  についても理解が進んでいる. これについては [9, 7], またそれらで引用されている文献を参照すると良い.

## 参考文献

- [1] P. Boalch, *Quivers and difference Painlevé equations*, Groups and symmetries, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 25–51.
- [2] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Compositio Math. **126** (2001), no. 3, 257–293.
- [3] ———, *On matrices in prescribed conjugacy classes with no common invariant subspace and sum zero*, Duke Math. J. **118** (2003), no. 2, 339–352.
- [4] M. Dettweiler and S. Reiter, *An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem*, J. Symbolic Comput. **30** (2000), no. 6, 761–798.
- [5] V. Guillemin, V. Ginzburg, and Y. Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, Appendix J by Maxim Braverman.
- [6] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房叢書, 数学書房, 2015.
- [7] K. Hiroe, *Linear differential equations on the Riemann sphere and representations of quivers*, preprint (2013), arXiv:1307.7438.
- [8] N. M. Katz, *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [9] D. Yamakawa, *Middle convolution and Harnad duality*, Math. Ann. **349** (2011), no. 1, 215–262.

# Cabling formulae of quandle cocycle invariants for surface knots

石川 勝巳\*

京都大学 数理解析研究所 M2, 2016 年 2 月

## 1 イントロダクション

4次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^4$  に滑らかに埋め込まれた連結閉曲面のことを曲面結び目という。曲面結び目  $F$  を  $m$  重化し、その一部を振ることによってできる (連結とは限らない) 曲面のことをケーブル化といい、 $F^{(m,\nu)}$  と表すことにする (後述のように、 $\nu$  は曲面の振り方を表すパラメーターである)。一般に、与えられた (曲面) 結び目の不変量の  $F^{(m,\nu)}$  に対する値を元の (曲面) 結び目  $F$  に対する不変量を用いて表した公式をケーブル化公式という。不変量の研究をしている立場としては、公式によって求められる値そのもの以上に、そこにどのような情報が含まれているのかという点に興味がある。実際、1次元結び目に対する Jones 多項式の場合 [M] のように、ケーブル化公式には、元の不変量が持たない情報が含まれることがあるのである。さて、曲面結び目に対する有効な不変量としてカンドルコサイクル不変量 (QCI) [CJKLS] というものが知られているが、これに対するケーブル化公式は知られていない。[N] (もしくは今年の成瀬さんの報告集を参照のこと) ではケーブル化の特殊な場合である多重化を考え、QCI の多重化公式はラックコサイクル不変量 (RCI) によって表されることが示されたが、ここで出てきた RCI は QCI で表されることも示された。すなわち、ここにどのような情報が含まれるか、という疑問は本質的には解決されなかった。

そこで本稿では、QCI のケーブル化公式について得られた結果を紹介する。具体的な公式を紹介するとともに、特に、先の疑問に対する一定の解答を与えたい。

## 2 定義

### 2.1 ケーブル化

$F$  を曲面結び目、すなわち  $\mathbb{R}^4$  に滑らかに埋め込まれた連結閉曲面とする。本稿全体を通して、曲面結び目は全て向き付けられているとする。 $F \subset \mathbb{R}^4$  の管状近傍  $N$  をとり、その境界  $\partial N$  を単位法束 (normal sphere bundle) と同一視する。これは自明な  $S^1$  束であることが知られており、その切断  $s$  を枠 (frame) と呼ぶ。 $s$  が誘導する準同型  $H_1(F) \rightarrow H_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$  が零写像であるようなものが一意的に存在するが、このような枠のことを **0-枠** と呼ぶ。

---

\*katsumi@kurims.kyoto-u.ac.jp

$\partial N(F)$  に埋め込まれた曲面絡み目  $\tilde{F}$  であって、射影  $\tilde{F} \rightarrow F$  が  $m$  重被覆写像となっているものを考える。このとき、この被覆に関するモノドロミー表現  $\pi_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  が得られるが、これを  $\nu \in H^1(F; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(F), \mathbb{Z})$  へ拡張する。但し、 $\nu = 0$  の場合が、 $\tilde{F}$  が 0-枠に沿った  $m$  重化に対応するように定めるものとする。このようにして  $F$  のケーブル化に対して  $F$  の 1 次のコホモロジー  $\nu \in H^1(F; \mathbb{Z})$  が定まるが、この対応は  $\partial N(F)$  中のイソトピーで移りあうケーブル化を同一視することにより 1 対 1 であることがわかる。そこで  $\tilde{F}$  のことを  $(m, \nu)$ -ケーブル化と呼び、 $F^{(m, \nu)}$  と書く。

## 2.2 カンドルとコサイクル不変量

カンドルとは集合  $X$  とその上に定義された二項演算  $*$  の組  $(X, *)$  であって、次の条件 (Q1)~(Q3) を満たすもののことである：

(Q1) 任意の  $x \in X$  に対し、 $x * x = x$ .

(Q2) 任意の  $y$  に対し、写像  $\cdot * y : X \ni x \mapsto x * y \in X$  は全単射。

(Q3) 任意の  $x, y, z \in X$  に対し、 $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ .

たとえば群  $G$ 、もしくはその共役類に対し、共役を用いて  $g * h := h^{-1}gh$  と演算を定めたものはカンドルになる。すなわち、カンドルとは群から共役をとるという操作が持つ性質を抜き出してくることにより得られる代数である、という言い方もできる。位数  $2k$  の二面体群の、反転を表す元からなる共役類は二面体カンドル  $R_k$  を定め、4 次交代群の、4 元からなる共役類は四面体カンドル  $Q_4$  を定める。また、(曲面) 結び目  $F$  の補空間の基本群の類似として、**基本カンドル (fundamental quandle)  $Q(F)$**  が定まる。(有限) カンドル  $X$  に対し、カンドル準同型 ( $X$ -彩色と呼ばれる)  $\mathcal{C} : Q(F) \rightarrow X$  の数は曲面結び目  $F$  に対する不変量であり、大体、補空間の基本群から有限群への表現の数を数えているようなものだと思ってもらって構わない。

群の場合の類似でカンドル  $X$  に対し分類空間  $\mathcal{B}^Q X$  が定まる。アーベル群  $A$  に対し  $H_Q^*(X; A) := H^*(\mathcal{B}X; A)$  はカンドルコホモロジーと呼ばれる。曲面結び目  $F$  に対しダイアグラムを考えることにより連続写像  $S^3 \rightarrow \mathcal{B}^Q Q(F)$  が定まる。そこで、有限カンドル  $X$  による各彩色  $\mathcal{C}$  について合成

$$f_{\mathcal{C}} : S^3 \rightarrow \mathcal{B}^Q Q(F) \xrightarrow{\mathcal{B}^Q \mathcal{C}} \mathcal{B}^Q X$$

を考える。与えられた  $X$  のカンドル 3-コサイクル  $\psi$  に対し

$$\Psi_{\psi}(F) := \sum_{\mathcal{C}: X\text{-col.}} \langle f_{\mathcal{C}}^* \psi, [S^3] \rangle \in \mathbb{Z}[A]$$

は曲面結び目の不変量となる ([CJKLS])。ここで和は全ての  $X$ -彩色に亘ってとるものとする。 $\Psi_{\psi}$  はカンドル **(3-) コサイクル不変量** (以後、3-CI と書く) と呼ばれている。

上で述べたような通常考えられる分類空間とは別の分類空間を考え、ここでは  $\mathcal{B}^{Q'} X$  と表すことにする。これは通常  $\mathcal{B}_X^Q X$  と書かれるものにさらにセルを貼り付けてえられるもので、[E] に出てくるものに近い。コホモロジー群について、 $H_Q^n(X; A) \cong H^{n-1}(\mathcal{B}^{Q'} X; A)$  ( $n \geq 1$ ) が成立し、また、 $X$ -彩色  $\mathcal{C}$  に対し、連続写像  $F \rightarrow \mathcal{B}^{Q'} Q(F)$  が定まる。先と同様に合成

$$g_{\mathcal{C}} : F \rightarrow \mathcal{B}^{Q'} Q(F) \xrightarrow{\mathcal{B}^{Q'} \mathcal{C}} \mathcal{B}^{Q'} X$$

を考える。与えられた  $X$  のカンドル 2-コサイクル  $\phi$  (紛らわしいが、これは  $\mathcal{B}^Q X$  の 1-コサイクルである) に対し

$$\Phi_\phi(F) := \sum_{C: X\text{-col.}} g_C^* \phi \in \mathbb{Z}[H^1(F; A)]$$

はカンドル 2-コサイクル不変量 (以下、2-CI) と呼ばれる曲面結び目の不変量である (もともと [CSS] で定義されていたものを、[I] や講演ではこのようにコホモロジーの形に再定式化して用いた)。今述べたような 2-CI の構成はまだ論文等になっていないかもしれないが、ここでは詳細は割愛させていただく。なお、同様にカンドル 3-コサイクル ( $\mathcal{B}^Q X$  の 2-コサイクル) を引き戻して定義した不変量は、上で述べた 3-CI と同じものになっていることに注意しておく。

### 3 ケーブル化公式

この節では、ケーブル化の 3-CI について得られた結果を紹介する。この節を通して、 $F$  を曲面結び目、 $F^{(m, \nu)}$  をその  $(m, \nu)$ -ケーブル化とする。また  $n$  を、 $\nu(H_1(F)) = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  を満たす非負整数とする。

一般に、 $\mathbb{Z}[T^\pm]$ -加群  $X$  に対し、二項演算  $*$  を

$$x * y = Tx + (1 - T)y$$

と定めたものはカンドルになるが、このようなものを **Alexander カンドル** という。  $R_k, Q_4$  はいずれも Alexander カンドルの例である。一般に Alexander カンドルについて次の結果を得た：

**定理 3.1.**  $X$  を有限 Alexander カンドルとし、 $\psi$  をその 3-コサイクルとする。このとき連結 Alexander カンドルの有限族  $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  及び  $X_m$  の 2-コサイクルの有限族  $\{\phi_{m,i}\}_i$  と 3-コサイクルの有限族  $\{\psi_{m,j}\}_j$  があり、定数  $c_{m,n,i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  により、 $\Psi_\psi(F^{(m, \nu)})$  は次のように表される：

$$\begin{aligned} \Psi_\psi(F^{(m, \nu)}) &= \sum_{i,j} c_{m,n,i,j} ((\nu/n) \cup \Phi_{\phi_{m,i}} \cdot \Psi_{\psi_{m,j}})(F) \\ &= \sum_{i,j} c_{m,n,i,j} \sum_{C: X_m = \text{彩色}} ((\nu/n) \cup \Phi_{\phi_{m,i}}(D, C)) \cdot \Psi_{\psi_{m,j}}(D, C). \end{aligned}$$

ここで、分類空間  $\mathcal{B}^Q X$  が連結であるようなカンドル  $X$  を連結であるとしている。定理 3.1 は、Alexander カンドルについてケーブル化公式は有限個の 3-CI 及び 2-CI を用いて書かれるということを示している。すなわち、ケーブル化の 3-CI には、(もとと同じかそれより簡単なカンドルについての) 3-CI と 2-CI の情報が含まれる、ということである。さらに具体的なカンドルについては次のような明示的な結果を得た：

**定理 3.2.**  $k$  を奇数とする。位数  $k$  の二面体カンドル  $R_k$  の任意のカンドル 3-コサイクル  $\psi$  について、次が成り立つ：

$$\Psi_\psi(F^{(m, \nu)}) = \begin{cases} \Psi_{m\psi}(F) & (m, n \text{ がともに奇数のとき}), \\ k^{(m, n) - 1} \binom{m}{(m, n), k} \Psi_{m\psi}(F) & (m \text{ が奇数、} n \text{ が偶数のとき}), \\ k^{(m, n)} \binom{n}{(m, n), k} & (m \text{ が偶数、} n \text{ が奇数のとき}), \\ k^{(m, n) - 1} \binom{mn}{(m, n)^2, k} & (m, n \text{ がともに偶数のとき}). \end{cases}$$

定理 3.3. 四面体カンドル  $Q_4$  の任意の位数 2 のカンドル 3-コサイクル  $\psi$  に対して、

$$\Psi_\psi(F^{(m,\nu)}) = \begin{cases} \Psi_{m\psi}(F) & (m, n \notin 3\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1} \left( \frac{m}{(m,n)}, 2 \right)^2 \Psi_{m\psi}(F) & (m \notin 3\mathbb{Z}, n \in 3\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)} \left( \frac{n}{(m,n)}, 2 \right)^2 & (m \in 3\mathbb{Z}, n \notin 3\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1} \left( \frac{mn}{(m,n)^2}, 2 \right)^2 & (m, n \in 3\mathbb{Z} \text{ のとき}). \end{cases}$$

定理 3.4.  $\psi \in H_Q^3(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  は (コホモロジー群の中で) 位数 4 であるとする。  $\phi \in H_Q^2(Q_4; \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$  を (唯一の) 0 でない元とするとき、3 の倍数でない  $m$  に対して次が成り立つ：

$$\Psi_\psi(F^{(m,\nu)}) = \begin{cases} \Psi_{m\psi}(F) & (n \notin 3\mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ (2^{2(m,n)-3} + 2^{(m,n)-2})\Psi_{m\psi}(F) & (m \notin 2\mathbb{Z} \text{ かつ} \\ \quad + (2^{2(m,n)-3} - 2^{(m,n)-2})((\nu \cup \Phi_\phi) \cdot \Psi_{m\psi})(F) & n \in 3 + 6\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1}\Psi_{2\psi}(F) & (m \in 2 + 4\mathbb{Z} \text{ かつ} \\ \quad + 3 \cdot 4^{(m,n)-1}((\nu \cup \Phi_\phi) \cdot \Psi_{2\psi})(F) & n \in 3 + 6\mathbb{Z} \text{ のとき}), \\ 4^{(m,n)-1} \left( \frac{m}{(m,n)}, 2 \right)^2 \Psi_{m\psi}(F) & (\text{それ以外の場合}). \end{cases}$$

なお、 $H_1^Q(Q_4) = \mathbb{Z}$ ,  $H_2^Q(Q_4) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $H_3^Q(Q_4) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  であり、上の二つの定理により、 $Q_4$  のあらゆる 3-コサイクルに対するケーブル化公式が得られたことになる。また、特に定理 3.4 は、定理 3.1 において、実際に 2-CI の項が現れる場合があるということを示している ([N] で計算されたものにおいては 3-CI の項しか現れなかった)。

## 4 証明と一般化

紙数の関係上、証明の細部に触れることはできないが、何が起きているのかということを書き添えておくことにする。

一般の有限カンドル  $Y$  に対し、 $m$  重化に対応するカンドル  $Y^m$  と、 $1/m$  振ることに対応する  $Y^m$  の自己同型  $\tau$  が定まり、 $\tau$  は kink map と呼ばれる特殊なものであることがわかる。 $Y^m$  を分解することで、問題は連結カンドルとその上の kink map の組についての場合に帰着される。

一方、カンドル  $X$  とその kink map  $\tau$  の組から、曲面結び目  $F$  とその上のコホモロジー  $\nu \in H^1(F)$  の組に対する彩色を考えることができ、そのコサイクル不変量も定義することができる。簡単のため  $X$  を連結とし、 $\hat{X}$  を、 $X$  を  $\tau$  の作用で割ってできるカンドルとする。 $(X, \tau)$  に対応して  $\mathcal{B}^{Q'}\hat{X}$  上の  $S^1$  束  $\mathcal{B}_\tau X$  が定まるが、 $(F, \nu)$  の  $(X, \tau)$ -彩色は  $F$  から  $\mathcal{B}_\tau X$  への連続写像を定め、先のコサイクル不変量は、 $\mathcal{B}_\tau X$  の 2-コサイクルを引き戻して評価したものに帰着されることがわかる。

もともと考えていたカンドル  $Y$  が Alexander であるとき、 $Y^m$  を分解して出てくる連結カンドルは互いに同型な Alexander カンドルであり、また、連結 Alexander カンドル上の kink map は

恒等写像しかないことが知られている。すなわち上の記号でいうと  $X = \hat{X}$  で、 $\mathcal{B}_\tau X$  は自明な  $S^1$  束、すなわち  $\mathcal{B}^{Q'}X \times S^1$  であり、コホモロジー群は

$$H^2(\mathcal{B}_\tau X; A) \cong H^1(\mathcal{B}^{Q'}X; A) \oplus H^2(\mathcal{B}^{Q'}X; A) \cong H_Q^2(X; A) \oplus H_Q^3(X; A)$$

と分裂する。これに対応してケーブル化の 3-CI は 3-CI と 2-CI に分裂し、定理 3.1 のような形に書かれることがわかる。他の定理は定理 3.1 に現れるコサイクルを計算することで得られるのだが、ここでは詳細は省き、それほど容易ではない、とだけ述べておく。

一般には非自明な kink map が存在するのでこのような簡明な結果は得られないが、 $(X, \tau)$ -彩色から得られる写像  $F \rightarrow \mathcal{B}_\tau X$  は、対応する  $\hat{X}$ -彩色から得られる写像  $g_C : F \rightarrow \mathcal{B}^{Q'}\hat{X}$  を  $\nu$  を使って補正して持ち上げたものであろう、と考えており、ホモトピー類  $[F, \mathcal{B}^{Q'}\hat{X}]$  の多重集合に値をとる（よく知られているものとは異なる）ホモトピー不変量を定めてやることで、一般の場合のケーブル化公式も書き表すことができるであろう、というのが現時点での予想である。

## 謝辞

今回は 5 日間、楽しく有意義な時間を過ごすことができた。セミナーの企画・実行や旅費の補助の手配をしてくださった運営委員の皆様にご挨拶申し上げます。

## 参考文献

- [CJKLS] Carter, J. S., Jelsovsky, D., Kamada, S., Langford, L., Saito, M., *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989.
- [CSS] Carter, J. S., Saito, M., Satoh, S., *Ribbon concordance of surface-knots via quandle cocycle invariants*, J. Aust. Math. Soc. **80** (2006), 131–147.
- [E] Eisermann, M., *Quandle coverings and their Galois correspondence*. Fund. Math. **225** (2014), 103–168.
- [I] Ishikawa, K., *Cabling formulae of quandle cocycle invariants for surface knots*, Master thesis, Kyoto University, January, 2016.
- [M] Murakami, J., *The parallel version of polynomial invariants of links*. Osaka J. Math. **26** (1989), 1–55.
- [N] 成瀬 透, “曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 1 月. <http://hdl.handle.net/2433/194277>

# Fibred Fibration Categories

上村 太一\*

京都大学数理解析研究所, 2016 年 2 月

## 1 序文

Homotopy Type Theory [13] は、Martin-Löf 型理論 [6] とホモトピー論が結びついた、計算機科学とホモトピー論双方の観点から注目されている研究テーマである。モデル圏 [7] や  $(\infty, 1)$ -圏 [5] のように、抽象ホモトピー論の言語を与えるが、従来のものと比べて、計算機を使った形式証明と相性が良いという特徴がある。また、ホモトピー論的な視点から、*Univalence Axiom* と *Higher Inductive Type* という、ホモトピー論、型理論双方にとって興味深い概念が生まれた。この 2 つは、抽象ホモトピー論を展開する上で強力な道具となり、Univalence Axiom と Higher Inductive Type に基づくライブラリが活発に開発されている [1]。

しかし、Homotopy Type Theory の意味論は十分に発展しているとは言えない。具体的なモデルを作ることにより、Homotopy Type Theory の無矛盾性は示された [4] が、canonicity, disjunction property, definability などの議論はまだ尽くされていない。

古くから型理論の意味論においては、*logical relation* と呼ばれるテクニックがよく使われてきた。Logical relation には、*fibred category (Grothendieck fibration)* を使った圏論的定式化がある [2]。Logical relation のテクニックを使えるかどうかは、圏論的には fibrewise な構造から total category の構造を作れるか (時にはその逆も) という問題に帰着される。

本研究では、Homotopy Type Theory そのものではないがその土台である Martin-Löf 型理論に対応する圏論的構造について、fibrewise な構造と total な構造とを比較する。これは、*identity type* についての logical relation の理論を与えることになる。

## 2 Type-theoretic fibration categories

この章では、Martin-Löf のモデルである *type-theoretic fibration category* を導入する。

**定義 1** (左リフト性、右リフト性).  $i : A \rightarrow B, p : X \rightarrow Y$  を圏  $\mathcal{C}$  の射とする。 $i$  が  $p$  に対して左リフト性を持つ ( $p$  が  $i$  に対して右リフト性を持つ) とは、すべての  $f : A \rightarrow X, g : B \rightarrow Y$  で  $p \circ f = g \circ i$  を満たすものに対して、 $h : B \rightarrow X$

---

\*uemura@kurims.kyoto-u.ac.jp

で、 $h \circ i = f, p \circ h = g$  を満たす射が存在することである。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

**定義 2** (Type-theoretic fibration category [10, Definition 2.2]). Type-theoretic fibration category とは、圏  $\mathbb{C}$  と部分圏  $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$  で、次を満たすものである。ここで、 $\mathcal{F}$  の射を fibration と呼び、二重矢印  $X \twoheadrightarrow Y$  と書く。また、すべての fibration に対して左リフト性を持つ射を acyclic cofibration と呼び、 $X \xrightarrow{\sim} Y$  と書く。

1.  $\mathbb{C}$  は終対象  $1$  を持つ。
2. すべての同型射と、 $1$  への射は fibration である。
3. Fibration は pullback について閉じる:  $p: X \twoheadrightarrow J$  を fibration,  $f: I \rightarrow J$  を任意の射とすると、pullback  $f^*X$  が存在し、 $f^*X \rightarrow I$  は fibration である。
4. 任意の射は acyclic cofibration と fibration に分解する。
5.  $\mathbb{C}$  は dependent products を持つ: fibration  $f: X \twoheadrightarrow Y$  に対して、 $f^*: \mathbb{C}/Y \rightarrow \mathbb{C}/X$  は partial right adjoint  $\Pi_f$  を持ち、その定義域は  $X$  上の fibration を含み、値は  $Y$  上の fibration である。

**定義 3** (Strong fibration functor). Type-theoretic fibration category の間の関手  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  が strong fibration functor であるとは、 $F$  が終対象, fibration, fibration の pullback と acyclic cofibration を保つことである。

### 3 Fibred type-theoretic fibration categories

この章では、主定理とその証明のスケッチを述べる。完全な証明は [12] にある。

**定義 4.** Fibred type-theoretic fibration category とは、strong fibration functor  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  で、次を満たすものである。

1.  $p$  は fibred category である。
2. Fibration の上の Cartesian morphism は fibration である。
3.  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  の図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow & \downarrow v \\ & & v^*Z \twoheadrightarrow Z \\ \\ I & \xrightarrow{vu} & K \\ & \searrow u & \downarrow v \\ & & J \twoheadrightarrow K \end{array}$$

に対して、 $g$  と  $u$  が fibration なら、誘導される射  $X \rightarrow v^*Z$  も fibration である。

4. *Acyclic cofibration* の上の *Cartesian morphism* は *acyclic cofibration* である。
5.  $p$  は *dependent product* を保つ。

**定理 5.** 次を仮定する。

1.  $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  は *fibred category* である。
2.  $\mathbb{B}$  と各 *fiber*  $\mathbb{E}_I$  は *type-theoretic fibration category* である。
3.  $\mathbb{B}$  の射  $u: I \rightarrow J$  に対して、 $u^*: \mathbb{E}_J \rightarrow \mathbb{E}_I$  は *strong fibration functor* である。
4.  $\mathbb{B}$  の *acyclic cofibration*  $u: I \xrightarrow{\sim} J$  と  $\mathbb{E}_J$  の *fibration*  $Y \rightarrow X$  に対して、 $u^*: \mathbb{E}_J/X(X, Y) \rightarrow \mathbb{E}_I/u^*X(u^*X, u^*Y)$  は全射である。
5.  $\mathbb{B}$  の *fibration*  $u: I \rightarrow J$  に対して、 $u^*: \mathbb{E}_J \rightarrow \mathbb{E}_I$  は *fibration* を保つ *right adjoint*  $u_*$  を持ち、*Beck-Chevalley condition* を満たす。

このとき、 $\mathbb{E}$  に *type-theoretic fibration category* の構造が入り、 $p: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  は *fibred type-theoretic fibration category* になる。

$\mathbb{E}$  に *type-theoretic fibration category* の構造を入れるには、 $\mathbb{E}$  の *fibration* を決めればよい。 $\mathbb{E}$  の *fibration* は次の *Reedy fibration* とすればよい。

**定義 6 (Reedy fibration).**  $\mathbb{E}$  の射  $f: X \rightarrow Y$  が *Reedy fibration* であるとは、 $pf: pX \rightarrow pY$  が  $\mathbb{B}$  の *fibration* でありかつ誘導される射  $X \rightarrow (pf)^*Y$  が  $\mathbb{E}_{pX}$  の *fibration* であることである。

次に、 $\mathbb{E}$  の射は (*Reedy fibration* についての) *acyclic cofibration* と *Reedy fibration* に分解することを示す。 $p$  が *bifibred category* であれば [8] [11] の方法がそのまま使えるが、今回は  $p$  が *bifibred category* とは仮定しない。その代わりに、*acyclic cofibration* の強い性質を使えば同様のことができる。

**補題 7.** *Type-theoretic fibration category*  $\mathbb{C}$  の *acyclic cofibration*  $f: A \xrightarrow{\sim} B$  に対して、 $g: B \rightarrow A$  で、 $gf = 1$  を満たすものが存在する。

*Proof.* *Fibration*  $A \rightarrow 1$  に対する左リフト性を使えばよい。 □

**補題 8.**  $\mathbb{B}$  の *acyclic cofibration*  $u: I \xrightarrow{\sim} J$  と  $X \in \mathbb{E}_I$  に対し、 $u_1X \in \mathbb{E}_J$  と  $u$  の上の *Cartesian morphism*  $X \rightarrow u_1X$  が存在する。

*Proof.* 補題 7 より、 $v: J \rightarrow I$  で、 $vu = 1$  となる射が存在する。 $u_1X = v^*X$  とすれば、*Cartesian morphism*  $X \cong u^*v^*X \rightarrow v^*X = u_1X$  を得る。 □

定理 5 の仮定 4 により、*acyclic cofibration* の上の *Cartesian morphism* は特別な性質を持つ。

**補題 9.**  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  の図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & X \\
 & & & \nearrow & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & Y \\
 & & & & \\
 I & \xrightarrow{\sim u} & J & \longrightarrow & K
 \end{array}$$

において、 $u : I \xrightarrow{\sim} J$  が  $\mathbb{B}$  の *acyclic cofibration*,  $f : A \rightarrow B$  が  $u$  の上の *Cartesian morphism*,  $g : X \rightarrow Y$  が  $\mathbb{E}_K$  の *fibration* ならば、間を埋める射  $B \rightarrow X$  が存在する。

以上の補題を使えば、 $\mathbb{E}$  において Reedy fibration への分解を実現できる。

$f : X \rightarrow Y$  を  $\mathbb{E}$  の射,  $pf = u : I \rightarrow J$  とする。まず、 $\mathbb{B}$  において  $u$  を  $I \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{w} J$  と分解する。Cartesian morphism  $w^*Y \rightarrow Y$  と誘導される  $v$  の上の射  $\langle f \rangle : X \rightarrow w^*Y$  を得る。補題 8 より、 $v$  の上の Cartesian morphism  $\bar{v} : X \rightarrow v_!X$  が存在する。補題 9 より、 $K$  の上の射  $[f] : v_!X \rightarrow w^*Y$  で、 $[f]\bar{v} = \langle f \rangle$  を満たすものが存在する。 $\mathbb{E}_K$  で  $[f]$  を分解することにより、次の図のように  $f$  の分解  $X \rightarrow Z \rightarrow Y$  を得る。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & v_!X & & \\
 & \nearrow & \downarrow \sim & & \\
 X & & Z & & Y \\
 & & \downarrow & \nearrow & \\
 & & w^*Y & & \\
 \\
 I & \xrightarrow{\sim} & K & \xrightarrow{w} & J
 \end{array}$$

この形の  $X \rightarrow Z$  が Reedy fibration に対して左リフト性を持つことは、補題 9 を使えば示せる。

$\mathbb{E}$  が type-theoretic fibration category の残りの公理を満たすこととまた、 $p : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$  が fibred type-theoretic fibration category になることは容易に示せる。詳細は [12] を見よ。

## 4 結論と今後の課題

本研究では、base category が type-theoretic fibration category で各 fiber が type-theoretic fibration category である fibred category に対して、total category の type-theoretic fibration category の構造を与えた。今後の課題として、*univalent universe* [9, Section 7] を持つ type-theoretic fibration category について同様の構成ができるかという問いがある。

また、応用として (*weak*) *generic object* [3, Definition 5.2.8] を持つ fibred type-theoretic fibration category を考えると、これは *polymorphic Homotopy Type Theory* をモデルしているとみなせる。しかし、そのような fibred type-theoretic fibration category を作れるかどうかはわかっていない。

## References

- [1] <https://github.com/HoTT/HoTT>.
- [2] C. Hermida. *Fibrations, Logical Predicates and Indeterminates*. PhD thesis, University of Edinburgh, 1993.
- [3] Bart Jacobs. *Categorical logic and type theory*. Elsevier Science, 1st edition, December 1999.

- [4] Chris Kapulkin, Peter L. Lumsdaine, and Vladimir Voevodsky. The simplicial model of univalent foundations, April 2014.
- [5] Jacob Lurie. *Higher topos theory*. Princeton University Press, 2009.
- [6] Per Martin-Löf. An intuitionistic theory of types. In H. E. Rose and J. C. Shepherdson, editors, *Logic Colloquium '73, Proceedings of the Logic Colloquium*, volume 80 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 73–118. North-Holland, 1975.
- [7] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra*. Springer, 1967.
- [8] Agustí Roig. Model category structures in bifibred categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 95(2):203–223, August 1994.
- [9] Michael Shulman. Univalence for inverse diagrams and homotopy canonicity. *Mathematical Structures in Computer Science*, 25(05):1203–1277, June 2015.
- [10] Michael Shulman. Univalence for inverse EI diagrams, August 2015. arXiv:1508.02410.
- [11] Alexandru E. Stanculescu. Bifibrations and weak factorisation systems. *Applied Categorical Structures*, 20(1):19–30, 2012.
- [12] Taichi Uemura. Fibred fibration categories, February 2016. arXiv:1602.08206.
- [13] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. <http://homotopytypetheory.org/book/>, 2013.

# 定常渦斑の数値計算法と数値検証に向けた展望

宇田 智紀\*

京都大学 数学教室, 2016年2月

## 1 序論

2次元 Euler 方程式の解として, 一定渦度領域をもつ**渦斑**が知られ, 渦力学におけるもっとも基本的な解の一つとして活発に研究が行われている. 定常渦斑問題は渦斑境界を未知とする楕円型の自由境界問題である.

2次元の場合について, Pierrehumbert は非自明な定常渦斑解の存在を示唆している [4, '80]. Pierrehumbert は, 渦度が異符号の対称な渦斑の対を考え, これが定常的に一定速度で並行移動するときの渦斑境界の形状を数値計算した. これによって, 解の集合が渦斑の面積をパラメータとして連続な族をなすことが数値的に示された. Pierrehumbert が用いた数値計算法は, 本質的には Newton 法である. また, Wu らは効率的な定常渦斑の数値計算法を提案している [5, '84]. Wu らが用いた**等高線力学** (contour dynamics [6, Zabusky *et al.*, '79]) は, 渦斑境界の時間発展を記述する微分方程式である. 求める自由境界を等高線力学の相対的平衡状態とみなすことで, 1次元の積分方程式を解くことに帰着するのである. Elcrat らは一様流中の円柱障害物の背後に閉じ込められる定常渦斑を扱っている [2, '00]. Elcrat らも同様に等高線力学の平衡状態を Newton 法で数値計算した. さらに, 離散化した等高線力学系に対する安定性解析も行った. 定常渦斑に関連する解析的な結果としては, Crowdy による解析的渦斑 [1, '02] が挙げられる. Crowdy は  $N$  個の点渦に囲まれた  $N$  重回転対称な定常渦斑の形状を, 等角写像を用いることで陽的に構成することに成功している. Crowdy の解析的渦斑も, 連続な 1-パラメータ族をなす. 一方で, 解の存在とパラメータ族に関連する数学的結果としては, Gallizio らによる渦斑解の延長 [3, '10] がある. Gallizio らは, 定常渦斑が存在しある条件を満たすとき, 十分近いパラメータについてまた定常渦斑解が存在することを, **形状微分理論**および陰関数定理を用いて証明している.

このように, 数値解析および数学解析のいずれにおいても, 定常渦斑問題において重要な役割を果たすのは定常渦斑の形状である. そして, いくつかの限定的な場合については数学的な結果が知られている. 特に Gallizio らが示しているように, 解の存在を認めるならば, その近傍に解の連続な 1-パラメータ族が存在する. しかしながら, Crowdy の解析的渦斑のような特別な場合を除き, 一般に定常渦斑解の存在に関する数学的な結果は知られていない. 一方で数値計算を主とした多くの先行研究が非自明な解の 1-パラメータ族の存在を示唆している.

そこで本研究の目的は, 定常渦斑解の存在を計算機援用証明するための手法を確立することである. 計算機援用証明を実現するにあたって重要なことは, 問題を関数空間の上で定式化し, 解くべき方程式に関する写像の微分を具体的に求めることである. このレポートでは, その研究過程において導出された数値計算手法と数値計算結果を紹介する.

---

\*uda@math.kyoto-u.ac.jp

## 2 等高線力学による定式化

渦斑を扱う上で重要な鍵となるのが等高線力学 [6] である。等高線力学は、渦斑境界の時間発展を記述する力学系である。例えば、2次元 Euclid 空間  $\mathbf{R}^2$  を複素平面  $\mathbf{C}$  と同一視して実軸対称な Euler 流を考え、上半 (resp. 下半) 平面に渦度の強さ  $\omega$  (resp.  $-\omega$ ) の渦斑  $D$  (resp.  $\bar{D}$ ) があるとすると (これは Pierrehumbert 渦斑対 [4] の設定である)。この場合の等高線力学は次の微分積分方程式で与えられる。

$$\frac{dz}{dt} = v(z; \partial D(t)) := -\frac{\omega}{4\pi} \oint_{\partial D(t)} \log(z-w) d\bar{w} + \frac{\omega}{4\pi} \oint_{-\partial D(t)} \log(z-w) d\bar{w}. \quad (\spadesuit)$$

ここで、 $z(s, t)$  ( $0 \leq s \leq 2\pi$ ) は時刻  $t$  における渦斑境界  $\partial D(t)$  のパラメータ表示であり、 $v(z; \partial D(t))$  は渦斑  $D(t)$  が誘導する速度場である。式  $(\spadesuit)$  は2つの実軸対称な渦斑  $D, \bar{D}$  が誘導する速度場を表している。 $\omega > 0$  (resp.  $-\omega < 0$ ) であるから、第1項 (resp. 第2項) は渦斑  $D$  (resp.  $\bar{D}$ ) の周りに反時計回り (resp. 時計回り) の速度場を誘導しており、これらが相互に作用しあって渦斑対は実軸方向に時間発展する。

渦斑ではなく、逆符号の点渦の対が実軸対称に配置されている場合を考えると、点渦対は実軸を挟んである一定速度  $V_T$  で並行移動することが知られている。このことから、一定速度  $V_T$  で実軸方向に定常的に併進する渦斑対 (Pierrehumbert 渦斑対) の存在が予想される。これは等高線力学の言葉でいえば、相対的平衡状態 (すなわち  $[v - V_T] \cdot n = 0$ ) に対応する。

一般に、渦斑の集まり  $\{D_1, \dots, D_K\}$  が相対速度  $v_0$  で静止しているとは、方程式

$$[v(z; \{\partial D_k(t)\}) - v_0(z)] \cdot n(z; \{\partial D_k(t)\}) = 0 \quad \text{on } \partial D_k, \forall t \geq 0, k = 1, \dots, K$$

を満たすことと定義する。ただし、 $v$  は渦斑の集まり  $\{D_k\}$  が誘導する速度場、 $n$  は境界  $\partial D_k$  上の外向き単位法ベクトル、複素数  $a, b$  に対して  $a \cdot b := \text{Re}(a\bar{b})$  は標準的な2次元 Euclid 内積を表す。また便宜上、渦斑の面積0極限 (すなわち点渦) も定義に含めることにし、点  $z$  にある点渦に対する静止条件は単に  $v(z; \{\partial D_k\}) = v_0(z)$  とする。後に見る Crowdy 渦斑族の場合が点渦を含む例である。

簡単のため、以降 Pierrehumbert 渦斑対の場合  $(\spadesuit)$  のみを扱う。相対的に静止した Pierrehumbert 渦斑対は等高線力学  $(\spadesuit)$  の相対的平衡状態に対応し、よって形状  $\partial D$  を未知とする零点問題とみなすことができる。

与えられた  $\omega > 0, V_T > 0$  に対して、次を満たす境界  $\partial D$  をみつけれよ：

$$\mathcal{F}(\partial D) := [v(z; \partial D) - V_T] \cdot n(z; \partial D) = 0 \quad \text{on } \partial D.$$

非線型写像  $\mathcal{F}$  は形状依存の写像であり、また解くべき方程式において変数  $z$  はその未知境界  $\partial D$  上を動く変数であることに注意する。この問題を数学的に取り扱うために、 $\partial D$  に対して適当なパラメータ表示を導入し、方程式を関数空間の上で議論する。

反時計回りに向き付けられた滑らかな単純閉曲線  $\partial D_0$  を一つ固定し、そのパラメータ表示を  $z_0: S^1 \rightarrow \mathbf{R}, S^1 := \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  とする。また、このパラメータ表示に関する外向き単位法ベクトルを  $n_0(s) := -iz'_0(s)/|z'_0(s)|$  とおく。このとき、十分小さい滑らかな  $2\pi$  周期実数値関数  $r(s)$  に対して、新たな閉曲線  $\partial D_r$  とそのパラメータ表示

$$z_r(s) := z_0(s) + r(s)n_0(s)$$

が得られる。このパラメータ表示を用い形状  $\partial D$  依存の写像を  $S^1$  上の関数へと統一する：

$$\mathcal{F}: H^1(S^1; \mathbf{R}) \rightarrow L^2(S^1; \mathbf{R}); \quad \mathcal{F}(r) := [v(z_r; \partial D_r) - V_T] \cdot n(z_r; \partial D_r).$$

ここで、 $L^2(S^1; X)$  は  $S^1$  上  $X$  値二乗可積分関数全体のなす Hilbert 空間、また  $H^1(S^1; \mathbf{R})$  は 1 次の Sobolev 空間 (すなわち、 $L^2(S^1; \mathbf{R})$  の元であって超関数の意味での微分がふたたび  $L^2$  関数となるようなもの全体のなす Hilbert 空間) である。

これらの記法を用いて、相対的に静止した渦斑を求める問題を次のように定式化する。

与えられた  $\omega > 0, V_T > 0, z_0$  に対して、次を満たす  $r$  をみつけよ：

$$\mathcal{F}(r) = [v(z_r; \partial D_r) - V_T] \cdot n(z_r; \partial D_r) = 0 \quad \text{on } \partial D. \quad (\diamond)$$

問題  $(\diamond)$  は形状依存の非線型写像  $\mathcal{F}$  の零点問題である。零点問題の解析においては、 $\mathcal{F}$  の微分が重要な役割をもつ。そこで、方向微分の一般化である Gâteaux 微分を計算する。

ノルム空間  $X$  から  $Y$  への写像  $F: X \rightarrow Y$  が  $r \in X$  において  $\Delta r \in X$  方向への Gâteaux semiderivative をもつとは、次の極限が存在することをいい、そのときの極限を  $dF(r; \Delta r)$  とかく：

$$dF(r; \Delta r) := \lim_{h>0, h \rightarrow +0} \frac{F(r + h\Delta r) - F(r)}{h} = \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=+0} F(r + h\Delta r).$$

$\mathcal{F}$  の Gâteaux 微分を求めるためには、 $(\spadesuit)$  に現れる複素積分の Gâteaux 微分を求めれば十分である。具体的な計算は省略するが、これは次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dh} \right|_{h=+0} \oint_{\partial D_{r+h\Delta r}} \log(z_{r+h\Delta r} - w) d\bar{w} \\ &= -2i \int_0^{2\pi} \frac{\text{Im}[(z_r - z_r(t))(\overline{\Delta r n_0 - \Delta r(t) n_0(t)})]}{(z_r - z_r(t))^2} z_r'(t) dt - \int_0^{2\pi} \frac{z_r - z_r(t)}{z_r - z_r(t)} (\Delta r(t) n_0(t))' dt. \end{aligned}$$

### 3 数値スキームと数値計算結果

線型作用素  $d\mathcal{F}(r; \cdot)$  が具体的に得られたので、これを用いて Newton 法による数値計算を行うことができる。すなわち、適当に与えられた初期予測  $r^{(0)}$  に対し、反復列

$$r^{(m+1)} := r^{(m)} - M_{r^{(m)}}^\dagger \mathcal{F}(r^{(m)}), \quad M_r := d\mathcal{F}(r; \cdot) \quad (3)$$

を計算する。ここで、 $M_r$  は一般に可逆ではないので、擬逆作用素  $M_r^\dagger$  を用いる。 $r \in H^1(S^1; \mathbf{R})$  を適当な方法で離散化すれば、それに応じて数値スキームが一つ得られる。以下に示す数値結果では、Fourier 級数 (三角級数) による離散化を用いた。

一般に Newton 反復 (3) の過程で、渦斑の面積は大きく変化し得る。渦斑族 (特に面積極大の極限渦斑) の計算をするとき、面積をうまく制御できると都合がよいことがある。実は、面積が所与の定数であるような形状  $D_r$  全体の集合は、ある Hilbert 多様体の部分集合であり、したがって多様体上の Newton 法 (制限付き Newton 法) を適用することで面積を一定の値に保つことができる。これについての詳細は割愛する。

#### 3.1 Pierrehumbert 渦斑族

提案手法 (3) による近似計算で得た Pierrehumbert 渦斑対の 1-パラメータ族を図 1 に示す。

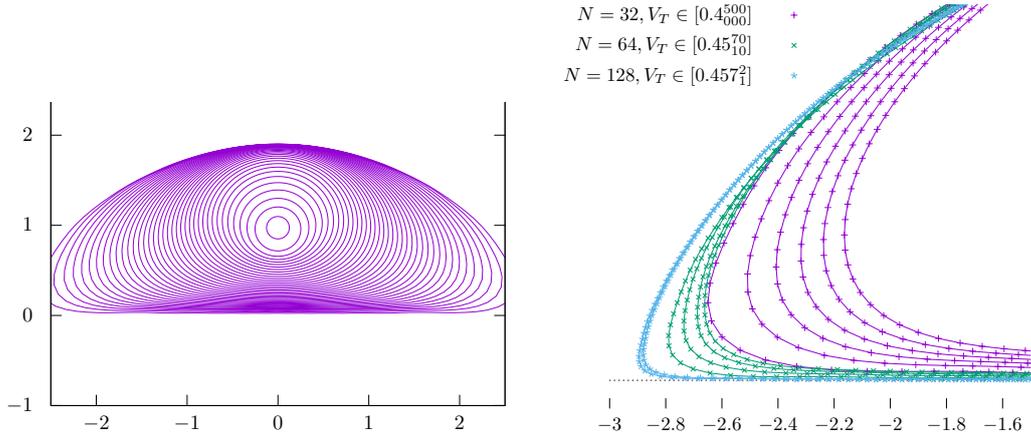


図 1: パラメータを  $\omega = 1.0$  で固定, 左図:  $V_T$  を 0.004 (内側) から 0.450 (外側), 右図:  $V_T$  を 0.4000 から 0.4572 まで変化させた渦斑族. 拡大図の  $x = -3$  付近では, カスプを持った形状に近づいていることが観察できる.

図 1 は基準となる閉曲線  $\partial D_0$  を固定して, 並行移動の速さを表すパラメータ  $V_T$  を変えることで得られた渦斑族である. それぞれの閉曲線が, 各パラメータ  $V_T$  ごとに得られる相対的に静止した渦斑の境界をあらわしている.  $V_T$  を大きくするにしたがって, 実軸に張り付いてカスプを持った形状へと近づいていることが見てとれる. これらの数値結果のそれぞれにおいて, 絶対残差 ( $\mathcal{F}$  の  $L^2$  ノルム  $\|\mathcal{F}(r^{(m)})\|_{L^2}$ ) はおよそ  $O(10^{-9})$  から  $O(10^{-14})$  程度を実現しており, 十分な精度で計算できていると考えられる.

### 3.2 Crowdy 渦斑族

Crowdy は, 原点を中心に 1 個の渦斑 (渦度  $\omega$ ) とその周りに  $N$  個の点渦 (強さ  $\gamma$ ) を回転対称に配置した場合について, 厳密解を具体的に示した [1]. Crowdy 渦斑は, 回転速度  $v_0(z) = i\omega z/2$  に関して相対的に静止した渦斑であり, その境界を等角写像を用いて解析的に書き下すことができる. また, Crowdy 渦斑は連続な 1-パラメータ族をなす. 厳密解の境界の媒介変数表示においてパラメータを臨界値にとると, カスプを  $N$  個もった星型形となり面積が極大となる (ただし滑らかさを失っているためこれは解ではない).

図 2 に  $N = 4$  の場合の数値結果を示す. 計算には多様体上の Newton 法をもちいた. これは点渦の強さ  $\gamma$  を変えて得られる渦斑族である. Pierrehumbert 渦斑族の場合と同様に, 渦斑の面積が大きくなるにつれてカスプをもった形状に近づく様子を観察できる. いずれの渦斑においても, 絶対残差は  $O(10^{-14})$  を実現している. さらに, モーメントと呼ばれる形状特徴量によって厳密解との絶対誤差はかったところ, 4 の倍数次数において  $O(10^{-7})$ , 他の次数で  $O(10^{-17})$  となった. よって, 数値計算により得た渦斑形状は厳密解に十分近く, 提案手法の精度は高いといえる.

## 4 結論

定常渦斑問題に対する定式化と数値計算をおこなった. 定常 Euler 方程式の渦斑解を等高線力学の相対的平衡状態とみなすことで, 速度場に由来する形状依存の写像  $\mathcal{F}$  に関する零点問題に帰

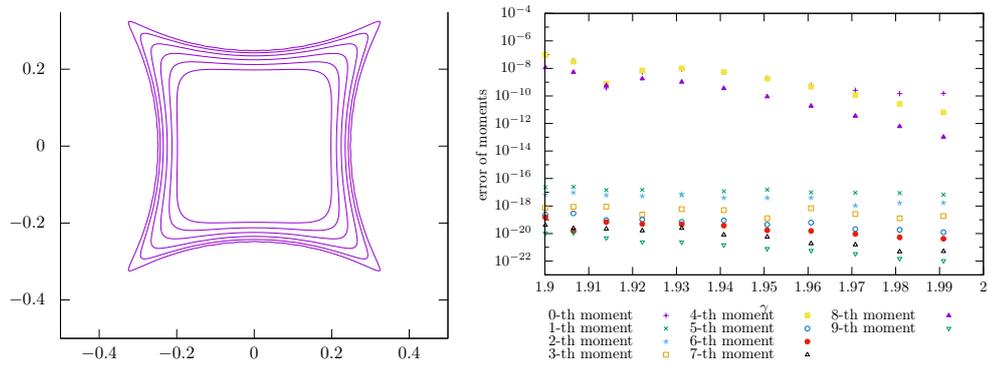


図 2: 左図: パラメータを  $\omega = 1.0$  で固定,  $\gamma$  を 1.99 (内側) から 1.90 (外側) まで変化させた渦斑族. 右図:  $k$  次モーメント (形状特徴量) について, 得られた数値解と厳密解との絶対誤差 (横軸は  $\gamma$ ).

着した. 形状微分のアイデアを応用してその Gâteaux 微分  $d\mathcal{F}$  を具体的に得た. Fourier 級数による離散化で Newton 法を適用し, Pierrehumbert 渦斑族および Crowdy 渦斑族を数値計算した. また, 所与の面積をもつ渦斑形状を計算するために, 多様体上の Newton 法を応用できることも示した.

今後の課題は, 提案手法を他の場合に適用することと, 提案手法における数値解析 (特に計算機援用証明の実現に向けた数学解析) である.

また, 計算機援用解析の実現に向けては, 写像  $\mathcal{F}$  およびその微分  $d\mathcal{F}$  の打ち切りなどに対する不等式評価を得たい. 構成的不等式評価を得ることができれば, それを用いて Krawczyk 作用素を定めることができ, 計算機援用証明が可能になると期待している.

## 参考文献

- [1] D. G. Crowdy. Exact solutions for rotating vortex arrays with finite area core. *Journal of Fluid Mechanics*, 469:209–235, 2002.
- [2] Alan Elcrat, Bengt Fornberg, and Kenneth Miller. Some steady vortex flows past a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 409:13–27, 2000.
- [3] Federico Gallizio, Angelo Iollo, Bartosz Protas, and Luca Zannetti. On continuation of inviscid vortex patches. *Physica D*, 239:190–201, February 2010.
- [4] R. T. Pierrehumbert. A family of steady, translating vortex pairs with distributed vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, 99(1):129–144, July 1980.
- [5] H. M. Wu, E. A. Overman II, and Norman J. Zabusky. Steady-state solutions of the euler equations in two dimensions: Rotating and translating v-states with limiting cases. i. numerical algorithms and results. *Journal of Computational Physics*, 53(1):42–71, January 1984.
- [6] Norman J. Zabusky, M. H. Hughes, and K. V. Roberts. Contour dynamics for the euler equations in two dimensions. *Journal of Computational Physics*, 30(1):96–106, January 1979.

# 有限位数の巡回同型を持つファイバー曲面のスロープについて

榎園 誠\*

大阪大学大学院理学研究科数学専攻, 2016年2月

この度は第13回城崎新人セミナーに参加させていただき、有意義な時間を過ごせました。運営委員の方々に深く感謝申し上げます。

## 1 研究の背景と主結果

代数多様体は全て  $\mathbb{C}$  上で考える。  $f: S \rightarrow B$  が種数  $g$  のファイバー曲面であるとは、非特異な射影曲面  $S$  から非特異な射影曲線  $B$  への全射正則写像であって、一般ファイバーは種数  $g$  の非特異射影曲線であるものである。ファイバー曲面の数値的な不変量として、次のようなものがある：

$$\begin{aligned}\chi_f &:= \chi(\mathcal{O}_S) - (g-1)(b-1), \\ K_f^2 &= K_S^2 - 8(g-1)(b-1), \\ e_f &:= e(S) - 4(g-1)(b-1).\end{aligned}$$

ここで、  $K_f := K_S - f^*K_B$  は相対標準因子であり、  $b$  は底曲線  $B$  の種数、  $e(S)$  は  $S$  の（解析的な）位相のオイラー数である。これらの不変量に関して、次のことが知られている。但し、  $f$  は相対極小で  $g \geq 2$  とする。

- (Noether)  $12\chi_f = K_f^2 + e_f$ .
- (Arakelov)  $K_f$  はネフである。
- (上野)  $\chi_f \geq 0$  であり、  $\chi_f = 0$  であることと  $f$  は局所自明、つまり正則ファイバー束であることは同値。
- (Segre)  $e_f \geq 0$  であり、  $e_f = 0$  であることと  $f$  のファイバーは全て非特異であることは同値。

本稿では断らない限り  $f: S \rightarrow B$  は局所自明でない相対極小な種数  $g \geq 2$  のファイバー曲面であるとする。このとき上野の定理より  $\chi_f > 0$  なので、二つの不変量の比  $\lambda_f := K_f^2/\chi_f$  が定義できる。これをファイバー曲面  $f$  のスロープという。上記の事実から  $0 < \lambda_f \leq 12$  であることが分かる。  $\lambda_f = 12$  のファイバー曲面  $f$  は発見者の名前を冠し小平ファイバー曲面と呼ばれ、Segre の定理より  $f$  のファイバーは全て非特異である。スロープの下限については、次の不等式が知られている。

- (スロープ不等式 [6])  $\lambda_f \geq 4 - \frac{4}{g}$ .

\*m-enokizono@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

等号が成立するときは超楕円曲線を一般ファイバーに持つ場合（以下、超楕円ファイバー曲面と呼ぶ）に限り、非超楕円ファイバー曲面の場合はこの不等式は sharp ではない。そのため、非超楕円ファイバー曲面のスロープの下限に関し多くの研究がなされている。この方面の研究に関しては [4] に詳しい。さて、ファイバー曲面のスロープに関して、以下のことが信じられている。

**問題 1.1** ファイバー曲面のスロープの下限は一般ファイバーの”特殊性”が大きいほど小さくなる。曲線の”特殊性”をはかる一つの不変量として、ゴナリティーというものがある：

**定義 1.2** 種数  $g \geq 2$  の非特異代数曲線  $X$  に対し、

$$\text{gon}(X) := \min\{\deg(\varphi) \mid \varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ は全射正則写像}\}$$

を  $X$  のゴナリティーという。

$2 \leq \text{gon}(X) \leq [(g+3)/2]$  であり、 $X$  がモジュライの意味で一般ならば  $\text{gon}(X) = [(g+3)/2]$  である。また、 $\text{gon}(X) = 2$  であることと  $X$  は超楕円曲線であることは同値である。ファイバー曲面  $f: S \rightarrow B$  の非特異ファイバーのゴナリティーは有限個を除き等しいことが知られている。その値を  $\text{gon}(f)$  とかき、ファイバー曲面  $f$  のゴナリティーと呼ぶ。上に書いた問題の一つの定式化として  $\text{gon}(f) = n$  となる種数  $g$  のファイバー曲面のスロープの下限を  $n$  と  $g$  を用いて表すということが考えられるが、次の問題は未解決である：

**問題 1.3**  $\text{gon}(f) = 3$  である種数  $g$  のファイバー曲面  $f: S \rightarrow B$  は

$$\lambda_f \geq \frac{24(g-1)}{5g+1}$$

を満たす。

これは種数が低い場合や特異ファイバーが全て半安定な場合では正しいことが知られている [5]。ファイバー曲面  $f: S \rightarrow B$  を底曲線  $B$  の関数体上の曲線とみれば、 $\text{gon}(f) = n$  である種数  $g$  のファイバー曲面を考えるのに、線職面  $W \rightarrow B$  上の  $n$  次の分岐被覆  $S' \rightarrow W$  から（特異点解消と (-1) 曲線の縮約により）得られるファイバー曲面  $f: S \rightarrow B$  を考えることは自然である。しかし一般に 3 次以上の分岐被覆を考えるのは難しい。そこで最も簡単な  $n$  次の（単純）巡回被覆の場合を考えてみる。

**定義 1.4** 種数  $g$  のファイバー曲面  $f: S \rightarrow B$  が  $(g, h, n)$  型の **primitive cyclic covering fibration** であるとは、相対極小とは限らない種数  $h \geq 0$  のファイバー曲面  $\tilde{\varphi}: \tilde{W} \rightarrow B$  と  $n$  次の巡回分岐被覆  $\tilde{\theta}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{W}$  があって、 $f$  が  $\tilde{f} := \tilde{\varphi} \circ \tilde{\theta}$  の相対極小モデルであることとする。ここで、 $\tilde{\theta}$  の分岐因子  $\tilde{R}$  は非特異で、 $\exists L \in \text{Pic}(\tilde{W})$  s.t.  $\tilde{R} \in |nL|$ ,  $\tilde{S} = \text{Spec}_{\tilde{W}} \left( \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{\tilde{W}}(-iL) \right)$  と仮定する。

**注意 1.5** (1)  $\tilde{\theta}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{W}$  を一般ファイバーに制限した曲線の間  $n$  次巡回被覆の分岐点の個数を  $r$  とすると、これは  $n$  の倍数であり、Hurwitz の公式より次を満たす：

$$r = \frac{2(g-1-n(h-1))}{n-1}.$$

(2) 種数  $g$  の超楕円ファイバー曲面は  $(g, 0, 2)$  型の primitive cyclic covering fibration であり、逆も自明に正しい。

(3) 小平ファイバー曲面の具体例（小平 [3], Kas [2]）は、種数が 2 以上である 2 曲線の直積の巡回分岐被覆であり、primitive cyclic covering fibration である。

すると、このクラスのファイバー曲面に対しスロープの下限を決定することができた。以下が主定理である。

**定理 1.6** ([1])  $f: S \rightarrow B$  を  $(g, h, n)$  型の primitive cyclic covering fibration とする。  $h \geq 1$  かつ  $g \geq (2n-1)(2hn+n-1)/(n+1)$  とすると、

$$\lambda_f \geq \lambda_{g,h,n} := \frac{24(n-1)(g-1)}{2(2n-1)(g-1) - n(n+1)(h-1)}$$

が成立する。

**注意 1.7**  $\lambda_{g,h,n}$  は  $h, n$  に関し単調増加であり、  $\lambda_{g,0,2} = 4(g-1)/g$  はスロープ不等式の下限に一致する。  $\lambda_{g,0,3} = 24(g-1)/(5g+1)$  であり、問題 1.3 は  $(g, 0, 3)$  型の primitive cyclic covering fibration に関しては正しい。

**例 1.8**  $r := 2(g-1-n(h-1))/(n-1) \in n\mathbb{Z}_{>0}$  を満たす任意の整数  $g \geq 2, h \geq 0, n \geq 2$  に対し、  $(g, h, n)$  型の primitive cyclic covering fibration  $f: S \rightarrow B$  で定理 1.6 のスロープ不等式の等号が成立する例を構成する。  $B, \Gamma$  をそれぞれ種数  $b, h$  の非特異な射影曲線とし、  $\delta_1, \delta_2$  をそれぞれ  $B, \Gamma$  上の次数  $N, M := r/n$  の因子とする。  $N$  を十分大きくとることにより、因子  $\delta := p_1^* \delta_1 + p_2^* \delta_2$  は base point を持たないと仮定してよい。ここで、  $p_1: B \times \Gamma \rightarrow B, p_2: B \times \Gamma \rightarrow \Gamma$  はそれぞれ第 1, 第 2 成分への射影である。このとき Bertini の定理より、非特異な有効因子  $R \in |n\delta|$  がとれ、これを分岐跡とする  $n$  次の巡回分岐被覆  $\theta: S \rightarrow B \times \Gamma$  がとれる。こうして、primitive cyclic covering fibration  $f := p_1 \circ \theta: S \rightarrow B$  を得る。これが求めるものである。実際、Hurwitz の公式を一般ファイバーへの制限  $\theta|_F: F \rightarrow \Gamma = \{t\} \times \Gamma$  に用いて  $f$  の一般ファイバーの種数が  $g$  であることが分かり、  $K_{p_1} = p_2^* K_\Gamma$  と  $\chi_{p_1} = 0$  から  $K_f^2, \chi_f$  が

$$\begin{aligned} K_f^2 &= (\theta^*(K_{p_1} + (n-1)\delta))^2 \\ &= n(p_1^*(n-1)\delta_1 + p_2^*((n-1)\delta_2 + K_\Gamma))^2 \\ &= 2n(n-1)N((n-1)M + 2(h-1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_f &= n\chi_{p_1} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j\delta(j\delta + K_{p_1}) \\ &= \frac{1}{4}n(n-1)\delta K_{p_1} + \frac{1}{12}n(n-1)(2n-1)\delta^2 \\ &= \frac{1}{4}n(n-1)N(2h-2) + \frac{1}{12}n(n-1)(2n-1)2NM \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)N(3(h-1) + (2n-1)M) \end{aligned}$$

と計算できる。従ってスロープの値は

$$\begin{aligned} \frac{K_f^2}{\chi_f} &= \frac{12(2(h-1) + (n-1)M)}{3(h-1) + (2n-1)M} \\ &= \frac{24(n-1)(g-1)}{2(2n-1)(g-1) - n(n+1)(h-1)} \\ &= \lambda_{g,h,n} \end{aligned}$$

となる。

## 参考文献

- [1] M. Enokizono, Slopes of fibered surfaces with a finite cyclic automorphism. to appear in Michigan Math. J.
- [2] A. Kas, On deformations of a certain type of irregular algebraic surface, Amer. J. Math. **90** (1968), 789–804.
- [3] K. Kodaira, A certain type of irregular algebraic surfaces, J. Anal. Math. **19** (1967), 207–215.
- [4] 今野 一宏, 代数曲線束の地誌学, 内田老舗園
- [5] Z. E. Stankova-Frenkel, Moduli of trigonal curves, J. Alg. Geom. **9** (2000), 607–662.
- [6] G. Xiao, Fibred algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. **276** (1987), 449–466.

# 複素三次体の一般 Greenberg 予想について

片岡 武典\*

東京大学数理科学研究科, 2016 年 2 月

## 1 岩澤理論の概観

本講演のタイトルにある一般 Greenberg 予想は, 数論の中でも岩澤理論という分野に属する未解決問題である. まずは岩澤理論の基本事項を概観しよう (詳細は教科書 [Wa] を参照).

$k$  を代数体, すなわち有理数体の有限次拡大とする. このとき  $k$  のイデアル類群  $\text{Cl}(k)$  という重要な有限アーベル群があり, その構造は数論における古典的な研究対象である.  $p$  を固定された素数とし, イデアル類群  $\text{Cl}(k)$  そのものではなく, その  $p$ -Sylow 部分群  $A(k)$  を考える. 大域類体論によれば,  $L(k)$  を  $k$  の最大不分岐アーベル副  $p$  拡大 (すなわち Hilbert  $p$ -類体) とするとき, Artin 写像による自然な同型

$$A(k) \simeq \text{Gal}(L(k)/k)$$

がある. すなわち  $X(k) = \text{Gal}(L(k)/k)$  とおけば  $A(k) \simeq X(k)$  である.

岩澤は代数体  $k$  が規則的に動くときに  $X(k)$  の振る舞いを考察した. 一般に  $K/k$  をガロア拡大とする. 特に岩澤が考察したのは  $K/k$  が  $\mathbb{Z}_p$  拡大, すなわちガロア群が  $p$  進整数環  $\mathbb{Z}_p$  の位相加法群と同型である場合である. 例えば各代数体  $k$  は, その円分  $\mathbb{Z}_p$  拡大と呼ばれる  $\mathbb{Z}_p$  拡大  $k^{\text{cyc}}$  を持っており, 実際この円分  $\mathbb{Z}_p$  拡大が岩澤理論的に最も興味深い.

とにかく  $K/k$  をガロア拡大としたとき, 先ほどと同様に  $L(K)$  を  $K$  の最大不分岐アーベル副  $p$  拡大とし,  $X(K)$  をそのガロア群  $\text{Gal}(L(K)/K)$  とおく. すると自然な作用

$$\text{Gal}(K/k) \curvearrowright X(K)$$

が,  $\gamma \cdot x = \tilde{\gamma}x\tilde{\gamma}^{-1}$  によって定まる. ここに  $\tilde{\gamma}$  は  $\gamma$  の  $\text{Gal}(L(K)/k)$  への任意の持ち上げである. さらに  $X(K)$  が副  $p$  群であることから, この作用は完備群環の作用

$$\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K/k)]] \curvearrowright X(K)$$

に延長される. このときガロア降下の発想により,

$X(K)$  の  $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K/k)]]$  加群としての構造は,  $K/k$  の中間にある代数体  $k'$  たちの  $X(k')$  をコントロールする

と期待される.

実際に,  $K/k$  が  $\mathbb{Z}_p$  拡大であるときには,  $X(K)$  が  $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K/k)]]$  上の有限生成ねじれ加群であることが示され, その帰結として次の定理が得られる.

---

\*tkataoka@ms.u-tokyo.ac.jp

定理 1.1 (岩澤類数公式).  $K/k$  を  $\mathbb{Z}_p$  拡大とするととき,  $X(K)$  の構造から定まるある非負整数  $\lambda, \mu$ , 及びある整数  $\nu$  が存在して, 十分大きい  $n$  について

$$\#X(k_n) = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

となる. ここに  $k_n$  は  $K/k$  の中間体であって  $k$  上の拡大次数が  $p^n$  である (唯一の) ものを表す.

岩澤理論では  $X(K)$  の  $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K/k)]]$  加群としての構造を研究する. 特にその構造が  $p$  進  $L$  関数という解析的対象と結びつくというのがいわゆる岩澤予想であるが, 本稿では専ら  $X(K)$  の代数的側面を扱う.

## 2 一般 Greenberg 予想

Greenberg は, 与えられた代数体  $k$  の様々な  $\mathbb{Z}_p$  拡大を同時に扱うため, それら全ての合成体  $\tilde{k}$  を導入した. その体  $\tilde{k}$  の大きさは大域類体論によりおおよそ分かり, Leopoldt 予想<sup>1</sup> の下で,

$$\text{Gal}(\tilde{k}/k) \simeq \mathbb{Z}_p^{1+r_2(k)}$$

となる. ここに  $r_2(k)$  は  $k$  の複素素点の数である. 例えば  $k$  が総実体である場合, Leopoldt 予想の下で,  $k$  の  $\mathbb{Z}_p$  拡大はただ一つ  $k^{\text{cyc}}$  のみである.

$\tilde{k}/k$  のように, ある整数  $d$  によってガロア群が  $\mathbb{Z}_p^d$  と同型なガロア拡大  $K/k$  を一般に多重  $\mathbb{Z}_p$  拡大という. このとき Greenberg は一般に  $X(K)$  が  $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K/k)]]$  上の有限生成ねじれ加群であることを示した [Gr1]<sup>2</sup>. その帰結として Cuoco-Monsky は定理 1.1 の多重版を示している [CuMo]. さらに Greenberg は  $K = \tilde{k}$  に関して次の予想を立てた (一般 Greenberg 予想, Greenberg's generalized conjecture, GGC).

予想 2.1 ([Gr3]).  $X(\tilde{k})$  は完備群環  $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(\tilde{k}/k)]]$  上の擬零加群であろう.

ここに擬零とは有限生成かつ零化イデアルの高さが 2 以上であることを意味し, 大雑把に言えばとても小さいということである.

いくつかの注意を述べる.

- (1) 一般と名の付くからには一般ではないものもあるわけで, それは次の予想である (Greenberg 予想, Greenberg's conjecture, GC).

予想 2.2 ([Gr2]).  $k$  が総実体のとき,  $X(k^{\text{cyc}})$  は位数有限であろう.

Leopoldt 予想の下で, 総実体についての GGC は GC と同値である.

- (2) GGC および GC には, 理論的な根拠が無く, あくまでこれまでに反例が見つかっていないというだけのようなのである.  $k = \mathbb{Q}$  の場合に GC(=GGC) が成り立つことは簡単に分かるが,  $k$  が実二次体の場合の GC(=GGC) や虚二次体の場合の GGC の時点で既に未知である. 実二次体の GC は, 成立する実例が多く得られているようである. 虚二次体の GGC に関する先行研究は次節で述べる.

<sup>1</sup>Leopoldt 予想は大域的な元たちの  $p$  進的な独立性に関する予想であり,  $k/\mathbb{Q}$  がアーベル拡大である場合には成立することが知られている. 本稿では Leopoldt 予想が成立すると知られている場合あるいは仮定する場合しか扱わない.

<sup>2</sup>正確には [Gr1] において主張されているのは  $K = \tilde{k}$  の場合のみであるが, 証明を少し修正することで一般の場合にも通用する.

- (3) GGC が謎に包まれているという話をする．GGC は  $X(\tilde{k})$  が擬零であるという主張だったが，実は次の問題すらも解決されていないようである．

問題 2.3.  $k^{\text{cyc}}$  を含む  $k$  の  $\mathbb{Z}_p^d$  拡大  $K$  ( $d \geq 2$ ) であって， $X(K)$  が  $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(K/k)]]$  加群として擬零でないものはあるだろうか．

なお  $K$  が  $k^{\text{cyc}}$  を含まない場合や  $d = 1$  (すなわち  $K = k^{\text{cyc}}$ ) の場合には， $X(K)$  が擬零でないものは比較的容易に構成できる<sup>3</sup>．また  $K/k$  が非可換も許す拡大とするとときに類似の主張には反例があることが示されている [HaSh]．

- (4) GGC がわかると何が嬉しいかという話をする．知られていた帰結としては，既に触れた Cuoco-Monsky の定理 (岩澤類数公式の多重版) における不変量の情報が得られる．また手前味噌ながら筆者の結果を雰囲気だけ紹介しておく．

定理 2.4 ([Ka2]). 代数体  $k$  について GGC が成立すると仮定すると，いくつかの緩い仮定のもとで， $k$  の多くの  $\mathbb{Z}_p$  拡大  $K$  に付随する岩澤  $\lambda, \mu$  不変量はとても小さい．

### 3 主定理と計算結果

まず先行研究を紹介する．以下の場合に GGC の十分条件が与えられている．

- 虚二次体 (Minardi [Mi]) ．
- 虚アーベル四次体で， $p$  が完全分解 (伊藤 [It]) ．
- CM 体で， $p$  が完全分解 (藤井 [Fu]) ．
- $\mathbb{Q}(\mu_p)$  (Sharifi [Sh]) ．

藤井の結果は伊藤の結果の完全な一般化を与えている．また  $\mathbb{Q}(\mu_p)$  において  $p$  は完全分岐であることから，Sharifi の結果は他 3 つとはかなり毛色が異なる．

本講演での主定理は，Minardi，伊藤，藤井の流れを汲み， $k$  が複素三次体の場合に GGC の十分条件を与えるものである．その主張は次の通り．

定理 3.1 ([Ka1]).  $k$  を複素三次体，すなわち  $[k : \mathbb{Q}] = 3$  かつ複素素点をもつものとする．次の仮定の下で  $k$  についての GGC は成り立つ．

- (a)  $p$  は  $\tilde{k}/\mathbb{Q}$  において有限分解である．
- (b)  $A(k) = 0$ ，すなわち  $p$  は  $k$  の類数を割らない．
- (c)  $p$  が  $k/\mathbb{Q}$  において完全分解しているならば， $\varepsilon$  を  $k$  の基本単数<sup>4</sup> としたとき，

$$\begin{cases} p^2 \nmid (\varepsilon^{p-1} - 1) & (p \geq 3) \\ 16 \nmid (\varepsilon^2 - 1) & (p = 2) \end{cases}$$

注意. 条件 (a) は常に成立すると筆者は予想しているが，その証明は難しそうである．実際それは Leopoldt 予想と同じく大域的な元の  $p$  進独立性と同値である．また他の条件 (b), (c) はもっと緩くできるが，記述が長くなるので省略する．

<sup>3</sup>前者については [Cu]，後者については例えば [HaSh] を参照．

<sup>4</sup> $k$  の単数群は  $\mathbb{Z}$  上階数 1 であるから，基本単数の概念がある．

例 3.2.  $k$  を判別式の絶対値が 10,000 以下の複素三次体全てを走らせる．そのような体は 1,520 個ある (データベース LMFDB からリストを得た)．また素数  $p$  は 1,000 以下を走らせる (168 個)．こうして得られる  $1,520 \times 168 = 255,360$  組のうち, 165 組を除いては緩められた条件 (a), (b), (c) を満たすことが確かめられる (この計算は計算パッケージ PARI/GP を用いて行った)．もちろん (a) はこの範囲全てで成立した．

## 4 主定理の証明の概略

細かな技術を除いて大雑把に言うと, 主定理 3.1 の証明は  $k$  が虚二次体の場合の [Mi] の手法によって為される．というのも  $k$  が複素三次体のとき, Leopoldt 予想が自明な理由で成立するため,  $\tilde{k}/k$  は  $\mathbb{Z}_p^2$  拡大となり,  $k$  が虚二次体のときにも  $\tilde{k}/k$  は  $\mathbb{Z}_p^2$  拡大であるから, 状況が似通っているのである．

条件 (c) から示唆されるように,  $p$  が  $k$  において完全分解する場合が最も難しいので, 以降その場合のみ考える．一般に  $k$  の素点の有限集合  $S$  に対し,  $M_S(k)$  によって  $k$  の最大  $S$  外不分岐アーベル副  $p$  拡大を表すことにする．すると条件 (b), (c) により,  $p$  の上のある 2 つの素点  $p_i (i = 1, 2)$  について  $M_{\{p_i\}}(k) = k$  がわかる． $K$  を  $k$  の  $\{p_1, p_2\}$  外不分岐な唯一の  $\mathbb{Z}_p$  拡大とする．

定理の証明は, まず  $X(K) = 0$  を示し, それを用いて  $X(\tilde{k}) \sim 0$  を示すという流れで行われる<sup>5</sup>．

### $X(K) = 0$ の証明

中山の補題により  $X(K)_{\text{Gal}(K/k)} = 0$  ならば  $X(K) = 0$  であることに注目する．ガロア群の作用が内部自己同型で定まっていたことから,  $\mathcal{L}$  を  $k$  の  $L(K)$  内の最大アーベル拡大とすると  $X(K)_{\text{Gal}(K/k)} = \text{Gal}(\mathcal{L}/K)$  となることがわかる．そこで  $\mathcal{L} = K$  を示せばよい． $p_2$  の  $\mathcal{L}/k$  での惰性体は  $M_{\{p_1\}}(k)$  に入っているから, 仮定  $M_{\{p_1\}}(k) = k$  と合わせて,  $p_2$  は  $\mathcal{L}/k$  において完全分岐しているはずである．一方  $\mathcal{L}/K$  は不分岐だから, 期待通り  $\mathcal{L} = K$  を得る．

### $X(\tilde{k}) \sim 0$ の証明

証明の方針は先ほどと似ている．まず単なる加群の議論により,  $X(\tilde{k})_{\text{Gal}(\tilde{k}/K)}$  が位数有限ならば  $X(\tilde{k}) \sim 0$  であることがわかる．そして  $\mathcal{L}$  を  $K$  の  $L(\tilde{k})$  内の最大アーベル拡大とすると  $X(\tilde{k})_{\text{Gal}(\tilde{k}/K)} = \text{Gal}(\mathcal{L}/\tilde{k})$  となる．そこで  $\mathcal{L}/\tilde{k}$  が有限拡大であることを示せばよい．

仮定 (a) により,  $K/k$  の中間代数体  $k'$  であって,  $p$  の上の任意の素点が  $K/k'$  で不分解であるようなものが取れる．このとき  $\mathcal{L}/k'$  がアーベル拡大であることが次のようにして示される．

- $\text{Gal}(K/k')$  の  $\text{Gal}(\mathcal{L}/K)$  への (内部自己同型による) 作用が自明であることを示せばよい．
- $X(K) = 0$  であったから,  $\text{Gal}(\mathcal{L}/K)$  は  $p$  の上の素点の惰性群で生成されている．
- それらの惰性群は  $\text{Gal}(K/k')$  の作用により安定である．
- $\mathcal{L}/\tilde{k}$  は不分岐であるから, それらの惰性群は自然に  $\text{Gal}(\tilde{k}/K)$  に単射に入る．
- $\tilde{k}/k'$  はアーベルなので  $\text{Gal}(K/k')$  の  $\text{Gal}(\tilde{k}/K)$  への作用は自明である．

さて  $\mathcal{L}/k'$  がアーベル拡大であることがわかった． $i = 1, 2$  に対して仮定  $M_{\{p_{3-i}\}}(k) = k$  により  $p_i$  は  $K/k$  において完全分岐しているから,  $p'_i$  を  $p_i$  の上にある  $k'$  の唯一の素点とする．このとき  $\mathcal{L}/\tilde{k}$  は不分岐なので  $p'_i$  の  $\mathcal{L}/k'$  における惰性群  $I_{p'_i}$  は自然に  $\tilde{k}/k'$  における惰性群と同型であり, そ

<sup>5</sup>条件 (b), (c) を緩めた場合,  $X(K) = 0$  とは限らず, より込み入った証明を必要とする．

の  $\mathbb{Z}_p$ -rank は 1 である . 故に  $I_{p'_1} + I_{p'_2}$  の  $\mathbb{Z}_p$ -rank はたかだか 2 である . 一方  $\mathcal{L}$  の  $I_{p'_1} + I_{p'_2}$  による固定体は  $M_{\{p_3\}}(k')$  に含まれているが , 実は  $M_{\{p_3\}}(k')/k'$  の有限拡大であることがわかる (アーベル体についての Leopoldt 予想の証明の議論を用いる) . 以上により  $\text{Gal}(\mathcal{L}/k')$  の  $\mathbb{Z}_p$ -rank は 2 であり , これは  $\mathcal{L}/\tilde{k}$  が有限拡大であることを意味している . これで主定理 3.1 の証明が終わった .

## 参考文献

- [Cu] A. Cuoco, *Generalized Iwasawa invariants in a family*, *Compositio Math.*, 51 (1), 89–103, 1984.
- [CuMo] A. Cuoco and P. Monsky, *Class numbers in  $\mathbb{Z}_p^d$ -extensions*, *Math. Ann.*, 255 (2), 235–258, 1981.
- [Fu] S. Fujii, *On Greenberg’s generalized conjecture for CM-fields*, to appear in *J. reine angew. Math.*
- [Gr1] R. Greenberg, *The Iwasawa invariants of  $\Gamma$ -extensions of a fixed number field*, *Amer. J. Math.*, 95, 204–214, 1973.
- [Gr2] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, *Amer. J. Math.*, 98 (1), 263–284, 1976.
- [Gr3] R. Greenberg, *Iwasawa theory—past and present*, In *Class field theory—its centenary and prospect (Tokyo, 1998)*, volume 30 of *Adv. Stud. Pure Math.*, 335–385, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.
- [HaSh] Y. Hachimori and R. T. Sharifi, *On the failure of pseudo-nullity of Iwasawa modules*, *J. Algebraic Geom.*, 14 (3), 567–591, 2005.
- [It] T. Itoh, *On multiple  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of imaginary abelian quartic fields*, *J. Number Theory*, 131 (1), 59–66, 2011.
- [Ka1] T. Kataoka, *On Greenberg’s generalized conjecture for complex cubic fields*, preprint.
- [Ka2] T. Kataoka, *A consequence of Greenberg’s generalized conjecture on Iwasawa invariants of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, arXiv:1602.07916.
- [Mi] J. V. Minardi, *Iwasawa modules for  $\mathbb{Z}_p^d$ -extensions of algebraic number fields*, Thesis (Ph.D.)—University of Washington, 1986.
- [Sh] R. T. Sharifi, *On Galois groups of unramified pro- $p$  extensions*, *Math. Ann.*, 342 (2), 297–308, 2008.
- [Wa] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*, volume 83 of *Graduate Texts in Mathematics*, second edition, Springer-Verlag, New York, 1997.

# 2次元定常輸送方程式の解の正則性

川越 大輔\*

京都大学大学院情報学研究科, 2016年2月

## 1 問題設定

$\Omega$  を領域  $\mathbb{R} \times (0, 1)$ ,  $S^1$  を単位円とし, 次の微分積分方程式を考える:

$$-\xi \cdot \nabla I(x, \xi) - (\mu_a + \mu_s)I(x, \xi) + \mu_s \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x, \xi') d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times S^1. \quad (1)$$

ただし,  $\nabla$  は変数  $x$  についての微分演算子,  $\cdot$  はベクトル空間  $\mathbb{R}^2$  の Euclid 内積,  $d\sigma$  は  $S^1$  上の線素とする. ここで,  $\mu_a$  および  $\mu_s$  は非負の定数,  $p$  は  $S^1 \times S^1$  上の正值連続関数であり,

$$\int_{S^1} p(\xi, \xi') d\sigma_{\xi'} = 1$$

を満たすことを仮定する. 本稿では, 方程式 (1) を定常輸送方程式と呼ぶ.

定常輸送方程式 (1) には, 通常次の境界条件が課される. まず, 境界  $\Gamma_-$  を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \Gamma_- &:= \{(x, \xi) | x \in \partial\Omega, \xi \in S^1, n(x) \cdot \xi < 0\} \\ &= \{(x_1, 0, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \pi\} \cup \{(x_1, 1, \xi) | x_1 \in \mathbb{R}, -\pi < \theta < 0\}. \end{aligned}$$

ただし,  $n(x)$  は  $\partial\Omega$  の点  $x$  における外向き単位法線ベクトルである. そして,  $I_0$  を  $\Gamma_-$  上の関数として, 次の境界条件を課す:

$$I(x, \xi) = I_0(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Gamma_-. \quad (2)$$

本稿では, 定常輸送方程式の境界値問題 (1) - (2) における古典解の存在と一意性, さらに境界値の滑らかさと解の滑らかさとの関係について述べる. ただし, 本稿でいう古典解  $I$  とは,  $I \in C^1(\Omega \times S^1) \cup C((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  であって,  $\Omega \times S^1$  上で (1) を満たし,  $\Gamma_-$  上で (2) を満たすものである.

## 2 記法

本稿では, 関係  $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$  により単位円  $S^1$  と区間  $(-\pi, \pi]$  を同一視する. また, 集合  $X$  に対して,  $X$  上の  $C^m$  級関数であって,  $m$  階までのすべての偏導関数が  $X$  で有界であるもの全体を  $B^m(X)$  と書く. ただし, 本稿では変数  $x$  による偏微分のみを考え, 変数  $\xi$  または変数  $\theta$  による偏微分は考えないものとする.  $x \in \Omega$  を成分ごとに  $x = (x_1, x_2)$  と書き, それにともない  $I(x, \xi)$  を  $I(x_1, x_2, \xi)$  などと書くこともある. また,  $B^0(X)$  上の最大値ノルムを  $\|\cdot\|_X$  と表す.

\*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

### 3 主結果

定理 1.  $I_0 \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$ ,  $\frac{\partial I_0}{\partial x_1} \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$  かつ  $\mu_a > 0$  と仮定する. このとき, 境界値問題 (1) - (2) はただ 1 つの古典解  $I$  をもつ.

定理 2. 定理 1 の仮定に加えて,  $\frac{\partial^2 I_0}{\partial x_1^2} \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$  が成り立つとする. このとき, 解  $I$  は  $C^2(\Omega \times S^1)$  に属する.

### 4 解の構成

定常輸送方程式 (1) を特性直線に沿って積分することで, 次の積分方程式が得られる. 当座はこの積分方程式の解を, 境界値問題 (1)-(2) の解と呼ぶことにする.

定義 1.  $I \in \mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  が次の積分方程式を満たすとき,  $I$  は定常輸送方程式の境界値問題 (1) - (2) の解であるという.

$x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$  のとき,

$$I(x, \xi) = \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi) + \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (3)$$

$x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき,

$$I(x, \xi) = \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) I_0(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 1, \xi) + \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (4)$$

なお, この積分方程式は  $\theta = 0$  または  $\pi$  の場合を除いて定義されており, そのため, この解が古典解であることは別途確認が必要であることに注意しておく.

まずは, 解の存在を構成によって示す.  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上の関数列  $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$  を次のように帰納的に定義する.  $I^{(0)}$  を

- $x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$  のとき,  $I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi)$ .
- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき,  $I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) I_0(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 1, \xi)$ .
- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$  のとき,  $I^{(0)}(x, \xi) := 0$ .

で定義する.  $I^{(n)}$  まで定義できたとして,  $I^{(n+1)}$  を

- $x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$  のとき,
- $$I^{(n+1)}(x, \xi) := \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$
- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき,
- $$I^{(n+1)}(x, \xi) := \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$  のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := \mu_s \int_0^\infty \exp(-(\mu_a + \mu_s)t) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - t \cos \theta, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'}.$$

で定義する. このとき, 簡単な計算により, 次の命題が成り立つことが分かる.

命題 1.  $I_0 \in \mathcal{B}^0(\Gamma_-)$  ならば, すべての  $n \geq 0$  に対して,  $I^{(n)} \in \mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  が成り立つ.

この命題を示す際に, 次の補題が得られる.

補題 1.  $I^{(n)} \in \mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  と仮定する. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$\|I^{(n+1)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I^{(n)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-}.$$

命題 1 と補題 1 から,  $I(x, \xi) := \sum_{n=0}^\infty I^{(n)}(x, \xi)$  が  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上絶対一様収束し,  $\mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  に属することが分かる. また, この  $I(x, \xi)$  が解となっていることも級数の計算により確認できる. 以上より, 解の存在が示された.

## 5 解の一意性

次に, 解の一意性を示す.  $I_1, I_2$  を解とし, その差を  $I$  とおく. すなわち,  $I := I_1 - I_2$ . このとき, 解の定義から  $I$  は  $\mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  に属し, 次の積分方程式を満たすことが分かる:

$x \in [0, 1), \theta \in (0, \pi)$  のとき,

$$I(x, \xi) = \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (5)$$

$x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき,

$$I(x, \xi) = \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (6)$$

(5), (6) を評価することで, 不等式  $\|I\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-}$  を得る. この不等式からただちに,  $I = 0$  すなわち  $I_1 = I_2$  がしたがう.

また, 古典解も先に導出した積分方程式を満たすことから, この議論で古典解の一意性も保証される.

## 6 古典解

$\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$  自身の議論と同様にして, 各  $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x, \xi)$  が  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上有界連続で,  $\frac{\partial I}{\partial x_1}(x, \xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x, \xi)$  が  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上絶対一様収束し,  $\mathcal{B}^0((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$  に属することが分かる. すなわち, 解  $I$  は  $x_1$  について項別微分可能であり, その偏導関数は  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上連続である.

一方,  $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$  を変数  $x_2$  について (形式的に) 微分すると, 次の表示が得られる.

- $x \in [0, 1), \theta \in (0, \pi)$  のとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= -\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) I_0(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi) \\ &\quad - \cot \theta \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} x_2\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 - x_2 \cot \theta, 0, \xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s \cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s(\mu_a + \mu_s)}{\sin^2 \theta} \int_0^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \end{aligned}$$

- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$  のとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= -\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) I_0(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 1, \xi) \\ &\quad - \cot \theta \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - 1)\right) \frac{\partial I_0}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - 1) \cot \theta, 0, \xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}(x, \xi) &= \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s \cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt \\ &\quad - \frac{\mu_s(\mu_a + \mu_s)}{\sin^2 \theta} \int_1^{x_2} \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta} (x_2 - t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x_1 - (x_2 - t) \cot \theta, t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \end{aligned}$$

- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$  のとき,  $\frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}(x, \xi) := 0$ .

$$\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}(x, \xi) := \mu_s \int_0^\infty \exp(-(\mu_a + \mu_s)t) \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}(x_1 - t \cos \theta, x_2, \xi') d\sigma_{\xi'}.$$

ここで、各  $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$  には  $\frac{1}{\sin \theta}$  の特異性があるので、先ほどのような  $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$  上の最大値評価がただちには成立しない。そこで、以下の準備を通じて、 $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$  の  $\Omega \times S^1$  での連続性を示す。

まず、 $0 < \delta < 1/2$  なる実数  $\delta$  を一つとり、それによって定まる帯領域  $\mathbb{R} \times [\delta, 1 - \delta]$  を  $K$  と書く。また、先の  $\delta$  に対して、 $\sum_{n=0}^\infty \delta_n = \delta$  を満たす正数列  $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$  をとり、それに対応する帯領域として、 $K_n := \mathbb{R} \times [\sum_{j=0}^n \delta_j, 1 - \sum_{j=0}^n \delta_j]$  をとる。このとき、次の補題が成り立つ。

**補題 2.**  $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$  が  $K_n \times S^1$  上有界連続ならば、 $\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2}$  は  $K_{n+1} \times S^1$  上有界連続でかつ次の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x_2} \right\|_{K_{n+1} \times S^1} &\leq \frac{2\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)} \|I^{(n)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \\ &\quad + \frac{\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)^2} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1} \right\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n \times S^1}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2}$  が  $K_0 \times S^1$  上有界連続で、かつ任意の  $n \geq 0$  に対して  $K \subset K_n$  が成り立つから、任意の  $n \geq 0$  について  $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}$  が  $K \times S^1$  上有界連続であることが補題 2 から分かる。また、特に  $\tilde{\mu}_a := \frac{\mu_a}{2}$ ,  $\delta_0 := \frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta$ ,  $\delta_{n+1} := \frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta_n$  ととれば、次の評価が成り立つことが分かる。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial I}{\partial x_2} \right\|_{K \times S^1} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n \times S^1} \\ &\leq \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x_2} \right\|_{K_0 \times S^1} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n + \frac{2(\tilde{\mu}_a + \mu_s)}{e\delta_0\tilde{\mu}_a} \|I_0\|_{\Gamma_-} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n \\ &\quad + \frac{(\tilde{\mu}_a + \mu_s)}{e\delta_0\tilde{\mu}_a(\mu_a + \mu_s)} \left\| \frac{\partial I_0}{\partial x_1} \right\|_{\Gamma_-} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n. \end{aligned}$$

右辺は有限確定するから、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2}(x, \xi)$  は  $K \times S^1$  上絶対一様収束する。 $\delta$  のとり方は任意であったから、解  $I$  は  $x_2$  について項別微分可能で、その偏導関数は  $\Omega \times S^1$  上連続であることが証明された。

以上の議論から、 $I \in C^1(\Omega \times S^1)$ 、すなわち、 $I$  が古典解になっていることが分かる。

## 7 高階微分可能性

定理 2 については、補題 2 に対応して、次の補題が成り立つ。

補題 3.  $\frac{\partial^2 I^{(n)}}{\partial x_2^2}$  が  $K_n \times S^1$  上有界連続ならば、 $\frac{\partial^2 I^{(n+1)}}{\partial x_2^2}$  は  $K_{n+1} \times S^1$  上有界連続でかつ次の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 I^{(n+1)}}{\partial x_2^2} \right\|_{K_{n+1} \times S^1} &\leq \frac{8\mu_s}{e^2\delta_{n+1}^2(\mu_a + \mu_s)} \|I^{(n)}\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} + \frac{16\mu_s}{e^2\delta_{n+1}^2(\mu_a + \mu_s)^2} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_1} \right\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \\ &\quad + \frac{\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x_2} \right\|_{K_n \times S^1} + \frac{4\mu_s}{e^2\delta_{n+1}^2(\mu_a + \mu_s)} \left\| \frac{\partial^2 I^{(n)}}{\partial x_1^2} \right\|_{(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} \\ &\quad + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial^2 I^{(n)}}{\partial x_2^2} \right\|_{K_n \times S^1}. \end{aligned}$$

特に  $\tilde{\mu}_a := \frac{\mu_a}{2}$ ,  $\delta_0 := \left(1 - \left(\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s}\right)^{1/2}\right) \delta$ ,  $\delta_{n+1} := \left(\frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s}\right)^{1/2} \delta_n$  ととれば、古典解のときと同様に解  $I$  が  $x_2$  について 2 回項別微分可能であり、その偏導関数が連続であることが分かる。他の偏導関数についても存在と連続性が示されるから、 $I \in C^2(\Omega \times S^1)$  であることが確認できる。

## 参考文献

- [A] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk, and I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, VSP, The Netherlands, (2002).

# 有限体・局所体上の帯球関数に現れる $q$ -超幾何型選点系直交多項式

川村 晃英\*

京都大学大学院理学研究科 数学教室 D2, 2016 年 2 月

## 動機

関数の反転を与える次の公式が、組み合わせの反転公式の名で知られている：

命題 1  $\{0, 1, \dots, n\}$  上の関数  $f$  に対して,  $\widehat{f}$  を

$$\widehat{f}(s) = \sum_{r=0}^s (-1)^r \binom{s}{r} f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると,  $\widehat{\widehat{f}} = f$  が成り立つ.

この証明は、計算により楽に行える。しかしその意味はまた別である。このような式の対称性の背後に、何らかの群の作用があるのではないかと問うのは、自然と思われる。

梅田氏の論説 [1] では、森毅氏の問題提起として、『これ（命題 1）を群の表現論とからめて証明できないか』という問題に取り組んでいる。そこではブール代数上の対称群不変関数のフーリエ変換が用いられ、命題 1 は得られなかったものの、それに似た次の反転公式が得られた：

命題 2  $\{0, 1, \dots, n\}$  上の関数  $f$  に対して,  $\widehat{f}$  を

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} K_r(s; 1/2, n) f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると,  $\widehat{\widehat{f}} = f$  が成り立つ.

ここで  $K_r(s; p, n)$  は、Krawtchouk 多項式と呼ばれる選点系直交多項式である（添付資料 (6)）。このように、群不変関数のフーリエ変換から得られる反転公式の核に、ある種の直交多項式が現れるのである。

本稿では、[1] のアプローチを受け継ぎ、まずこの問題へ我々なりの回答を与える（2 節まで）。次に、この問題を群の帯球関数と関連付けて見直し（3 節）、いくつかの例で新しい直交多項式が帯球関数として得られることを述べる（4 節）。本稿に登場する直交多項式の定義などは、添付資料として最後にまとめている。

## 1 群不変フーリエ変換

ここではできるだけ一般に、群不変関数のフーリエ変換を定義する。すなわち、局所コンパクト・アーベル群  $M$  上の、コンパクト群  $G$  の作用に不変な関数を考える。実際、動機で述べた問題に対するには有限群の設定で足りるが、発展として局所体上の群を扱う際にこの設定を要する。

$M$  の Haar 測度  $\mu$  を取る（有限の場合は数え上げ測度 counting measure）。また、 $\widehat{M}$  を  $M$  の双対群、すなわち  $M$  からトーラス  $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}^\times$  への連続な群準同型の全体とする。ここには開-コン

\*koei@math.kyoto-u.ac.jp

コンパクト位相を入れることで局所コンパクト・アーベル群となる。また  $\mu$  の双対測度と呼ばれる  $\widehat{M}$  上の Haar 測度  $\widehat{\mu}$  が一意に定まり、次の変換が互いに逆変換となる：

**定義 1** 〈フーリエ変換〉  $\varphi \in L^1(M)$  に対して、 $\mathcal{F}\varphi \in C(\widehat{M})$  (連続関数) が次式で定まる：

$$\mathcal{F}\varphi(\chi) := \int_M \varphi(a) \overline{\chi(a)} d\mu(a) \quad (\chi \in \widehat{M}). \quad (1)$$

**定義 2** 〈逆フーリエ変換〉  $\xi \in L^1(\widehat{M})$  に対して、 $\bar{\mathcal{F}}\xi \in C(M)$  が次式で定まる：

$$\bar{\mathcal{F}}\xi(a) := \int_{\widehat{M}} \xi(\chi) \chi(a) d\widehat{\mu}(\chi) \quad (a \in M). \quad (2)$$

ここで群作用を考察に加える。コンパクト群  $G$  は  $M$  へ連続かつ群自己同型として作用しているとする。このとき  $G$  の作用は測度  $\mu$  に関して保測となる。また、 $G$  は  $\widehat{M}$  に対しても反傾作用で同様に働く。さらにそれぞれの作用は、関数空間  $L^1(M)$ ,  $C(\widehat{M})$  などへの作用に持ち上がる。

ここで重要なのは、 $G$  の作用とフーリエ変換  $\mathcal{F} : L^1(M) \rightarrow C(\widehat{M})$  が可換となることである。よってフーリエ変換は、 $G$ -不変関数の間の変換  $\mathcal{F} : L^1(M)^G \rightarrow C(\widehat{M})^G$  とみなせる。逆フーリエ変換も同様である。このように見た時の式 (1), (2) の変換を、 $M$  上の  $G$  不変フーリエ変換と呼ぶ。

## 2 有限体上の群に関する例

ここでは  $\mathbb{F}$  を位数  $q$  の有限体とし、これに関する有限群を前節の  $M$ ,  $G$  として取る例を 2 つ述べる。それらはともに、動機であった組み合わせの反転公式 (命題 1) の ‘ $q$ -analogue’ を与え、これによって森氏の問いに対する我々なりの回答とする。

**例 1**  $M = \mathbb{F}^n$ ,  $G = (\mathbb{F}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ .

上記  $G$  は  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  と、 $\mathbb{F}$  の乗法群の直積  $(\mathbb{F}^\times)^n$  との半直積群である (輪状積 wreath product と呼ばれる)。  $G$  の  $\mathbb{F}^n$  への作用は次式で与えられる：

$$(\lambda, \sigma)a = (\lambda_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \lambda_n a_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{F}^\times)^n, a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^n.$$

すると、軌道はその元の 0 でない成分の数で特徴づけられる。すなわち  $0 \leq r \leq n$  に対し、軌道

$$\mathcal{O}_r = \left\{ a \in \mathbb{F}^n \mid \#\{i \mid a_i \neq 0\} = r \right\}$$

が定まる。一方、指標群  $\widehat{\mathbb{F}^n}$  は直積  $(\widehat{\mathbb{F}})^n$  と自然に同一視した上で、 $0 \leq s \leq n$  に対し、軌道

$$\mathcal{P}_s := \left\{ \chi \in (\widehat{\mathbb{F}})^n \mid \#\{i \mid \chi_i \neq 1\} = s \right\}$$

が定まる。ここで、軌道のパラメータ  $s, r \in \{0, 1, \dots, n\}$  を用いて  $G$  不変フーリエ変換を書き下す。すなわち  $\mathbb{F}^n$  上  $G$  不変関数  $\varphi$  の軌道  $\mathcal{O}_r$  での値を  $f(r)$  と書き、また  $\widehat{\mathbb{F}^n}$  上の  $G$  不変関数となる  $\mathcal{F}\varphi$  の軌道  $\mathcal{P}_s$  での値を  $\widehat{f}(s)$  と書けば、式 (1) と (2) の反転性が、次の反転公式を与える：

**命題 3**  $\{0, 1, \dots, n\}$  上の関数  $f$  に対して、 $\widehat{f}$  を

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{q^n}} \sum_{r=0}^n (q-1)^r \binom{n}{r} K_r(s; \frac{q-1}{q}, n) f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると、 $\widehat{\widehat{f}} = f$  が成り立つ。

核には Krawtchouk 多項式が現れており、命題 2 の一般化となっている。

また、これと組み合わせの反転公式 (命題 1) とは次のような関係がある：この式での  $q$  が具体的な数であることを一旦忘れ、単なるパラメータとみなした上で、これを 1 に近づける。すると驚くことに、これは組み合わせの反転公式そのものとなる (いわゆる  $q$ -analogue となっている)。

**例 2**  $M = \text{Mat}_{n,m}(\mathbb{F})$ ,  $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}) \times \text{GL}_m(\mathbb{F})$  ( $n \leq m$ ).

$M$  は  $\mathbb{F}$  上  $n$  行  $m$  列の全行列、 $G$  は一般線形群の直積である。  $M$  への  $G$  作用は両側からの行列の積で与えられ、その軌道は行列のランクで特徴づけられる。この場合、詳細は略すが、核に

Affine  $q$ -Krawtchouk 多項式 (添付資料 (8)) を持つ次の反転公式が得られる :

命題 4  $\{0, 1, \dots, n\}$  上の関数  $f$  に対して,  $\widehat{f}$  を

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{q^{n^2}}} \sum_{r=0}^n (-1)^r q^{\binom{r}{2}} (q^m; q^{-1})_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \text{aff} K_r(s, q^{-m}, n; q) f(r) \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

で定めると,  $\widehat{\widehat{f}} = f$  が成り立つ.

この式もまた,  $q \rightarrow 1$  のとき組み合わせの反転公式 (命題 1) となる.

### 3 球表現, 帯球関数

前節に見られた Krawtchouk 多項式たちは, 直交多項式系である. その直交性 (添付資料 (7)(9)) は, 命題 3.4 の反転性から直接導けるが, より一般に, 群の球表現の直交性から来ていると見ることもできる. ここでは我々に必要な範囲で, 球表現およびその帯球関数についてまとめる.

定義 3 (球表現) 局所コンパクト群とそのコンパクト部分群の対  $(\mathbb{G}, G)$  について, これが Gelfand 対であるとは,  $\mathbb{G}$  の任意の既約ユニタリ表現  $V$  に関してその  $G$  不変部分空間  $V^G$  が高々 1 次元であることを言う. このとき, 特に  $\dim V^G = 1$  なるものを, その球表現という.

以下, 我々の設定, すなわち局所コンパクト群  $M$  にコンパクト群  $G$  が作用している状況を考える.  $\mathbb{G} = M \rtimes G$  とおくと,  $(\mathbb{G}, G)$  は Gelfand 対となる. また,  $M \cong \mathbb{G}/G$  は  $\mathbb{G}$  の等質空間であるから,  $\mathbb{G}$  の  $L^2(M)$  における表現が誘導され, ユニタリ表現となる.

このとき,  $(\mathbb{G}, G)$  の球表現のあるものは,  $L^2(M)$  の部分表現として実現できる. すなわち,  $\mathcal{P} \in \Omega := \{\mathcal{P} \subset \widehat{M}, \text{開集合かつ } G \text{ 軌道}\}$  に対し, 球表現  $V_{\mathcal{P}} \subset L^2(M)$  を構成できる. さらに,

定義 4 (帯球関数)  $V_{\mathcal{P}}$  に属する  $G$  不変関数  $\omega_{\mathcal{P}} \in (V_{\mathcal{P}})^G$  で,  $\omega_{\mathcal{P}}(0) = 1$  をみたすただ一つのもを,  $\mathcal{P}$  に関する帯球関数という. 具体的には次式で与えられる:

$$\omega_{\mathcal{P}}(a) = \frac{1}{\widehat{\mu}(\mathcal{P})} \int_{\mathcal{P}} \chi(a) d\widehat{\mu}(\chi) \quad (a \in M). \quad (3)$$

命題 5 球表現どうしは  $L^2(M)$  において互いに直交する. 特に, 次が成り立つ:

$$(\omega_{\mathcal{P}}, \omega_{\mathcal{P}'} )_{L^2(M)} = \delta_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'} \frac{1}{\widehat{\mu}(\mathcal{P})} \quad (\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \Omega). \quad (4)$$

命題 6  $\varphi \in L^1(M)^G$ ,  $\mathcal{P} \in \Omega$  に対し,

$$\mathcal{F}\varphi(\mathcal{P}) = \int_M \varphi(a) \overline{\omega_{\mathcal{P}}(a)} d\mu(a). \quad (5)$$

すなわち帯球関数は,  $G$  不変フーリエ変換の核関数として現れる. 例えば例 1 に戻ってみれば, 確かに命題 3 における Krawtchouk 多項式が帯球関数に当たっている. そして式 (4) の直交性が, Krawtchouk 多項式の直交性を与えることとなる (例 2 でも同様).

最後に我々の帯球関数の, 調和解析的な側面を参考として述べておく:

命題 7  $\Omega$  に属する軌道が  $\widehat{M}$  のほとんど至るところを占めている, すなわち  $\widehat{\mu}(\widehat{M} \setminus \bigcup_{\mathcal{P} \in \Omega} \mathcal{P}) = 0$  と仮定する. すると,  $\{\omega_{\mathcal{P}} \mid \mathcal{P} \in \Omega\}$  は Hilbert 空間  $L^2(M)^G$  の完全正規直交系をなす.

### 4 非アルキメデスの局所体上の群に関する例

有限体を用いた例 1, 2 では, その帯球関数に Krawtchouk 多項式などの直交多項式が見い出せた. ここでは, それらの自然な一般化となる例を考える.

$F$  を非アルキメデスの局所体,  $\mathfrak{o}$  をその整数環,  $\mathfrak{p}$  をその極大イデアルとする.  $F$  上の (離散的) 付値を  $v: F \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  とする. するとその双対付値  $r: \widehat{F} \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{Z}$  が次式で定まる:

$r(\chi) = \max\{v(a) \mid a \in F, \chi(a) \neq 1\}$  (但し  $r(1) = -\infty$ ). また, 剰余体  $\mathbb{F} := \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$  は有限体なので, その位数を  $q$  とする. 自然数  $l$  に対して, 剰余環  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$  を考えると, 位数  $q^l$  の有限環となる.

**例 3**  $M = (\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)^n$ ,  $G = (\mathfrak{o}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ .

これは例 1 の有限体  $\mathbb{F}$  を有限環  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$  に取り替えた例である. 作用は例 1 と同様である.  $a \in \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$  に対して付値  $v(a) \in \{0, \dots, l-1\} \cup \{\infty\}$  が定まり,  $\mathfrak{o}^\times$  の元の積がこの値を変えないことより,  $M$  の  $G$  軌道は次のようになる:  $x \in X(l, n) := \left\{ x = (x_s)_{s=1}^l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^l \mid |x| = \sum_{s=1}^l x_s \leq n \right\}$  に対して,

$$\mathcal{O}_x := \{(a_i)_{i=1}^n \in M \mid 1 \leq \forall s \leq l, \#\{i \mid v(a_i) = l-s\} = x_s\}.$$

一方,  $\chi \in \widehat{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l}$  に対してその双対付値  $r(\chi) \in \{-\infty\} \cup \{0, \dots, l-1\}$  が定まり, これを用いて  $\widehat{M}$  の  $G$  軌道は次のようになる:  $y \in X(l, n)$  に対して,

$$\mathcal{P}_y := \{(\chi_i)_{i=1}^n \in \widehat{M} \mid 1 \leq \forall s \leq l, \#\{i \mid r(\chi_i) = s-1\} = y_s\}.$$

本例における帯球関数は, 多変数 Krawtchouk 多項式 (添付資料 (10)) を用いて, 次のように書ける: 軌道  $\mathcal{P}_y \subset \widehat{M}$  に付随する帯球関数の軌道  $\mathcal{O}_x \subset M$  における値を  $\omega_y(x)$  と表すとして,

$$\omega_y(x) = K_y^{(l)}(x; \frac{q-1}{q}, n).$$

**例 4**  $M = \text{Mat}_{n,m}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l)$ ,  $G = \text{GL}_n(\mathfrak{o}) \times \text{GL}_m(\mathfrak{o})$  ( $n \leq m$ ).

詳細は略す. 帯球関数は多変数 Affine  $q$ -Krawtchouk 多項式 (添付資料 (13)) を用いて表せる:

$$\omega_y(x) = \text{aff} K_y^{(l)}(x; q^{-m}, n; q), \quad x, y \in X(l, n).$$

**例 5**  $M = F^n$ ,  $G = (\mathfrak{o}^\times)^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ .

これは例 1 の有限体  $\mathbb{F}$ , 例 3 の有限環  $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^l$  を局所体  $F$  に取り替えた例である. 作用は例 1, 3 と同様である.  $M$  の  $G$  軌道は例 3 同様, 元の成分の付値の配分によって決まるが, 成分に 0 (付値  $\infty$ ) を含むような軌道は測度 0 であり, 開軌道でないので考えない (3 節参照). それらを除く軌道は全て開であり,  $x \in X(n) := \{(x_s)_{s \in \mathbb{Z}} \mid x_s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{s \in \mathbb{Z}} x_s = n\}$  に対して,

$$\mathcal{O}_x := \{(a_i)_{i=1}^n \in M \mid \forall s \in \mathbb{Z}, \#\{i \mid v(a_i) = -s\} = x_s\}$$

で与えられる.  $\widehat{M}$  の開  $G$  軌道も同様に,  $y \in X(n)$  に対して, 次で与えられる:

$$\mathcal{P}_y := \{(\chi_i)_{i=1}^n \in \widehat{M} \mid \forall s \in \mathbb{Z}, \#\{i \mid r(\chi_i) = s\} = y_s\}.$$

帯球関数は,  $\infty$ -変数 Krawtchouk 多項式 (添付資料 (15)) を用いて次のようになる:

$$\omega_y(x) = K_y^{(\infty)}(x; \frac{q-1}{q}, n).$$

**例 6**  $M = \text{Mat}_{n,m}(F)$ ,  $G = \text{GL}_n(\mathfrak{o}) \times \text{GL}_m(\mathfrak{o})$  ( $n \leq m$ ).

詳細は略す. 帯球関数は  $\infty$ -変数 Affine  $q$ -Krawtchouk 多項式 (添付資料 (18)) を用いて表せる:

$$\omega_y(x) = \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; q^{-m}, n; q), \quad x, y \in X(n).$$

## 添付資料: Krawtchouk 多項式たちの定義と直交関係式

ここでは, 本稿に登場する直交多項式の紹介をする.  $m \geq 1$  を自然数,  $0 < p, q < 1$  をパラメータとする.  $\delta$  は Kronecker のデルタとする.  $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ ,  $(a; q)_k = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\cdots(1-aq^{k-1})$  とする (Pochhammer symbol).  $X(l, m)$  は例 3 で,  $X(m)$  は例 5 でそれぞれ定義したもの.  $x \in X(m)$  に対し,  $|x^k| = \sum_{i \geq k} x_i$ ,  $\Delta(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} ix_i$ ,  $\binom{m}{x} = \frac{m!}{(m-|x|)! \prod_{i \in \mathbb{Z}} i!}$ ,  $\left[ \begin{matrix} m \\ x \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^m; q^{-1})_{|x|}}{\prod_{i \in \mathbb{Z}} (q; q)_{x_i}}$ .

### 1. Krawtchouk 多項式 [2]

定義.  $K_y(x; p, m) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -x, -y \\ -m \end{matrix} ; \frac{1}{p} \right) = \sum_{k=0}^x \frac{(-x)_k (-y)_k}{(-m)_k k! p^k}, \quad 0 \leq x, y \leq m. \quad (6)$

直交性. 
$$\sum_{x=0}^m p^x (1-p)^{m-x} \binom{m}{x} K_y(x; p, m) K_z(x; p, m) = \delta_{y,z} \frac{(1-p)^y}{p^y} \binom{m}{y}^{-1}. \quad (7)$$

## 2. Affine $q$ -Krawtchouk 多項式 [4]

定義. 
$$\text{aff} K_y(x; p, m; q) = 3\varphi_2 \left( \begin{matrix} q^{-x}, q^{-y}, 0 \\ p, q^{-m} \end{matrix}; q, q \right) = \sum_{k=0}^x \frac{(q^{-x}; q)_k (q^{-y}; q)_k}{(q^{-m}; q)_k (p; q)_k (q; q)_k} q^k, \quad 0 \leq x, y \leq m.$$

直交性. 
$$\sum_{x=0}^m p^{m-x} (p; q)_x \begin{bmatrix} m \\ x \end{bmatrix}_q \text{aff} K_y(x; p, m; q) \text{aff} K_z(x; p, m; q) = \delta_{y,z} \frac{p^y}{(p; q)_y} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix}_q^{-1}. \quad (9)$$

## 3. 多変数 Krawtchouk 多項式 [3]

定義. 
$$K_y^{(l)}(x; p, m) = \prod_{i=1}^l \frac{(-m_i)_{y_i}}{(-n_i)_{y_i}} K_{y_i}(x_{l+1-i}; p, m_i), \quad x, y \in X(l, m). \quad (10)$$

ここで,  $m_i = m - |y^{i+1}| - |x^{l+2-i}|, \quad n_i = m - |y^{i+1}|. \quad (11)$

直交性. 
$$\sum_{x \in X(l, m)} p^{|x|} (1-p)^{lm-\Delta(x)} \binom{m}{x} K_y^{(l)}(x; p, m) K_z^{(l)}(x; p, m) = \delta_{y,z} \frac{(1-p)^{\Delta(y)}}{p^{|y|}} \binom{m}{y}^{-1}. \quad (12)$$

## 4 多変数 Affine $q$ -Krawtchouk 多項式

定義. 
$$\text{aff} K_y^{(l)}(x; p, m; q) = \frac{1}{q^{N(x,y)}} \prod_{i=1}^l \frac{(q^{m_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+m_i}; q^{-1})_{y_i}}{(q^{n_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+n_i}; q^{-1})_{y_i}} \text{aff} K_{y_i}(x_{l+1-i}; pq^{m-m_i}, m_i; q), \quad (13)$$

$x, y \in X(l, m)$ . ここで  $m_i$  および  $n_i$  は式 (11) と同一. また,  $N(x, y) = \sum_{i < j} (j-i-1)x_{l+1-i}y_j$ .

直交性. 
$$\sum_{x \in X(l, m)} p^{lm-\Delta(x)} (p; q)_{|x|} q^{C(x)} \begin{bmatrix} m \\ x \end{bmatrix}_q \text{aff} K_y^{(l)}(x; p, m; q) \text{aff} K_z^{(l)}(x; p, m; q) = \delta_{y,z} \frac{p^{\Delta(y)}}{(p; q)_{|y|} q^{C(y)}} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix}_q^{-1}. \quad (14)$$

ここで,  $C(x) = \sum_{j=1}^l (j-1)(m-|x|)x_j + \sum_{i < j} (j-i-1)x_i x_j$ .

## 5 $\infty$ -変数 Krawtchouk 多項式

定義. 
$$K_y^{(\infty)}(x; p, m) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(-m_i)_{y_i}}{(-n_i)_{y_i}} K_{y_i}(x_{-i}; p, m_i), \quad x, y \in X(m). \quad (15)$$

ここで,  $m_i = m - |y^{i+1}| - |x^{-i+1}|, \quad n_i = m - |y^{i+1}|. \quad (16)$

直交性. 
$$\sum_{x \in X(m)} (1-p)^{m-\Delta(x)} \binom{m}{x} K_y^{(\infty)}(x; p, m) K_z^{(\infty)}(x; p, m) = \delta_{y,z} \frac{(1-p)^{2m+\Delta(y)}}{p^{2m}} \binom{m}{y}^{-1}. \quad (17)$$

## 6 $\infty$ -変数 Affine $q$ -Krawtchouk 多項式

定義. 
$$\text{aff} K_y(x; p, m; q | \infty) = \frac{1}{q^{N(x,y)}} \prod_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(q^{m_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+m_i}; q^{-1})_{y_i}}{(q^{n_i}; q^{-1})_{y_i} (p^{-1} q^{-m+n_i}; q^{-1})_{y_i}} \text{aff} K_{y_i}(x_{-i}; pq^{m-m_i}, m_i; q), \quad (18)$$

$x, y \in X(m)$ . ここで  $m_i$  および  $n_i$  は式 (16) と同一. また,  $N(x, y) = \sum_{i < j} (j-i-1)x_{-i}y_j$ .

直交性. 
$$\sum_{x \in X(m)} p^{m-\Delta(x)} q^{C(x)} \begin{bmatrix} m \\ x \end{bmatrix}_q \text{aff} K_y^{(\infty)}(x; p, m; q) \text{aff} K_z^{(\infty)}(x; p, m; q) = \delta_{y,z} \frac{p^{2m+\Delta(y)}}{(p; q)_m^2 q^{C(y)}} \begin{bmatrix} m \\ y \end{bmatrix}_q^{-1}. \quad (19)$$

ここで,  $C(x) = \sum_{i < j} (j-i-1)x_i x_j$ .

## 参考文献

- [1] 梅田亨, 森毅の主題による変奏曲 集合篇 (3), 数学セミナー 2013 年 10 月号, 73-79.
- [2] T.H. Koornwinder, *Krawtchouk Polynomials, a Unification of Two Different Group Theoretic Interpretations*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **13** (1982), 1011-1023.
- [3] H. Mizukawa, *Orthogonality Relations for Multivariate Krawtchouk Polynomials*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, SIGMA **7** (2011), 017, 5pages.
- [4] D. Stanton, *A Partially Ordered Set and  $q$ -Krawtchouk Polynomials*, J. Comb. Theory, Series A **30** (1981), 276-284.

# W代数の自由場実現

元良 直輝 \*

京都大学数理解析研究所, 2016年2月

## 1 研究の背景

W代数とは二次元共形場理論の枠組みの中で Virasoro 代数の一般化として導入された (スーパー) 頂点代数の族である。一般に W 代数は, 複素係数の有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数  $\mathfrak{g}$ , そのべき零元  $f$  (スーパーの場合には even とする), 複素数  $k$ , そして  $f$  に関して “good” な  $\mathfrak{g}$  の次数付け  $\Gamma$  に付随する量子 Drinfeld-Sokolov 還元から定まる BRST 複体  $C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  のコホモロジー

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) := H(C_k(\mathfrak{g}, f; \Gamma))$$

として定義される [7]。このとき  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  を  $\mathfrak{g}, f, k, \Gamma$  に付随する W 代数と呼び,  $k$  をそのレベルという。  $k \neq -h^\vee$  (非臨界レベル) のとき, W 代数は (スーパー) 頂点共形代数の構造を持つ。特に Virasoro 頂点代数を含む。ただし  $h^\vee$  は  $\mathfrak{g}$  の双対 Coxeter 数である。また W 代数の頂点共形代数構造は  $\Gamma$  の選び方によって変化するが, 頂点代数構造は変わらない。次の定理が知られている。

**定理 1.1** (Feigin-Frenkel [2, 5]).  $\mathfrak{g}$  を有限次元単純リー代数,  $f$  をその正則べき零元,  $\Gamma$  をその “good” な次数付けとする。  $k$  が generic のとき, 対応する W 代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  は  $\mathfrak{g}$  の Cartan 部分代数の双対  $\mathfrak{h}^*$  に付随する Heisenberg 頂点代数の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{i=1}^{\text{rank } \mathfrak{g}} \text{Ker} \int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz,$$

ただし  $\nu = \sqrt{k + h^\vee}$ ,  $\alpha_i(z)$  は  $\mathfrak{g}$  の単純ルートに対応する Heisenberg 頂点代数の場である。

これを W 代数の自由場実現という。  $\int e^{-\frac{1}{\nu} \int \alpha_i(z)} dz$  をその Screening 作用素といい, Heisenberg 頂点代数からその加群への線形作用素である。自由場実現を用いることで W 代数の生成元 (または生成する場) を容易に計算することが出来る。さらに  $\mathfrak{g}$  が  $A_n$  型の時, 実現する Heisenberg 頂点代数のことを Fock 空間と呼び, 対称関数の空間と同一視することによって, W 代数の生成元が Jack 多項式と呼ばれるものと対応することが知られている。

最初に W 代数を定義したのは Zamolodchikov [8] である。Zamolodchikov は Virasoro 頂点代数の一般化として,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$  で  $f$  が正則べき零元の場合に対応する W 代数を定義し, Fateev と Lukyanov らによって  $A_n, B_n, D_n$  型の W 代数が定義された [1]。一般の有限次元単純リー代数  $\mathfrak{g}$  とその正則べき零元  $f$  に対応する W 代数を BRST コホモロジーを用いて定義したのは Feigin と Frenkel [3]

---

\*gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

で、その後 Kac, Roan, 脇本らによって最も一般的な場合に定義された [7]。定理 1.1 は Fateev と Lukyanov らの  $W$  代数の構成法の一般化となっており、実際に  $A_n, D_n$  型の  $W$  代数は  $\mathfrak{g}$  が  $A_n, D_n$  型で  $f$  がその正則べき零元の場合に対応する  $W$  代数と一致する。しかしながら、 $B_n$  型の  $W$  代数は  $\mathfrak{g}$  が  $B_n$  型で  $f$  がその正則べき零元の場合に対応する  $W$  代数とは一致しない。次のような予想がある。

**予想 1.2.** Fateev と Lukyanov によって構成された  $B_n$  型の  $W$  代数は、スーパーリー代数  $\mathfrak{osp}(1, 2n)$  とその正則べき零元  $f$  に対応する  $W$  代数と同型である。

$n = 1$  の時、これは正しいことが Kac, Roan, 脇本らによって確かめられている。 $n \geq 2$  の時にも正しいことを証明するのが私の目的である。実際には私の結果はこれよりも遥かに一般的な場合に  $W$  代数の自由場実現があることを主張する。その応用として次の予想を証明する。

**予想 1.3.** Feigin と Semikhatov によって構成された  $W_n^{(2)}$  代数は、リー代数  $\mathfrak{sl}_n$  とその副正則べき零元  $f$  に対応する  $W$  代数と同型である。

$W_n^{(2)}$  代数とは Feigin と Semikhatov らによって構成された頂点代数で、 $n = 3$  の時は Bershadsky-Polyakov 代数と呼ばれる頂点代数に一致する [4]。上の予想は  $n \leq 3$  の場合に正しいことが知られている。

## 2 主結果

$\mathfrak{g}$  を複素係数の有限次元単純リー代数または basic classical なスーパーリー代数、 $f$  をそのべき零元  $f$  (スーパーの場合には even とする)、 $k$  を複素数、そして

$$\Gamma : \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

を  $\mathfrak{g}$  の次数付けであって、 $f \in \mathfrak{g}_{-1}$  かつ  $\text{ad}f : \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{j-1}$  が  $j \geq \frac{1}{2}$  のとき単射、 $j \leq \frac{1}{2}$  のとき全射であるとする。また  $(\cdot | \cdot)$  を  $\mathfrak{g}$  上の正規化された超対称非退化不変双線形式とする。このとき  $\mathfrak{g}_0$  は簡約スーパーリー代数であり、任意の  $u, v \in \mathfrak{g}_0$  に対し

$$\tau_k(u|v) = k(u|v) + \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}}(u|v) - \frac{1}{2}\kappa_{\mathfrak{g}_0}(u|v)$$

とすると、 $\tau_k$  は  $\mathfrak{g}_0$  上の超対称不変双線形式となる。ただし  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  は  $\mathfrak{g}$  上の Killing form である。また  $\Gamma$  の満たす条件から、任意の  $u, v \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$  に対し

$$\langle u | v \rangle = (f|[u, v])$$

と定めると  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  は  $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$  上の非退化超反対称双線形式を定める。ここで  $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0)$  を  $\mathfrak{g}_0$  とその不変形式  $\tau_k$  から定まる普遍アファイン頂点代数、 $F^{\text{ne}}$  を  $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$  と  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  から定まる中立フェルミオン頂点代数とする (詳細な定義は [6, 7] にある)。

**定理 2.1.**  $k$  が generic のとき、任意の  $\mathfrak{g}, f, \Gamma$  に対して、対応する  $W$  代数  $W^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  はテンソル頂点代数  $V^{\tau_k}(\mathfrak{g}_0) \otimes F^{\text{ne}}$  の部分頂点代数として実現され、ある Screening 作用素たちの共通核として構成される。

Screening 作用素の具体形は [6] にある。 $\Gamma$  として  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  (Cartan 部分代数) となるように取れる場合を考える。このとき  $V^{rk}(\mathfrak{g}_0)$  は  $k \neq -h^\vee$  ならば  $\mathfrak{h}^*$  に付随する Heisenberg 頂点代数と同型である。これを  $\mathcal{H}$  と表す。 $\Delta$  を  $\mathfrak{g}$  のルート系,  $\Pi$  をその単純ルートの集合であって正ルートのルートベクトル空間が  $\Gamma$  に対して非負次数の空間に含まれるようにとる。すなわち  $\Delta_+$  を正ルートの集合とすると

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_{\geq 0}$$

が成り立つ。ただし  $\mathfrak{g}_\alpha$  は  $\alpha$  のルートベクトル空間である。今,  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  だから

$$\bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{>0}$$

である。ここで, 任意の  $j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  に対して

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}_j\}, \quad \Pi_j = \Pi \cap \Delta_j$$

と定める。このとき

$$\Pi = \Pi_{\frac{1}{2}} \cup \Pi_1, \quad \Pi_{\frac{1}{2}} = \Delta_{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。 $\alpha \in \Pi$  に対して,  $\alpha(z)$  を  $\alpha$  に対応する  $\mathcal{H}$  上の場, また  $\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}$  に対して,  $\Phi_\alpha(z)$  をそのルートベクトル  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$  に対応する  $F^{ne}$  上の場とする。定理 2.1 から次が成り立つ。

**定理 2.2.**  $k$  が generic のとき,  $\Gamma$  が  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$  となるようにとれるような  $\mathfrak{g}, f$  に対し, 対応する  $\mathcal{W}$  代数  $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$  はテンソル頂点代数  $\mathcal{H} \otimes F^{ne}$  の部分頂点代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \simeq \bigcap_{\substack{\alpha \in \Pi_1 \\ (f|e_\alpha) \neq 0}} \int e^{f \alpha(z)} dz \cap \bigcap_{\alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}} \int : e^{f \alpha(z)} \Phi_\alpha(z) : dz$$

ただし:  $A(z)B(z)$ : は  $A(z)$  と  $B(z)$  の正規順序積を表す。

これは定理 1.1 の結果を含んでおり, より多くの場合の  $\mathcal{W}$  代数の自由場実現を与えている。特に  $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$ ,  $f$  をその正則べき零元のときに次を得る。

**定理 2.3.** 予想 1.2 は非臨界レベルのとき成立する。

より一般的な結果である定理 2.1 は直接的には自由場実現とは言えないが, Screening 作用素によって構成されている。特に  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ ,  $f$  が副正則べき零元のときに定理 2.1 を用いると, Feigin と Semikhatov による  $\mathcal{W}_n^{(2)}$  代数の構成と一致する。

**定理 2.4.** 予想 1.3 は非臨界レベルのとき成立する。

## 参考文献

- [1] V.A. Fateev, S.L. Lukyanov, *Additional symmetries and exactly solvable models of two-dimensional Conformal field theory*, Sov. Sci. Rev. A. Phys., Vol. 15 (1–117), 1990.
- [2] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Affine Kac-Moody Algebras At The Critical Level And Gelfand-Dikii Algebras*, Int. J. Mod. Phys., A7S1A, 197, 1992.

- [3] B.L. Feigin, E. Frenkel, *Quantization of Drinfeld-Sokolov reduction*, Phys. Lett., B246, 75–81, MR 1071340, 1990.
- [4] B.L. Feigin, A. Semikhatov,  $\mathcal{W}_n^{(2)}$ -algebras, Nuclear Phys., B 698, No. 3, 409–449, 2004.
- [5] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, Math. Surv. Monogr., Vol. 88, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
- [6] N. Genra, *Screening Operators for  $\mathcal{W}$ -algebras*, appearing.
- [7] V.G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Commun. Math. Phys., 241(2-3), 307–342, 2003.
- [8] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys., 65, 1205, 1986.

# 正標数の代数多様体における non-nef locus について

佐藤 謙太\*

東京大学大学院数理科学研究科 M2, 2016 年 2 月

## 1 Introduction

$k$  を体,  $X$  を  $k$  上の正規射影代数多様体とし,  $L$  を可逆層 (つまり, 階数 1 の局所自由層) とする. この時,  $L$  がどのくらい nef でないかを特徴づける量が二通り定義される. 一つ目は, restricted base locus  $B_-(L)$  であり, もう一つが non-nef locus  $\text{NNeF}(L)$  である. これら二つは定義が大きく異なる (詳しい定義は定義 2.8 と定義 3.1 を参照) が, それらは一致すると予想されており, 実際いくつかの良い状況では一致することが示されていた. 本稿の主定理は, 以下の通りである.

定理 1.1 ([S]).  $k$  が正標数の完全体,  $X$  が  $k$  上の正規射影代数多様体であって, 高々強  $F$ -正則という mild な特異点しか持たない時, 任意の  $L$  について  $B_-(L) = \text{NNeF}(L)$ .

2 章でネフ性及び  $\text{NNeF}(L)$  を定義する. 3 章で  $B_-(L)$  の定義を与え, 主定理について改めて説明する. 4 章では主定理の証明の鍵となる判定イデアルについて説明していく. 5 章では, 主定理の証明を行う.

注意 1.2. 本稿では, 他分野の方にとっての馴染みややすさを考慮して, 「因子」を使うことを避けて, 全て「可逆層」で代用している. その為, 一般的でない定義を採用している箇所がいくつかあるのでご注意下さい.

## 2 可逆層のネフ性

$k$  を体,  $X$  を  $k$  上の正規射影代数多様体とする. 可逆層のなす集合  $\text{Pic}(X)$  は, テンソル積に関してアーベル群になる (従って, 以下可逆層同士のテンソル積を  $+$  により表すことにする).  $\text{Pic}_{\mathbb{Q}}(X) := \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  の元を  $\mathbb{Q}$ -可逆層と呼ぶことにする.

定義 2.1.  $L$  を  $\mathbb{Q}$ -可逆層とする.

1.  $L$  が非常に豊富 (very ample) とは, ある閉埋め込み  $X \subseteq \mathbb{P}_k^N$  があって,  $\mathbb{P}^N$  の可逆層  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$  の  $X$  への引きもどしが  $L$  に一致することである.
2.  $L$  が豊富 (ample) とは, ある自然数  $n$  があって,  $nL$  が非常に豊富になることである.
3.  $L$  がネフ (nef) とは, 任意の豊富な  $\mathbb{Q}$ -可逆層  $A$  について  $L + A$  が豊富になることである.

---

\*ktsato@ms.u-tokyo.ac.jp

ネフな可逆層は非常に性質がよく、与えられた可逆層がいつネフになるか？ということは非常に重要な問題である。この方向について、Goodman による次の命題が知られている。

命題 2.2 ([G]).  $L$  を可逆層とする。この時、 $L$  がネフであることと、任意の閉点  $x \in X$  について  $\text{ord}_x(|L|) = 0$  であることが同値。

以下、 $\text{ord}_x(|L|)$  の定義を説明する。

定義 2.3.  $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$  をイデアル層、 $x$  を  $X$  の点とする。この時、 $\mathfrak{a}$  の  $x$  での重複度が、

$$\text{ord}_x(\mathfrak{a}) := \sup \{r \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}_x \subseteq \mathfrak{m}_x^r\}$$

で定まる。

定義 2.4.  $M$  を可逆層とした時、 $M$  の基点イデアル(base ideal)  $\mathfrak{b}(|M|) \subseteq \mathcal{O}_X$  が、 $\mathfrak{b}(|M|) := \text{Im}(H^0(X, M) \otimes M^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_X)$  により定まる。

注意 2.5. このイデアルは、 $M$  がどのくらい大域切断で生成されるかどうかを反映しており、 $M$  が点  $x \in X$  において大域切断で生成されることと、 $\mathfrak{b}(|M|)_x = \mathcal{O}_{X,x}$  が同値。

定義 2.6.  $M$  を可逆層、 $x$  を  $X$  の点とする。

1.  $M$  が有効 (つまり  $H^0(X, M) \neq 0$ ) とする。この時、 $\text{ord}_x(|M|) := \text{ord}_x(\mathfrak{b}(|M|))$  と定義する。
2.  $L$  を (巨大な)  $\mathbb{Q}$ -可逆層とする。この時、 $\text{ord}_x(|L|) := \inf_n \text{ord}_x(|nL|)/n$ 。ただし、 $n$  は、 $nL$  が有効な可逆層となる全ての  $n$  を走るとする。

注意 2.7. 巨大とは、有効な  $\mathbb{Q}$ -可逆層と、豊富な  $\mathbb{Q}$ -可逆層の和でかけるようなものである。巨大でないと議論が少し複雑になるので、以下本稿では巨大な  $\mathbb{Q}$ -可逆層のみを扱うことにする。

Goodman はネフ性の交点数による特徴づけを用いて命題 2.2 を示した。この命題をもとに、non-nef locus が次のように定義される。

定義 2.8.  $L$  を  $\mathbb{Q}$ -可逆層とした時、 $L$  の non-nef locus  $\text{NNef}(L)$  が、

$$\text{NNef}(L) := \{x \in X \mid \text{ord}_x(|L|) > 0\} \subseteq X$$

で定義される。

### 3 基点集合

$k$  を体、 $X$  を  $k$  上の正規射影代数多様体とする。可逆層  $L$  の基点集合(base locus) とは  $\text{Bs}(|L|) := \{x \in X \mid L \text{ は } x \text{ において大域切断で生成されない}\} \subseteq X$  のことである。これは、基点イデアル  $\mathfrak{b}(|L|)$  の定義する閉集合に他ならない。また、その漸近版として、漸近的基点集合(stable base locus) が、 $\mathbf{B}(L) := \bigcap_n \text{Bs}(|nL|)$  により定義される。

この量は、非常に重要であるが、扱いが難しい一面がある。例えば、 $L$  と  $L'$  が数値的同値でも、漸近的基点集合は一致するとは限らないことなどが知られている。その為少し修正して、より扱いやすい locus を定義する。

定義 3.1. 豊富な可逆層  $A$  を固定する。この時、 $L$  の restricted base locus を、 $\mathbf{B}_-(D) := \bigcup_{0 < t \in \mathbb{Q}} \mathbf{B}(D + tA) \subseteq X$  で定義する。

この locus は性質がよく、たとえば次のようなことが知られている。

命題 3.2.  $L$  を  $\mathbb{Q}$ -可逆層とする。この時、 $L$  がネフであることと、 $B_-(L) = \emptyset$  が同値。

この命題と、命題 2.2 を見比べて、次が予想された。

予想 3.3.  $\mathbb{Q}$ -可逆層  $L$  について、 $B_-(L) = \text{Nef}(L)$ 。

注意 3.4. 上の予想について、 $\supseteq$  の包含が常に成り立っていることは初等的な議論から従う。逆向きの包含が本質的であるが、こちら向きの包含はある種の "base point free theorem" とみなせ、その意味からも重要な問題であるように思える。

この予想は、次の三つのケースで正しいことが知られている。

1. ([N])  $k = \mathbb{C}$  かつ  $X$  が非特異の時。
2. ([CdB])  $k = \mathbb{C}$  かつ  $X$  が高々 klt 特異点しか持たない時。
3. ([M])  $k$  が正標数の完全体で、 $X$  が非特異の時。

本稿の主結果 (定理 1.1) は、[CdB] の正標数での類似となっている。

## 4 判定イデアル

$k$  を標数  $p > 0$  の完全体、 $X$  を  $k$  上の正規多様体とする。まず、定理 1.1 の証明で大きな役割を担う、判定イデアルというイデアル層を定義する。定義には、フロベニウス射  $F : X \rightarrow X$  という正標数独自の手法を用いる。

定義 4.1.  $R$  を標数  $p$  の環、 $e$  を自然数、 $q = p^e$  とすると、 $F^e(r) = r^q$  により環準同型  $F^e : R \rightarrow R$  が定まる。 $R$ -加群  $M$  に対し、 $M$  とアーベル群として同型な集合  $F_*^e M$  を

$$F_*^e M := \{F_*^e m \mid m \in M\}$$

により定め、 $R$  の作用を、 $r \cdot F_*^e m = F_*^e(r^q m)$  により定める。 $F_*^e M$  は  $R$  加群になる。

例 4.2.  $R = k[[x_1, x_2, \dots, x_d]]$  を形式的べき級数環とする。 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{N}^d$  について、 $x^\lambda := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_d^{\lambda_d} \in R$  と書くことにする。自然数  $e > 0$  について、

$$I_e := \{\lambda \in \mathbb{N}^d \mid \forall i, 0 \leq \lambda_i \leq p^e - 1\} \subseteq \mathbb{N}^d$$

と定める。この時、 $F_*^e R = \bigoplus_{\lambda \in I_e} R \cdot (F_*^e x^\lambda)$  である。

次に、 $\text{Hom}_R(F_*^e R, R)$  を考える。 $\lambda \in I_e$  に対し、 $\text{pr}_\lambda : F_*^e R \rightarrow R \cdot (F_*^e x^\lambda) \simeq R$  を第  $\lambda$  成分への射影とすると、

$$\text{Hom}_R(F_*^e R, R) = \bigoplus_{\lambda \in I_e} R \cdot \text{pr}_\lambda = F_*^e R \cdot \text{pr}_{\mu_e}$$

である (ただし、 $\mu_e = (p^e - 1, p^e - 1, \dots, p^e - 1) \in I_e$ )。

この例は、 $\text{Hom}_R(F_*^e R, R)$  が非常に良い性質を持っていることを示している。実際、判定イデアルの定義 (定義 4.4) は、この  $\text{Hom}_R(F_*^e R, R)$  を用いてなされている。

少し脇道にそれるが、上の例で  $\text{Hom}_R(F_*^e R, R)$  が簡単になったことは、グロタンディークの双対理論と関係がある。

例 4.3.  $d$  次元非特異多様体  $X$  について, 階数  $d$  の局所自由層  $\Omega_{X/k}$  の  $d$  回ウェッジをとることで標準層と呼ばれる可逆層  $\omega_X$  が定まる.  $X$  が非特異でない時は, 特異点を抜いたところの標準層をプッシュすることで,  $X$  の標準層  $\omega_X$  が定まる.

グロタンディークの双対理論によると,  $\mathcal{H}om_X(F_*^e \omega_X, \omega_X)$  は  $F_*^e \mathcal{O}_X$  加群として階数 1 の局所自由層となる. 特に局所的には,  $F_*^e \mathcal{O}_X$  と同型であり, その生成元がトレース射  $\mathrm{Tr}_F^e : F_*^e \omega_X \rightarrow \omega_X$  である. 例 4.2 における  $\mathrm{pr}_{\mu_e}$  は  $\mathrm{Tr}_F^e$  に他ならない.

定義 4.4.  $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X$  を, (接続) イdeal層,  $t$  を正の実数とする.  $X = \mathrm{Spec} R$  と仮定すると,  $R$  のイdealの集合

$$\left\{ 0 \neq J \subseteq R \mid \forall \epsilon > 0, \forall \phi \in \mathrm{Hom}_R(F_*^e R, R) \text{ について } \phi(F_*^e (J \cdot \mathfrak{a}^{\lceil t(p^\epsilon - 1) \rceil})) \subseteq J \right\}$$

は, 唯一つ最小限をもつ. これを,  $(X, \mathfrak{a}^t)$  に付随する判定イdealと呼び,  $\tau(X, \mathfrak{a}^t)$  とかく.

$X$  がアフィンでない時も, 局所的に構成して張り合わせることで,  $\tau(X, \mathfrak{a}^t) \subseteq \mathcal{O}_X$  が定義される.  $\mathfrak{a} = 0$  の時は, 便宜的に  $\tau(X, \mathfrak{a}^t) = 0$  と定める.  $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_X$  の時は,  $\tau(X, \mathfrak{a}^t)$  は  $t$  によらない. これを  $\tau(X)$  とかく.  $\tau(X) = \mathcal{O}_X$  の時,  $X$  は強  $F$  正則という.

注意 4.5. 標数 0 の双有理幾何において, 乗数イdealというイdeal層が定義されているが, 判定イdealはその正標数版とみなされている. 乗数イdealは, 歴史的には  $L^2$  条件という解析的な文脈で誕生した概念であるのに対し, 判定イdealは可換環のイdealのある種の閉方操作の考察の為に出来た代数的な概念である. 面白いことに, 出自も定義も全く違うこれらのイdealは, 多くの良い性質を共有していることがわかっている. 勿論, 相違点もいくつか存在する. 本稿の主定理の証明に, 先行研究 [CdB] の手法がそのまま使えないのはその相違点の原因である.

例 4.2 の  $R$  について,  $\mathrm{Tr}_F$  を用いて考えると,  $\tau(R) = R$  とわかる. 判定イdealは局所化や完備化で保たれるので,  $X$  が非特異ならば  $X$  は強  $F$  正則であることがわかる.

その為一般に, 判定イdeal  $\tau(X, \mathfrak{a}^t)$  が大きい程,  $(X, \mathfrak{a}^t)$  の特異点は良い, と解釈される. 実際, 次が成り立っている.

命題 4.6.  $X$  を正規多様体,  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  を接続イdeal層,  $t$  を正の実数とする.

1.  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$  ならば  $\tau(X, \mathfrak{a}^t) \subseteq \tau(X, \mathfrak{b}^t)$ .
2. 任意の  $0 \leq \epsilon$  について  $\tau(X, \mathfrak{a}^{t+\epsilon}) \subseteq \tau(X, \mathfrak{a}^t)$ .
3. 任意の  $0 \leq \epsilon \ll 1$  について  $\tau(X, \mathfrak{a}^{t+\epsilon}) = \tau(X, \mathfrak{a}^t)$ .

最後に, 可逆層に付随する判定イdealを定義する.

定義 4.7.  $L$  を可逆層とする.  $L$  の定める漸近的判定イdealが  $\tau(X, \|L\|) := \sum_{n \geq 1} \tau(X, \mathfrak{b}(|nL|)^{1/n})$  により定まる.

## 5 主定理の証明

定理 1.1 の証明の為に, 二つの命題を用意する. 一つ目は, 判定イdealを用いた base point free theorem であり, [M] 内で本質的に証明された.

定理 5.1 ([M]).  $X$  は射影的で、標準層  $\omega_X$  が可逆層になっていると仮定する。  $L$  を巨大な可逆層、  $M$  を可逆層、  $H$  を非常に豊富な可逆層、  $A = (\dim X + 1)H$  とする。  $M - \omega_X - L$  が豊富と仮定すると、  $\tau(X, \|L\|) \otimes M \otimes A$  は大域切断で生成される。

これは、標数 0 でのある有名な base point free theorem ([L, Proposition 9.4.26]) の正標数での類似となっている。標数 0 の方の定理は、Nadel の消滅定理という小平型の消滅定理と Castelnuovo-Mumford regularity を組み合わせて示されていた。しかし、正標数では小平型の消滅定理は成り立たないので、Mustață は、  $\text{Tr}_F$  を用いて係数を大きくしていくテクニックと、藤田の消滅定理を用いた。

次に、二つ目の定理を紹介する。これは、命題 4.6 に関係しており、判定イデアルが不変になる十分条件を与えている。

定理 5.2 ([S]).  $x \in X$  を固定する。この時、  $X$  と  $x$  のみに依存する  $\delta > 0$  が存在して、任意のイデアル  $\mathfrak{a}$  と  $t > 0$  について、

$$t \cdot \text{ord}_x(\mathfrak{a}) < \delta \Rightarrow \tau(X, \mathfrak{a}^t)_x = \tau(X)_x.$$

この定理の証明は、例 4.2 で紹介した  $\text{Tr}_F$  を用いて行われる。(詳しい証明は [S, Corollary 3.14] を参照。)

最後に、定理 5.1 と定理 5.2 を組み合わせて、定理 1.1 の証明を行う。

定理 1.1 の証明. 簡単の為、  $\omega_X$  が可逆層であると仮定する。非常に豊富な  $H$  を固定し、  $A = (\dim X + 2)H$  とする。

$x \in X$  を固定した時、  $\text{ord}_x(\|L\|) = 0 \Rightarrow x \notin \text{Bs}(nL + A)$  を示せば十分。

$$\begin{aligned} \text{ord}_x(\|L\|) = 0 &\Rightarrow \forall n \geq 1, \text{ord}_x(\|nL\|) = 0 \\ &\Rightarrow \forall n \geq 1, \tau(X, \|nL\|)_x = \tau(X)_x = \mathcal{O}_{X,x} \\ &\Rightarrow \forall n \geq 1, x \notin \text{Bs}(nL + A) \end{aligned}$$

より示された。ただしここで、二行目に定理 5.2 を、三行目に定理 5.1 を用いた。 □

謝辞. この度は、城崎新人セミナーに参加させていただき、また発表の機会を与えていただきありがとうございました。様々な分野の人と交流が持てる大変貴重な機会となりました。セミナーを運営して下さった委員の皆さまに感謝いたします。

## 参考文献

- [CdB] Cacciola, S. and Di Biagio, L., *Asymptotic base loci on singular varieties*, Math. Z. **275** (2013), no. 1-2, 151–166.
- [G] Goodman, J., *Affine open subsets of algebraic varieties and ample divisors*, Ann. of Math. **89** (1969), no. 2, 160–183.
- [L] Lazarsfeld, R., *Positivity in Algebraic Geometry II*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics, 49, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [M] Mustață, M., *The non-nef locus in positive characteristic*, A celebration of algebraic geometry, 535–551, Clay Math. Proc. **18**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2013.
- [N] Nakayama, N., *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs 14, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.
- [S] Sato, K., *Stability of test ideals of divisors with small multiplicity*, preprint, arXiv:1602.02996.

# Dynamical degree and arithmetic degree of fiber preserving self-maps

佐野 薫\*

京都大学, 2016年2月

この度は第13回城崎新人セミナーに参加して, 有意義な時間を過ごすことができました. 参加及び講演の機会を下さった運営委員の皆さんに, この場をお借りして感謝申し上げます.

本稿では, 数論的力学系の分野に属する算術次数の研究, 特に川口-シルバーマン予想について, 大まかな雰囲気が伝わるような紹介を試みたのち, 私が証明したことを紹介する. 因子やコホモロジーに関する基本的な知識があることが望ましい.

## 1 数論的力学系とは

力学系とは, ある規則に従って状態が変化していくようなモデルを考え, その性質を調べる分野である. その時間のパラメータが連続的か離散的かによって, それぞれ連続力学系, 離散力学系と呼ばれる.

幾何的な対象とその自己写像を考えたとき, 自己写像を繰り返し施すという操作を, 離散的な時間での状態の変化とみなすことで, 離散力学系が得られる. 数論的力学系で扱われるのは, このようにして得られる離散力学系である.

詳しくは,  $K$  を高さ関数という関数 (後述) が定義できる体とし,  $X$  を  $K$  上で定義される (射影) 代数多様体とする.  $f$  を  $X$  の  $K$  上で定義された自己有理写像とする. この  $X$  と  $f$  の組が, 数論的力学系の対象である.

## 2 川口-シルバーマン予想 (KSC)

今節では, 算術次数に関する研究の中で川口-シルバーマン予想 (以降 KSC) と (私に) 呼ばれる予想を紹介する. またその主張に用いられる, 力学系次数および算術次数を次節で定義する.

以降では  $K$  を代数体,  $X$  を  $K$  上の滑らかな射影代数多様体,  $f$  を  $K$  上で定義された  $X$  の支配的自己有理写像とする.

**Conjecture 2.1** (KSC). 算術次数について以下が成立する.

- (a) 算術次数はどの軌道に対しても定義できる.
- (b) 算術次数は代数的整数である.
- (c)  $X$  と  $f$  を固定したときに算術次数として現れる数は有限個しかない.
- (d) 軌道が *Zariski-dense* ならば算術次数は力学系次数に一致する.

---

\*ksano@math.kyoto-u.ac.jp

**Remark 2.2.** KSC の (a),(b),(c) は一般の支配的自己射  $f$  に対しては証明されているが, (d) はそうではない. 次節で述べるように, 力学系次数は位相的な量を用いて定義されるのに対し, 算術次数は数論的な量を用いて定義される. (d) はそれらに関係があるという予想であり, 数論的に興味深いものである.

**Remark 2.3.** 以下の場合には KSC が証明されている.

- $\text{rank NS}(X) = 1$ ,  $f$  は射. [KS2, Theorem 2 (a)]
- $X = \mathbb{P}^N$ ,  $f$  は  $\mathbb{A}^N$  の正則な自己同型射の  $\mathbb{P}^N$  への延長. [KS2, Theorem 2 (b)]
- $X$  は滑らかな射影曲面,  $f$  は自己同型. [KS2, Theorem 2 (c)]
- $X = \mathbb{P}^N$ ,  $f$  は  $\mathbb{G}_m^N$  の自己単項式写像の  $\mathbb{P}^N$  への延長で, 軌道として考えるのは  $\mathbb{G}_m^N$  に含まれるもののみ. [S1, Proposition 19]
- $X$  はアーベル多様体,  $f$  は任意. [KS1, Corollary 31], [S2, Theorem 2]

### 3 力学系次数, 算術次数

**Definition 3.1** (力学系次数).  $H$  を  $X$  上の非常に豊富な因子とする.  $X$  の次元を  $d$  とおく. このとき

$$\delta_f := \lim_{n \rightarrow \infty} ((f^n)^* H \cdot H^{d-1})^{1/n}$$

を力学系次数という.

**Remark 3.2.** 力学系次数が収束し, 豊富な因子の取り方に依らないことはすでに知られている ([DS, Corollary 7], [G, Proposition 1.2]).

また, 自己線形写像

$$f^*: \text{NS}(X)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$$

のスペクトル半径を  $\rho(f^*)$  と書くことにすると, 力学系次数が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho((f^n)^*)^{1/n}$$

に一致することが知られている ([DS, Proposition 1.2], [KS3, Remark 7]). ここで  $\text{NS}(X)$  は  $X \times_K \bar{K}$  の Néron-Severi 群であり,

$$\text{NS}(X)_{\mathbb{R}} := \text{NS}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

である.  $\text{NS}(X)$  が  $H^2(X, \mathbb{Z})$  の部分群であることから,  $\text{NS}(X)_{\mathbb{R}}$  が有限次元ベクトル空間であることがわかり, さらに力学系次数が位相的な情報から定まる量であるとみなせる.

$X$  が特に射影空間  $\mathbb{P}^N$  の場合, 力学系次数が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\deg(f^n))^{1/n}$$

に一致することは容易にわかる.

力学系次数は自己有理写像の複雑さを表す量であるともみなせる.

**Definition 3.3** (高さ関数). 代数体  $K$  (すなわち  $\mathbb{Q}$  の有限次拡大体) に対し  $M_K$  を  $K$  上の標準付値全体とする. ここで標準付値とは,  $K$  上の付値であって,  $\mathbb{Q}$  に制限すると通常の絶対値あるいは  $p$  進絶対値に一致するようなものこととする. 点  $P = [x_0 : x_1 : \dots : x_N] \in \mathbb{P}(\overline{K})$  に対して,  $P \in \mathbb{P}^N(L)$  となるよう  $K$  上の十分大きな有限次拡大体  $L$  を固定する. このとき

$$h_{\mathbb{P}^N}(P) := \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \cdot \sum_{v \in M_L} [L_v:\mathbb{Q}_v] \log(\max\{|x_0|_v, |x_1|_v, \dots, |x_N|_v\})$$

を点  $P$  の (絶対対数) 高さといい,  $h_{\mathbb{P}^N}$  を  $\mathbb{P}^N$  上の Weil 高さ関数という.

$H$  を  $X$  上の非常に豊富な因子とする. 線形系と呼ばれる有限次  $K$  ベクトル空間

$$\mathcal{L}(H) := \{f \in K(X)^\times : H + \operatorname{div}(f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

が得られる.  $N := \dim_K \mathcal{L}(H) - 1$  として  $\mathcal{L}(H)$  の  $K$  上の基底  $\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$  を固定する. このとき閉埋め込み  $\varphi_H: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$  が

$$\varphi_H(P) := [f_0(P) : f_1(P) : \dots : f_N(P)]$$

により定まる.  $X$  上の  $H$  に関する Weil 高さ関数を

$$h_H(P) := h_{\mathbb{P}^N} \circ \varphi_H$$

で定義する.

さらに一般に実因子  $D \in \operatorname{NS}(X)_{\mathbb{R}}$  が  $D = \sum a_i H_i$  と非常に豊富な因子の有限実線形和で表し,  $D$  に関する Weil 高さ関数を

$$h_D := \sum a_i h_{H_i}$$

で定義する.

**Remark 3.4.** 実因子  $D$  に関する Weil 高さ関数の定義には高々有界関数の任意性がある.

**Definition 3.5** (算術次数). 任意の  $n$  に対して  $f^n$  が定義できるような点  $P \in X(\overline{K})$  全体を  $X_f(\overline{K})$  とおく.  $H$  を  $X$  上の豊富な因子とすると,  $P \in X_f(\overline{K})$  の算術次数が

$$\alpha_f(P) := \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{h_H(f^n(P)), 1\}^{1/n}$$

により定義される.

**Remark 3.6.** 算術次数が収束するとすれば, それは豊富な因子  $H$  の取り方に依らないことが知られている ([KS3, Proposition 12]).  $P \in X_f(\overline{K})$  の算術次数が  $f(P)$  の算術次数に等しいことが容易にわかる. 従って算術次数は軌道に対して定まる.

また算術次数は高さがどの程度の速さで増加していくのかを表しており, 軌道の複雑さを表す量であるとみなせる. また高さ関数を用いて定義されるため, 数論的な量であるともいえる.

## 4 主定理

最後に私が KSC に関して証明した, 以下の定理を挙げて本稿を閉じる.

**Theorem 4.1** (S.).  $X_i$  がそれぞれ, 次にあげる条件のいずれかをみたすとする

- $\operatorname{rank} \operatorname{NS}(X_i) = 1, b_1(X_i) = 0$

- $X_i$  はアーベル多様体
- $X_i$  は  $K3$  曲面
- $X_i$  は *Enriques* 曲面

このとき、 $\prod_{i=1}^n X_i$  の任意の自己射に対して  $KSC$  が成り立つ。すなわち、任意の自己射  $f$  と *Zariski-dense* な軌道を持つ任意の点  $P \in X(\overline{K})$  に対して

$$\alpha_f(P) = \delta_f$$

が成り立つ。

## 参考文献

- [DS] Dinh, T. C., Sibony, N., *Une borne supérieure de l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. (2) 161 (2005), no. 3, 1637-1644.
- [G] Guedj, V., *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math. (2) 161 (2005), no. 3, 1589-1607.
- [KS1] Kawaguchi, S., Silverman, J. H. *Dynamical canonical heights for Jordan blocks, arithmetic degrees of orbits, and nef canonical heights on abelian varieties*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., preprint, 2013, <http://arxiv.org/abs/1301.4964>
- [KS2] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *Examples of dynamical degree equals arithmetic degree*, Michigan Math. J. **63** (2014), no. 1, 41-63.
- [KS3] Kawaguchi, S., Silverman, J. H., *On the dynamical and arithmetic degrees of rational self-maps of algebraic varieties*, to appear in J. Reine Angew. Math., preprint, 2013, <http://arxiv.org/abs/1208.0815>.
- [S1] Silverman, J. H., *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory Dynam. Systems **34** (2014), **34** (2014), no. 2, 647-678.
- [S2] Silverman, J. H., *Arithmetic and dynamical degrees on abelian varieties*, preprint, 2015, <http://arxiv.org/abs/1501.04205>.

# 3次元単純整凸多面体の Ehrhart 多項式

須山 雄介\*

大阪市立大学大学院理学研究科, 2016年2月

## 1 トーリック多様体

複素  $d$  次元のトーリック多様体とは,  $\mathbb{C}$  上の正規代数多様体  $X$  であって, 代数的トーラス  $(\mathbb{C}^\times)^d$  を稠密な開集合として含み,  $(\mathbb{C}^\times)^d$  の自分自身への自然な作用を  $X$  全体への作用に拡張するものをいう.

代数的トーラスの作用は明示しないことが多いが, トーリック多様体という用語も込みで考えており, 代数多様体としては同じものでも, 作用が異なれば異なるトーリック多様体と考える. トーリック多様体は極めて特別な代数多様体である. 代数的トーラス, アフィン空間, 射影空間はトーリック多様体であるが, 同じ次元のトーリック多様体はすべて双有理同値である.

トーリック多様体は, 扇とよばれる組合せ論的な対象との間に 1 対 1 対応がある. これにより, トーリック多様体の代数多様体としての性質を, 扇の言葉で記述することができる.

**定義 1.1.**  $\mathbb{R}^d$  の有理強凸多面錐とは,  $\mathbb{Z}^d$  の有限個のベクトルで張られる多面錐  $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_r$  で,  $\mathbb{R}^d$  の 0 でないいかなる部分空間も含まないものをいう.

**定義 1.2.**  $\mathbb{R}^d$  の扇とは,  $\mathbb{R}^d$  の有理強凸多面錐からなる空でない有限集合  $\Delta$  であって, 次を満たすものをいう.

1.  $\sigma \in \Delta$  ならば,  $\sigma$  の各面もまた  $\Delta$  に属する.
2.  $\sigma, \tau \in \Delta$  ならば,  $\sigma \cap \tau$  はそれぞれの面である.

**定理 1.3** (トーリック幾何の基本定理). 複素  $d$  次元のトーリック多様体の同型類と,  $\mathbb{R}^d$  の扇は 1 対 1 に対応する.

ここでは扇  $\Delta$  からトーリック多様体  $X(\Delta)$  を構成する方法のみ説明する. まず, 各有理強凸多面錐  $\sigma \subset \mathbb{R}^d$  からアフィン代数多様体  $U_\sigma$  を構成する.  $\sigma^\vee = \{u \in \mathbb{R}^d \mid \text{すべての } v \in \sigma \text{ に対し } \langle u, v \rangle \geq 0\}$  とおくと,  $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d$  は和に関し可換モノイドになり, モノイド環  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d]$  は有限生成整域になる. したがって  $\text{Spec} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d]$  はアフィン代数多様体になるので, これを  $U_\sigma$  とおく.

一般の場合はこれらを貼り合わせる.  $\tau$  が  $\sigma$  の面ならば, 包含写像  $\tau \rightarrow \sigma$  から自然に定まる射  $U_\tau = \text{Spec} \mathbb{C}[\tau^\vee \cap \mathbb{Z}^d] \rightarrow \text{Spec} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^d] = U_\sigma$  は開埋め込みになる. これにより  $U_\tau$  を  $U_\sigma$  の開部分集合と同一視し,  $U_\sigma$  たちを貼り合わせてできる代数多様体が求めるトーリック多様体  $X(\Delta)$  である.

**定理 1.4.** 扇とトーリック多様体の間には表 1 のような関係がある.

---

\*d15san0w03@st.osaka-cu.ac.jp

扇 $\Delta$	トーリック多様体 $X(\Delta)$
$\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^d$	完備
各 $\sigma \in \Delta$ が $\mathbb{Z}^d$ の基底の一部で張られる	滑らか
各 $\sigma \in \Delta$ が $\mathbb{R}^d$ の基底の一部で張られる	$\mathbb{Q}$ 分解的

表 1: 扇とトーリック多様体の対応.

## 2 整凸多面体の Ehrhart 多項式

$P \subset \mathbb{R}^d$  を整凸多面体, すなわち頂点がすべて  $\mathbb{Z}^d$  上にある凸多面体とする. 非負整数  $l$  に対し  $lP = \{lx \mid x \in P\}$  とおくと,  $lP$  の格子点の数  $|(lP) \cap \mathbb{Z}^d|$  は  $l$  に関する  $d$  次多項式になり, これを  $P$  の **Ehrhart 多項式** とよぶ.  $|(lP) \cap \mathbb{Z}^d| = c_d l^d + c_{d-1} l^{d-1} + \dots + c_0$  とおくと,  $c_0, c_{d-1}, c_d$  は以下のように  $P$  の言葉で記述できる.

$P$  の余次元 1 の面を  $P$  のファセットとよぶ.  $F_1, \dots, F_n$  を  $P$  のファセット全体とする.  $F_k$  を含む超平面の格子点が定める立方体の体積を 1 と定めたときの  $F_k$  の体積を,  $F_k$  の相対体積とよび,  $\text{vol}(F_k)$  で表す. 余次元が 1 でない面に対しても同様に相対体積を定義し,  $\text{vol}$  で表す.  $P$  本体の相対体積  $\text{vol}(P)$  は, 通常の意味での  $P$  の体積に一致する.

**定理 2.1.** 次が成り立つ.

1.  $c_0 = 1$ .
2.  $c_{d-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{vol}(F_k)$ .
3.  $c_d = \text{vol}(P)$ .

**例 2.2.** 整凸多角形の Ehrhart 多項式は, 定理 2.1 で完全にわかる. 図 1 の多角形は, 面積が 9, 辺の相対体積の和が  $4 + 1 + 2 + 1 = 8$  だから, Ehrhart 多項式は  $9l^2 + 4l + 1$  である.

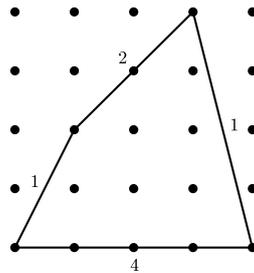


図 1: 整凸多角形.

一方,  $c_0, c_{d-1}, c_d$  以外の係数に対しては, 特別な場合を除き  $P$  の言葉による記述は知られていない.

## 3 主結果

$d$  次元凸多面体が単純であるとは, 各頂点でちょうど  $d$  個のファセットが交わっていることをいう.  $d = 3$  の場合, 一般的な公式が知られていないのは  $c_1$  であるが,  $P$  が単純な場合は次のよう

に記述できる.

$F_1, \dots, F_n$  を  $P$  のファセット全体とする. 各  $1 \leq k \leq n$  に対し,  $F_k$  に垂直で  $P$  の内部を向いている primitive なベクトル (成分の最大公約数が 1 のベクトル) を  $v_k \in \mathbb{Z}^3$  とおく.

**定義 3.1.**  $P$  の各辺  $E = F_{k_1} \cap F_{k_2}$  に対し,  $m(E), s(E) \in \mathbb{Q}$  を定義する.

1.  $m(E) = |((\mathbb{R}v_{k_1} + \mathbb{R}v_{k_2}) \cap \mathbb{Z}^3) / (\mathbb{Z}v_{k_1} + \mathbb{Z}v_{k_2})|$  と定める.
2.  $(\mathbb{R}v_{k_1} + \mathbb{R}v_{k_2}) \cap \mathbb{Z}^3$  の基底  $e_1, e_2$  で  $v_{k_1} = e_1, v_{k_2} = pe_1 + qe_2$  ( $0 \leq p < q$ ) とかけるものを 1 組とって,  $s(E) = s(p, q)$  とおく. ただし  $s(p, q)$  は **Dedekind 和**, すなわち

$$s(p, q) = \sum_{i=1}^q \left( \left( \frac{i}{q} \right) \right) \left( \left( \frac{pi}{q} \right) \right), \quad ((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & (x \notin \mathbb{Z}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

である.

**注意 3.2.**  $q = m(E)$  である.  $p$  は基底のとり方によりたかだか 2 通りの値をとるが,  $s(p, q)$  はともに同じ値をとるので,  $s(E)$  は well-defined である.

**定義 3.3.**  $P$  の各ファセット  $F$  に対し,  $C(F) \in \mathbb{Q}$  を定義する. まず,  $F$  のまわりの頂点やファセットを図 2 のように  $P_i, Q_i, F_{k_i}$  とおき,  $F$  に垂直で  $P$  の内部を向いている primitive なベクトルを  $v \in \mathbb{Z}^3$  とおく.

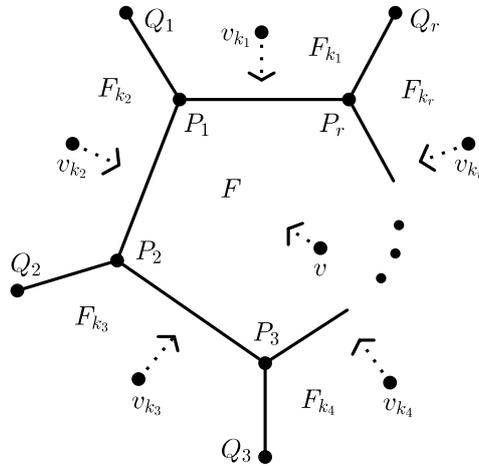


図 2:  $F$  のまわりの頂点やファセットを  $P_i, Q_i, F_{k_i}$  とおく.

以上の記号の下に, 各  $1 \leq i \leq r$  に対し,

$$\varepsilon_i = \det(v, v_{k_{i+1}}, v_{k_i}), \quad a_i = \frac{\langle \overrightarrow{P_{i-1}Q_{i-1}}, v_{k_{i+1}} \rangle}{\varepsilon_i \langle \overrightarrow{P_{i-1}Q_{i-1}}, v \rangle}, \quad b_i = \frac{\langle \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, v_{k_{i-1}} \rangle}{\varepsilon_{i-1} \langle \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, v_{k_i} \rangle}$$

とおき ( $v_{k_0} = v_{k_r}, v_{k_{r+1}} = v_{k_1}$  などと約束する),

$$C(F) = - \sum_{2 \leq i < j \leq r} a_i \begin{vmatrix} b_{i+1} & \varepsilon_{i+1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{i+1}^{-1} & b_{i+2} & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{j-2} & \varepsilon_{j-2}^{-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{j-2}^{-1} & b_{j-1} \end{vmatrix} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{j-1} \frac{\text{vol}(P_{j-1}P_j)}{m(P_{j-1}P_j)}$$

とおく. ただし,  $0 \times 0$  行列の行列式は 1 であると約束する.

**定理 3.4.**  $P \subset \mathbb{R}^3$  を 3 次元単純整凸多面体,  $E_1, \dots, E_m$  を  $P$  の辺全体,  $F_1, \dots, F_n$  を  $P$  のファセット全体とすると,

$$c_1 = \sum_{j=1}^m \left( s(E_j) + \frac{1}{4} \right) \text{vol}(E_j) + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n C(F_k)$$

が成り立つ.

定理 2.1 と合わせると,  $P$  の Ehrhart 多項式のすべての係数が  $P$  の言葉で記述できる.

## 4 証明

一般に,  $d$  次元整凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^d$  から  $\mathbb{R}^d$  の扇  $\Delta_P$  が構成できる.  $P$  の各面  $F$  に対し,  $\sigma_F = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle u' - u, v \rangle \geq 0 \quad \forall u' \in P, \forall u \in F\}$  とおくと,  $\Delta_P = \{\sigma_F \mid F \text{ は } P \text{ の面}\}$  は  $\mathbb{R}^d$  の扇になる. したがって複素  $d$  次元のトーリック多様体  $X(\Delta_P)$  が定まる.  $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^d$  だから定理 1.4 より  $X(\Delta_P)$  は完備である.

我々は次の事実を用いる. 詳しくは [F], [P]などを参照されたい.

1. 各  $0 \leq i \leq d$  に対し,  $X(\Delta_P)$  の Todd 類  $\text{Td}_i(X(\Delta_P)) \in A_i(X(\Delta_P))_{\mathbb{Q}}$  が定まる.
2.  $P$  の  $i$  次元の各面  $F$  に対し,  $X(\Delta_P)$  の複素  $i$  次元の閉部分多様体  $V(F)$  が定まる.
3.  $\text{Td}_i(X(\Delta_P)) = \sum_F r_F [V(F)]$  と表せたとすると,  $c_i = \sum_F r_F \text{vol}(F)$  が成り立つ.

$P \subset \mathbb{R}^3$  を 3 次元単純整凸多面体とする. 各  $\sigma \in \Delta_P$  は  $\mathbb{R}^3$  の基底の一部で張られるから, 定理 1.4 より  $X(\Delta_P)$  は  $\mathbb{Q}$  分解的である.  $\mathbb{Q}$  分解的なトーリック多様体は,  $\mathbb{Q}$  係数の Chow 環の構造がわかっており, 特に次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle [V(F_k)] = 0 \quad \forall u \in (\mathbb{Q}^3)^*, \quad (1)$$

$$[V(F_{k_1})][V(F_{k_2})] = \begin{cases} \frac{1}{m(E)} [V(E)] & (F_{k_1} \cap F_{k_2} = E) \\ 0 & (F_{k_1} \cap F_{k_2} = \emptyset). \end{cases} \quad (2)$$

Pommersheim は  $d$  次元単純整凸多面体  $P \subset \mathbb{R}^d$  に対し,  $\text{Td}_{d-2}(X(\Delta_P))$  を  $[V(F)]$  たちの線形結合で表している.  $d = 3$  の場合は次のようになる.

**定理 4.1** (Pommersheim [P]).  $P$  が 3 次元単純整凸多面体ならば,

$$\text{Td}_1(X(\Delta_P)) = \sum_{j=1}^m \left( s(E_j) + \frac{1}{4} \right) [V(E_j)] + \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n [V(F_k)]^2.$$

したがって、定義 3.3 の記号を用いると、定理 3.4 を示すには、 $P$  の各ファセット  $F$  に対し

$$[V(F)]^2 = - \sum_{2 \leq i < j \leq r} a_i \begin{vmatrix} b_{i+1} & \varepsilon_{i+1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{i+1}^{-1} & b_{i+2} & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{j-2} & \varepsilon_{j-2}^{-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{j-2}^{-1} & b_{j-1} \end{vmatrix} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{j-1}}{m(P_{j-1} P_j)} [V(P_{j-1} P_j)]$$

を示せばよい.  $u \in (\mathbb{Q}^3)^*$  を  $\langle u, v \rangle = 1, \langle u, v_{k_1} \rangle = 0, \langle u, v_{k_2} \rangle = 0$  で定めると、(1), (2) より

$$[V(F)]^2 = -[V(F)] \sum_{j=1}^r \langle u, v_{k_j} \rangle [V(F_{k_j})] = - \sum_{j=3}^r \langle u, v_{k_j} \rangle \frac{1}{m(P_{j-1} P_j)} [V(P_{j-1} P_j)].$$

したがって、 $3 \leq j \leq r$  に対し

$$\langle u, v_{k_j} \rangle = \sum_{i=2}^{j-1} a_i \begin{vmatrix} b_{i+1} & \varepsilon_{i+1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{i+1}^{-1} & b_{i+2} & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & \varepsilon_{i+2}^{-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{j-2} & \varepsilon_{j-2}^{-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{j-2}^{-1} & b_{j-1} \end{vmatrix} \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \cdots \varepsilon_{j-1}$$

を示せばよいが、これは  $j$  に関する帰納法で示せる.  $a_i, b_i$  の定義より  $\varepsilon_{i-1}^{-1} v_{k_{i-1}} + \varepsilon_i^{-1} v_{k_{i+1}} = a_i v + b_i v_{k_i}$  が成り立つので、 $v_{k_{j+1}}$  を  $v_{k_j}, v_{k_{j-1}}$  で表し、帰納法の仮定を使うと、等式の成立が確かめられる. これで証明が終わる.

**注意 4.2.** 1.  $C(F)$  は  $F$  のまわりのどのファセットを  $F_{k_1}$  とおいても同じ値になる.

2. 同じ方針で 4 次元以上の整凸多面体の Ehrhart 多項式を求めることは困難である. Ehrhart 多項式の係数はファセットの形状にも依存するが、3 次元多面体のファセットはすべて多角形であるのに対し、4 次元以上では様々な形状のファセットが現れるためである.

## 謝辞

この度は、第 13 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました. 異なる分野の参加者と議論をすることができ、たいへん充実した時間を過ごすことができました. このような場を設けてくださった運営委員の方々、そして参加者の皆様、特に主結果に関し有益なコメントをくださった土谷昭善氏、戸次鵬人氏に深く感謝申し上げます. 本研究は、科研費 (課題番号:15J01000) の助成を受けたものです.

## 参考文献

- [F] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 131, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.
- [P] J. E. Pommersheim, *Toric varieties, lattice points and Dedekind sums*, Math. Ann., 295 (1993), 1–24.

# Ehrhart 多項式の係数の符号に関する分類問題

土谷 昭善 \*

大阪大学 情報科学研究科, 2016 年 2 月

## 1 Ehrhart 多項式

空間  $\mathbb{R}^d$  の点  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  は  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq i \leq d$  のとき整数点と呼ばれる。凸多面体が整であるとはその任意の頂点が整数点であるときにいう。  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  を  $d$  次元整凸多面体とする。任意の正整数  $n$  について、

$$n\mathcal{P} := \{n\alpha \mid \alpha \in \mathcal{P}\}$$

と置く。  $n\mathcal{P}$  に含まれる整数点の個数を  $i(\mathcal{P}, n)$  と表す。つまり

$$i(\mathcal{P}, n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

である。

この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$  は、  $n$  に関する  $d$  次多項式であり、定数項は常に 1 である。
- $i(\mathcal{P}, n)$  の  $n^d$  における係数は  $\text{vol}(\mathcal{P})$ 、  $n^{d-1}$  における係数は  $\frac{\text{vol}(\partial\mathcal{P})}{2}$  と一致する。

この多項式  $i(\mathcal{P}, n)$  を  $\mathcal{P}$  の Ehrhart 多項式と呼ぶ。 Ehrhart 多項式に関する基本的なことは [1] に書いてある。

例 1.  $\mathcal{P} := \{(x_1, \dots, x_d) : 0 \leq x_i \leq 1, \text{ for all } i\} = [0, 1]^d$  とする。このとき

$$i(\mathcal{P}, n) = (n+1)^d$$

となる。

例 2.  $\mathcal{P} := \text{conv}(\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d\})$  とする。ここで  $\mathbf{0}$  は  $\mathbb{R}^d$  の原点、  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  は  $\mathbb{R}^d$  の標準基底である。このとき

$$i(\mathcal{P}, n) = \binom{n+d}{d}$$

となる。

一般に Ehrhart 多項式の計算は非常に複雑で、高次元のものや一般次元のものを計算することは困難である。

---

\*a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

## 2 負の係数を持つ Ehrhart 多項式

Ehrhart 多項式の性質から、 $d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P}$  に付随する Ehrhart 多項式の定数項、 $n^d$  及び  $n^{d-1}$  の係数は常に正である。一方  $n, \dots, n^{d-2}$  の係数は負になる可能性がある。

例 3. 正の整数  $m$  に対して、

$$\mathcal{P}_m := \text{conv}(\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, m)\}) \subset \mathbb{R}^3$$

とする。このとき

$$i(\mathcal{P}_m, n) = \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{12-m}{6}n + 1$$

となる。よって  $m \geq 13$  ならば  $i(\mathcal{P}_m, n)$  は負の係数を持つ。

このように負の係数を持つ Ehrhart 多項式の存在するが、この例以外にそのような例はほとんど知られていない。負の係数を持つ Ehrhart 多項式に関する結果もほとんどなかった。そこで次の問題を考えた。

問題 4. (1) 任意の次元  $d \geq 3$  に対して、負の係数を持つ Ehrhart 多項式は存在するか。  
(2) 任意の次元  $d \geq 3$ 、及び任意の整数  $1 \leq j \leq d-2$  に対して、 $n^j$  の係数が負となる Ehrhart 多項式は存在するか。

この問題に対する結果が次の定理である。

定理 5 ([3]). 任意の次元  $d \geq 3$  に対して、 $d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P}$  で  $i(\mathcal{P}, n)$  の  $n, \dots, n^{d-2}$  の係数すべてが負となるものが存在する。

例 6.  $\mathcal{P}$  を次の頂点からなる 5 次元整凸多面体とする。

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 50, 0, 0) \\ &(0, 0, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 2, 0), (0, 1, 0, 2, 0), (1, 1, 50, 2, 0) \\ &(0, 0, 0, 0, 2), (1, 0, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 0, 2), (1, 1, 50, 0, 2) \\ &(0, 0, 0, 2, 2), (1, 0, 0, 2, 2), (0, 1, 0, 2, 2), (1, 1, 50, 2, 2) \end{aligned}$$

このとき、

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{100}{3}n^5 + \frac{112}{3}n^4 - 13n^3 - \frac{61}{3}n^2 - \frac{7}{3}n + 1$$

となる。

この定理により問題 4. は完全に解決された。

## 3 Ehrhart 多項式の係数の符号パターン

$d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P}$  に対して、

$$S(\mathcal{P}) := \{j : i(\mathcal{P}, n) \text{ の } n^j \text{ の係数が負} \} \subset \{1, \dots, d-2\}$$

と定義する。

定理 5 によって、Ehrhart 多項式の 1 次から  $d-2$  次までの係数は、負になりえることが分かった。そこで次の以下の問題を考えた。

問題 7. 任意の次元  $d \geq 3$ 、及び  $\{1, \dots, d-2\}$  の任意の部分集合  $S$  に対して、 $d$  次元整凸多面体で  $S(\mathcal{P}) = S$  となるものが存在するか。

この問題に対する部分的問題が以下の定理である。

定理 8. 任意の次元  $d \geq 3$ 、及び  $\{1, \dots, d-2\}$  の任意の部分集合  $S$  に対して、 $|S| \leq 3$  であれば、 $d$  次元整凸多面体で  $S(\mathcal{P}) = S$  となるものが存在する。

$|S| = 1$  の場合は [3] で証明され、 $|S| = 2, 3$  の場合は [5] で証明されている。次の例は、この定理の  $|S| = 3$  の場合を証明するのに必要だったものである。計算機を用いてある程度条件を付け、ランダムに計算してみたが、数千万個から 1 億個ほど計算しても見つからなかった。ある程度の計算経験から自力で構成したのだが 1 時間ほどで構成することが出来た。負の係数を Ehrhart 多項式がほとんど知られていないという理由がわかる。

例 9.  $\mathcal{P}$  を次の頂点からなる 7 次元整凸多面体とする。

$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), (2, 6, 13, 1, 8, 138, 0), (3, 3, 6, 9, 14, 16, 167)$$

このとき

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{3841}{340}n^7 + \frac{19}{180}n^6 - \frac{13}{120}n^5 + \frac{11}{36}n^4 - \frac{19}{60}n^3 + \frac{233}{90}n^2 - \frac{31}{210}n + 1$$

となる。

また低次元から完全分類も行っている。

命題 10. 次元  $3 \leq d \leq 7$ 、及び  $\{1, \dots, d-2\}$  の任意の部分集合  $S$  に対して、 $d$  次元整凸多面体で  $S(\mathcal{P}) = S$  となるものが存在する。

これも  $3 \leq d \leq 6$  の場合は [3] で証明され、 $d = 7$  の場合は [5] で証明されている。

ここまで係数の符号は正と負のものしか考えていなかったが、当然係数が 0 となる Ehrhart 多項式も存在する。例 3. の  $\mathcal{P}_m$  に対して、 $m = 12$  のときがその例である。しかし、係数が 0 となる Ehrhart 多項式の例は負の係数の時以上に知られていない。今の所、わかっている結果は次の定理程度である。

定理 11 ([5]). 任意の次元  $d$ 、及び任意の整数  $1 \leq j \leq d-2$  に対して、ある  $d$  次元整凸多面体  $\mathcal{P}$  で  $i(\mathcal{P}, n)$  の  $n^j$  の係数が 0 となるものが存在する。

0 の係数を持つ Ehrhart 多項式はかなり自由度が低いので 2 個以上 0 の係数を持つ Ehrhart 多項式は存在しないと予想していた。しかし、最近になって以下の例が発見された。

例 12.  $\mathcal{P}$  を次の頂点からなる 4 次元整凸多面体とする。

$$(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 18, 0) \\ (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 18, 1)$$

このとき、

$$i(\mathcal{P}, n) = 3n^4 + 4n^3 + 1$$

となる。

これを用いると、4 の倍数の次元の時は 1 次と 2 次の係数が 0 となる Ehrhart 多項式を構成することができるが、複数の係数が 0 となる Ehrhart 多項式はこれ以外に知られていない。

## 4 Hilbert 多項式

体  $k$  に対して、 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  を有限生成次数付き  $k$  代数とする。このとき

$$H(R; i) := \dim_k R_i$$

は  $R$  の Hilbert 関数と呼ばれる。Ehrhart 多項式はある有限生成次数付き  $k$  代数の Hilbert 関数と一致することが知られている。Hilbert 関数は一般的には多項式にならないが次のことが知られている。

命題 13. 標準的、つまり次数 1 の元で生成される有限生成次数付き  $k$  代数  $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$  に対して、ある有理数係数の多項式  $P_R(x) \in \mathbb{Q}[x]$  とある正の整数  $N$  で、 $i \geq N$  ならば  $H(R, i) = P_R(i)$  となるものが存在する。

この  $P_R(x)$  を  $R$  の Hilbert 多項式と呼ぶ。Hilbert 多項式に関することは [2] を参照していただきたい。Ehrhart 多項式と同様に Hilbert 多項式の係数の符合パターン分類も自然と考えられる問題である。

$P_R(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  をある標準的有限生成次数付き  $k$  代数  $R$  の Hilbert 多項式とする。このとき整数の列

$$S(R) := (\text{sign}(a_0), \dots, \text{sign}(a_{d-1})) \in \{-1, 0, 1\}^d$$

を定義する。ここで、実数  $a$  に対して

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

である。また Hilbert 多項式の最高次の係数は常に正となることに注意する。

Hilbert 多項式について以下の問題を考える。

問題 14. 任意の次数  $d \geq 1$  及び任意の  $s \in \{-1, 0, 1\}^d$  に対してある標準的有限生成次数付き  $k$  代数  $R$  で  $S(R) = s$  となるものが存在するか。

この問題の結果が次の定理の系により得られる。

定理 15 ([4]). 任意の正の整数  $d$  と任意の  $d$  個の整数  $a_0, \dots, a_{d-1}$  に対して、ある正の整数  $N$  で任意の整数  $a \geq N$  に対して  $a_0 + a_1 x + \dots + a_{d-1} x^{d-1} + a x^d$  が Hilbert 多項式となるものが存在する。

よって Hilbert 多項式の場合、係数の符合パターン分類は完全に解決された。

## 参考文献

- [1] M. Beck and S. Robins, Computing the continuous discretely, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007.
- [2] F. Brenti, Hilbert polynomials in Combinatorics, *J. Alg. Comb.* **7**(1998), 127–156.

- [3] T. Hibi, A. Higashitani, A. Tsuchiya and K. Yoshida, Ehrhart polynomials with negative coefficients, arXiv:1312.7049.
- [4] A. Tsuchiya, On the sign patterns of the coefficients of Hilbert polynomials, arXiv:1603.06444.
- [5] A. Tsuchiya, On the sign patterns of the coefficients of Ehrhart polynomials, preparation.

# 切替拡散過程の概安定性の判定定理について

鳥生 梓\*

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻 M2, 2016 年 2 月

## 1 切替拡散過程の概安定性

まず, 本報告書で扱う過程について説明する.  $w(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))^T$  を  $m$  次元ブラウン運動<sup>(1)</sup> とする.  $r(t), t \geq 0$  を有限状態空間  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  に値をとる連続時間マルコフ連鎖で,  $\Delta \downarrow 0$  のとき,

$$P(r(t + \Delta) = j \mid r(t) = i) = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta) & (i \neq j) \\ 1 - \gamma_i\Delta + o(\Delta) & (i = j) \end{cases} \quad (1.1)$$

を満たすものとする. ここで  $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$  は生成行列と呼ばれ,

$$i \neq j \text{ ならば, } \gamma_{ij} \geq 0 \text{ であり, } \gamma_i = -\gamma_{ii} = \sum_{j:j \neq i} \gamma_{ij} \geq 0 \quad (1.2)$$

である. さらに, マルコフ連鎖  $r(\cdot)$  はブラウン運動  $w(\cdot)$  と独立であると仮定する.

関数  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$  および関数  $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  について, 次の確率微分方程式を考える.

$$dx(t) = f(x(t), t, r(t))dt + g(x(t), t, r(t))dw(t) \quad (1.3)$$

ただし, 初期値は  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  である. この確率微分方程式の解によって定まる  $\mathbb{R}^n$  上の確率過程  $x(t)$  を, マルコフ切替を持つ拡散過程と呼ぶ. この過程は,  $r(t) = i, 1 \leq i \leq N$  となる期間では切替のない確率微分方程式

$$dx(t) = f(x(t), t, i)dt + g(x(t), t, i)dw(t) \quad (1.4)$$

の解となっており, マルコフ連鎖  $r(t)$  の動きに従って,  $N$  個の方程式の間を一方から他方へスイッチングした結果として得られる.(cf. [1])

[2] は切替拡散過程に対する概安定性の判定定理として, 正則  $M$  行列に関する結果を用いた十分条件を与えた. 本報告書では, [2] の定理では判定定理が適用できない例を与える.

## 2 概安定性の判定定理

次の条件を課す.

\*azusa@math.kyoto-u.ac.jp

(1)もし  $A$  がベクトルまたは行列ならば, その転置行列を  $A^T$  と表す.

仮定 (A) 各  $i \in S = \{1, 2, \dots, N\}$  に対して,  $\alpha_i \geq 0, \sigma_i \geq 0, \rho_i \geq 0$  が存在して, すべての  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  に対して, 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned} x^\top f(x, t, i) &\leq \alpha_i |x|^2, \\ |x^\top g(x, t, i)| &\geq \sigma_i |x|^2, \\ |g(x, t, i)| &\leq \rho_i |x|. \end{aligned}$$

仮定 (B) ある  $K > 0$  が存在して, すべての  $(x, t, i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S$  に対して, 以下が成り立つ:

$$|f(x, t, i)| \leq K|x|. \quad (2.1)$$

$p \geq 0$  において,

$$\theta_i(p) = \frac{p}{2}((2-p)\sigma_i^2 - \rho_i^2) - p\alpha_i \quad (2.2)$$

とし,  $N \times N$  行列  $\mathcal{A}(p)$  を

$$\mathcal{A}(p) = \text{diag}(\theta_1(p), \dots, \theta_N(p)) - \Gamma \quad (2.3)$$

で定義する.

定理 2.1. 仮定 (A) 及び仮定 (B) が従うと仮定するとき, 切替拡散過程は概安定である.

定理 2.2. 仮定 (A) 及び仮定 (B) が従うと仮定する.

$$\frac{d}{dp} \det \mathcal{A}(0) = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \rho_1^2/2 - \alpha_1 & -\gamma_{12} & \dots & -\gamma_{1N} \\ \sigma_2^2 - \rho_2^2/2 - \alpha_2 & -\gamma_{22} & \dots & -\gamma_{2N} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_N^2 - \rho_N^2/2 - \alpha_N & -\gamma_{N2} & \dots & -\gamma_{NN} \end{vmatrix} > 0 \quad (2.4)$$

を仮定する.  $u \in S$  が存在して, すべての  $i \in S, i \neq u$  に対して,

$$\gamma_{iu} > 0 \quad (2.5)$$

も仮定する. このとき, 切替拡散過程は概安定である.

これらの定理の証明の概略は以下の通りである. まず, Borel–Cantelli の定理および仮定 (B) を用いて,  $p$  次安定性から概安定性を導く一般的な定理を示す. 次に, 確率微分方程式を用いた積分の評価および正則  $M$  行列に関する結果を用いることによって,  $p$  次安定性を示す.

### 3 判定定理が適用できない例

$\mu, v$  を実定数とすると, 確率微分方程式

$$dx(t) = \mu x(t)dt + vx(t)dw(t), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

の解  $x(t; x_0)$  を幾何ブラウン運動という. 伊藤の公式より, 解は

$$x(t) = x(0)\exp(vw(t) + (\mu - v^2/2)t) \quad (3.2)$$

である。従って,

$$\frac{1}{t} \log |x(t)| = \frac{1}{t} \log |x(0)| + v \cdot w(t)/t + (\mu - v^2/2) \quad (3.3)$$

は, 大数の法則より  $\mu - v^2/2$  に収束するので,  $\mu - v^2/2 < 0$  ならば  $x(t; x_0)$  は概安定,  $\mu - v^2/2 > 0$  ならば  $x(t; x_0)$  は概不安定である。

例 3.1.  $w(t)$  をスカラーブラウン運動とする。 $r(t)$  は  $S = \{1, 2\}$  に値をとり, 生成行列を

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

として, マルコフ切替を持ち, とともに切替のない解が安定な 1 次元確率微分方程式

$$\begin{cases} dx(t) = a_1 x(t) dt + b_1 x(t) dw(t) & (r(t) = 1 \text{ の期間, } a_1 - b_1^2/2 < 0) \\ dx(t) = a_2 x(t) dt + b_2 x(t) dw(t) & (r(t) = 2 \text{ の期間, } a_2 - b_2^2/2 < 0) \end{cases} \quad (3.5)$$

を考える。以下で定理 2.1 に基づき, (3.1) の解  $x(t)$  の安定性を調べる。 $i = 1$  のとき,  $\alpha_1 = a_1$ ,  $\sigma_1 = b_1$ ,  $\rho_1 = b_1$  であり,  $i = 2$  のとき,  $\alpha_2 = a_2$ ,  $\sigma_2 = b_2$ ,  $\rho_2 = b_2$  であることから, 仮定 (A) をみたす。このとき,

$$\mathcal{A}(p) = \begin{pmatrix} -(b_1^2/2)p^2 + (-a_1 + b_1^2/2)p + \gamma_1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & -(b_2^2/2)p^2 + (-a_2 + b_2^2/2)p + \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \gamma_1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & B + \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

となる。 $0 < p < 2$  において  $\mathcal{A}(p)$  の首座小行列式が正, つまり  $A + \gamma_1 > 0$  かつ  $\det \mathcal{A}(p) > 0$  となるための  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  の範囲を求める。

$$\det \mathcal{A}(p) > 0 \Leftrightarrow (A + \gamma_1)(B + \gamma_2) - (-\gamma_1)(-\gamma_2) > 0 \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 B > 0 & (A = 0 \Leftrightarrow p = -2a_1/b_1^2 + 1 \text{ のとき}) \\ \gamma_2 > -\frac{B}{A}(A + \gamma_1) & (A > 0 \Leftrightarrow 0 < p < -2a_1/b_1^2 + 1 \text{ のとき}) \\ \gamma_2 < -\frac{B}{A}(A + \gamma_1) & (A < 0 \Leftrightarrow p > -2a_1/b_1^2 + 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3.8)$$

(1)  $p = -2a_1/b_1^2 + 1$  のときは,  $B = ((b_1^2/b_2^2)a_1 - a_2)(-2a_1/b_1^2 + 1)$  より (3.8) は  $b_2^2 a_1 > a_2 b_1^2$  であれば  $\gamma_1 B > 0$  を意味する。

(2)  $0 < p < \min(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1)$  のときは,  $A > 0$  かつ  $B > 0$  より, (3.8) はいつも満たされる。

(3)  $\min(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1) < p < \max(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1)$  のときは,  $A < 0, B > 0$  より (3.8) は  $\gamma_2 < -\frac{B}{A}(A + \gamma_1)$  を意味する。

(4)  $\max(-2a_1/b_1^2 + 1, -2a_2/b_2^2 + 1) \leq p < 2$  のときは,  $A < 0, B \leq 0$  より, (3.8) をみたす  $\gamma_2 > 0$  は存在しない。

例 3.2. マルコフ切替を持ち, とともに解が不安定な 1 次元確率微分方程式

$$\begin{cases} dx(t) = \mu_1 x(t) dt + v_1 dw(t) & (r(t) = 1 \text{ の期間, } \mu_1 - v_1^2/2 > 0) \\ dx(t) = \mu_2 x(t) dt + v_2 dw(t) & (r(t) = 2 \text{ の期間, } \mu_2 - v_2^2/2 > 0) \end{cases} \quad (3.9)$$

を考える。

$$\theta_1(p) = \frac{p}{2}((2-p)v_1^2 - v_1^2) - p \cdot \mu_1 = -\frac{v_1^2}{2}p^2 + \left(\frac{v_1^2}{2} - \mu_1\right)p < 0 \quad (3.10)$$

$$\theta_2(p) = \frac{p}{2}((2-p)v_2^2 - v_2^2) - p \cdot \mu_2 = -\frac{v_2^2}{2}p^2 + \left(\frac{v_2^2}{2} - \mu_2\right)p < 0 \quad (3.11)$$

となる. ここで,  $A := -\theta_1(p) > 0$ ,  $B := -\theta_2(p) > 0$  とおく. このとき,  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  をどのようにとっても  $\mathcal{A}(p)$  は正則  $M$  行列にならない. このことを背理法で示す. もし  $\mathcal{A}(p)$  が正則  $M$  行列だったと仮定すると,

$$-A + \gamma_1 > 0 \Leftrightarrow \gamma_1 > A \quad (3.12)$$

ところがこのとき,

$$\det \begin{pmatrix} -A + \gamma_1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & -B + \gamma_2 \end{pmatrix} = (-A + \gamma_1)(-B + \gamma_2) - \gamma_1\gamma_2 \quad (3.13)$$

$$= AB - A\gamma_2 - B\gamma_1 \quad (3.14)$$

$$< AB - A\gamma_2 - BA < 0 \quad (3.15)$$

よって矛盾する. したがって定理 2.1 から安定性を判定することはできない.

例 3.3.  $x(t)$  を 2 次元ベクトル値のマルコフ切替をもつ拡散過程で,

$$dx(t) = A_{r(t)}x(t)dt + \sigma x(t)dw(t) \quad (3.16)$$

の解とする. ここで  $A_1, A_2$  を実対称な  $2 \times 2$  行列

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

とする. ただし  $a, b, c, d > 0$ ,  $a < b$ ,  $c > d$  とする. 切替のない解はともに不安定である.  $\sigma > 0$  を定数,  $w$  を 1 次元ブラウン運動とする.  $i = 1$  のとき,  $\alpha_1 = a$ ,  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\rho_1 = \sigma$  であり,  $i = 2$  のとき,  $\alpha_2 = d$ ,  $\sigma_2 = \sigma$ ,  $\rho_2 = \sigma$  であることから, 仮定 (A) をみたす. また,

$$|A_1x| \leq b|x|, |A_2x| \leq c|x| \quad (3.18)$$

より (2.1) をみたす.

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 - \rho_1^2/2 - \alpha_1 & -\gamma_{12} \\ \sigma_2^2 - \rho_2^2/2 - \alpha_2 & -\gamma_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma^2/2 - a & -\gamma_1 \\ \sigma^2/2 - d & \gamma_2 \end{vmatrix} = \gamma_2(\sigma^2/2 - a) + \gamma_1(\sigma^2/2 - d) < 0 \quad (3.19)$$

より (2.4) の条件をみたさない. よって, 定理 2.2 では安定性が判定できない.

## 参考文献

- [1] X.Mao and C.Yuan, Stochastic Differential Equations with Markovian Switching, Imperial College Press, 2006.
- [2] X.Mao, Stability of stochastic differential equations with Markovian switching, Stochastic Process. Appl., 79, 45-67, 1999.
- [3] 鳥生梓, 矢野孝次, 切替拡散過程の指数安定性, 第 7 回白浜研究集会報告集, 2015.

# 一般化屈折 Lévy 過程の屈折複合 Poisson 過程による近似

野場 啓\* 矢野 孝次

京都大学大学院理学研究科, 2016 年 2 月

## 1 序

Kyprianou と Loeffen[3] は, spectrally negative な Lévy 過程  $X$  に対して屈折 Lévy 過程を定義した. 彼らの屈折 Lévy 過程は定数  $c > 0$  と  $\alpha > 0$  を含む確率微分方程式

$$U_t - U_0 = X_t - \alpha \int_0^t 1_{\{U_s > c\}} ds \quad (1.1)$$

の解として定義される. 彼らは  $U$  の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度を,  $X$  のスケール関数を用いて特徴づけた.

論文 [4] で我々は, Kyprianou–Loeffen の屈折 Lévy 過程を一般化した. 具体的には, Lévy 測度が異なる二つの Lévy 過程  $X, Y$  に対し, 屈折 Lévy 過程  $U$  を, 値が正の時は  $X$  の, 値が負の時は  $Y$  の挙動をする確率過程として構成した. その際,  $X$  が有界変動な標本路を持つ場合は確率微分方程式を,  $X$  が有界変動でない標本路を持つ場合は周遊理論を用いて定義した. この定義に基づき,  $U$  の脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度を,  $X$  と  $Y$  のスケール関数を用いて特徴づけた. また, 周遊理論で定義した屈折 Lévy 過程の, 確率微分方程式によって定義した屈折 Lévy 過程による, ポテンシャル測度を用いた近似を行った. これによって, 周遊理論で定義した屈折 Lévy 過程は間接的に, 確率微分方程式によって特徴づけられる.

我々が定義した屈折 Lévy 過程に関する脱出問題と吸収壁ポテンシャル測度については [5] で報告した. この報告では, 周遊理論で定義した屈折 Lévy 過程の, 確率微分方程式によって定義した屈折 Lévy 過程による, ポテンシャル測度を用いた近似について述べる.

## 2 Spectrally negative な Lévy 過程

$(X = \{X_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^X)$  を spectrally negative な Lévy 過程とする. このとき, Laplace 指数

$$\Psi_X(\lambda) := \log \mathbb{E}_0^X(e^{\lambda X_1}) \quad (2.1)$$

は  $\lambda \geq 0$  で有限であることが知られている.  $\Psi_X$  の逆関数を  $\theta \geq 0$  で

$$\Phi_X(\theta) = \inf\{\lambda \geq 0 : \Psi_X(\lambda) = \theta\} \quad (2.2)$$

---

\*knoba@math.kyoto-u.ac.jp

と表すことにする. 特に,  $X$  の標本路が有界変動な場合は, Laplace 指数は

$$\Psi_X(\lambda) = \delta_X \lambda - \int_{(-\infty, 0)} (1 - e^{\lambda y}) \Pi_X(dy) \quad (2.3)$$

で与えられる. ただし,  $\delta_X > 0$  であり, Lévy 測度  $\Pi_X$  は  $\Pi_X[0, \infty) = 0$  および  $\int_{(-\infty, 0)} (1 \wedge |y|) \Pi_X(dy) < \infty$  を満たす.  $X$  の標本路が非有界変動な場合は, Laplace 指数は

$$\Psi_X(\lambda) = \gamma_X \lambda + \frac{\sigma_X^2}{2} \lambda^2 - \int_{(-\infty, 0)} (1 - e^{\lambda y} + \lambda y 1_{(-1, 0)}(y)) \Pi_X(dy) \quad (2.4)$$

で与えられる. ただし,  $\gamma_X \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_X \geq 0$  であり, Lévy 測度  $\Pi_X$  は  $\Pi_X[0, \infty) = 0$  および  $\int_{(-\infty, 0)} (1 \wedge y^2) \Pi_X(dy) < \infty$  を満たす.

**定義 2.1.**  $q \geq 0$  に対し, 関数  $W_X^{(q)} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  を,  $(-\infty, 0)$  上では  $W_X^{(q)} = 0$ ,  $[0, \infty)$  では連続で,  $\beta > \Phi_X(q)$  に対し

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W_X^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\Psi_X(\beta) - q} \quad (2.5)$$

を満たす関数として定義する. この関数をスケール関数と呼ぶ.

Laplace 指数やスケール関数について, 詳しくは [2] を参照されたい.

### 3 一般化屈折 Lévy 過程

$(X = \{X_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^X)$ ,  $(Y = \{Y_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^Y)$  を spectrally negative な Lévy 過程とする.  $X$  は Gaussian part を持たないと仮定する.  $X$  の標本路が有界変動なとき, 強 Markov 過程  $U$  を確率微分方程式

$$U_t = U_0 + \int_{(0, t]} 1_{\{U_{t-} \geq 0\}} dX_s + \int_{(0, t]} 1_{\{U_{t-} < 0\}} Y_s, \quad (3.1)$$

の強解として定義する (強解を持つことの証明は [3] の 3 章と同様にできる.  $X$  と  $Y$  が複合 Poisson 過程ならば一意性もすぐにわかる.).  $X$  の標本路が有界変動でないとき, 周遊測度  $n^U$  を, 非負可測関数  $F$  に対し,

$$n^U \left( F \left( (U_t)_{t < \tau_0^-}, (U_{t+\tau_0^-})_{t \geq 0} \right) \right) = n^X \left( \mathbb{E}_x^Y (F(w, (Y_t)_{t \geq 0})) \Big|_{\substack{x=X(\tau_0^-) \\ w=(X_t; t < \tau_0^-)}} \right) \quad (3.2)$$

を満たすように定義し, 周遊理論を用いて  $n^U$  に対応する 0 での停留がない強 Markov 過程  $U$  を定義する. 上記の方法で定義した強 Markov 過程  $U$  のことを (一般化) 屈折 Lévy 過程と呼ぶ.

$x \in \mathbb{R}$  に対し,

$$\tau_x^+ = \tau_x^+(U) = \inf\{t > 0 : U_t > x\}, \quad \tau_x^- = \tau_x^-(U) = \inf\{t > 0 : U_t < x\} \quad (3.3)$$

とする.

**定理 3.1** ([4]).  $q > 0$  と非負可測関数  $f$  に対し,  $U$  の原点出発ポテンシャル測度は

$$R_U^{(q)} f(0) := \mathbb{E}_x^X \left( \int_0^\infty e^{-qt} f(U_t) dt \right) = \frac{1}{q} \frac{\int_0^\infty e^{-\Phi_X(q)y} f(y) dy + \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} R_{Y^0}^{(q)} f(u) K_X^{(q)}(du, dv)}{\int_0^\infty e^{-\Phi_X(q)y} dy + \int_{(-\infty, 0) \times (0, \infty)} R_{Y^0}^{(q)} 1(u) K_X^{(q)}(du, dv)} \quad (3.4)$$

で与えられる。また、これを用いて、原点以外を出発するポテンシャル測度は

$$R_U^{(q)} f(x) = R_{Y_0}^{(q)} f(x) + e^{\Phi_Y(q)x} R_U^{(q)} f(0), \quad x < 0 \quad (3.5)$$

および

$$R_U^{(q)} f(x) = \underline{R}_X^{(0,q)} f(x) + \int_{(-\infty,0) \times (0,\infty)} R_U^{(q)} f(u) G_X^{(q)}(x, du, dv), \quad x > 0 \quad (3.6)$$

と表される。ただし、 $\underline{R}_X^{(0,q)} f(x)$  は  $X$  に対し原点を下側吸収壁とするポテンシャル測度

$$\underline{R}_X^{(0,q)} f(x) = \mathbb{E}_x^X \left( \int_0^{\tau_0^-} e^{-qt} f(X_t) dt \right) \quad (3.7)$$

とする。

**定理 3.2** ([4]).  $x \in [b, a]$  と  $q \geq 0$  に対し、

$$\mathbb{E}_x^U \left( e^{-q\tau_a^+} : \tau_a^+ < \tau_b^- \right) = \frac{V_U^{(q)}(b, x)}{V_U^{(q)}(b, a)} \quad (3.8)$$

が成り立つ。ただし、

$$V_U^{(q)}(b, x) = \begin{cases} W_X^{(q)}(x) W_Y^{(q)}(-b) \left( \Psi_X'(0) \vee 0 \right) \\ \quad + \int_{(-\infty,0) \times (0,\infty)} (W_X^{(q)}(x) W_Y^{(q)}(-b) e^{\Phi_Y(0)u} \\ \quad - W_Y^{(q)}(u-b) W_X^{(q)}(x-v)) K_X(du, dv), & x \in (0, a] \\ W_Y^{(q)}(x-b), & x \in [b, 0] \end{cases} \quad (3.9)$$

$$K_X(du, dv) := \Pi_X(du - v)dv \quad (3.10)$$

である。

定理 3.2 より、 $b \uparrow \infty$  とする極限を計算することで、以下の系が得られる。

**系 3.3** ([4]).  $x \in (-\infty, a]$  と  $q \geq 0$  に対し、

$$\mathbb{E}_x^U \left( e^{-q\tau_a^+} \right) = \frac{\bar{V}_U^{(q)}(x)}{\bar{V}_U^{(q)}(a)} \quad (3.11)$$

が成り立つ。ただし、

$$\bar{V}_U^{(q)}(x) = \begin{cases} W_X^{(q)}(x) \left( \Psi_X'(0) \vee 0 \right) \\ \quad + \int_{(-\infty,0) \times (0,\infty)} (W_X^{(q)}(x) e^{\Phi_Y(0)u} \\ \quad - W_X^{(q)}(x-v) e^{\Phi_Y(q)u}) K_X(du, dv), & x \in (0, a] \\ e^{\Phi_Y(q)x}, & x \in (-\infty, 0] \end{cases} \quad (3.12)$$

である。また、 $\bar{V}_U^{(q)}(x)$  は連続で  $x$  について単調増加な関数である。

#### 4 複合 Poisson 屈折 Lévy 過程による近似

$X$  の標本路が有界変動でない場合は周遊理論を用いて屈折 Lévy 過程  $U$  を定義したが、この  $U$  を確率微分方程式 (3.1) を用いて特徴づけたい。具体的には、確率微分方程式 (3.1) の解による  $U$  のポテンシャル測度を用いた近似について述べる。

任意の spectrally negative な Lévy 過程 ( $Z = \{Z_t : t \geq 0\}, \mathbb{P}_x^Z$ ) の Laplace 指数を

$$\Psi_Z(\lambda) = \gamma_Z \lambda + \frac{\sigma_Z^2}{2} \lambda^2 - \int_{(-\infty, 0)} (1 - e^{\lambda y} + \lambda y 1_{(-1, 0)}(y)) \Pi_Z(dy) \quad (4.1)$$

と表すとき、 $\{Z^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  を spectrally negative な複合 Poisson 過程の列で Laplace 指数が

$$\begin{aligned} \Psi_{Z^{(n)}}(\lambda) &= \gamma_Z \lambda - \sigma_Z^2 n^2 \left( 1 - e^{\lambda(-\frac{1}{n})} + \lambda \left( -\frac{1}{n} \right) \right) \\ &\quad - \int_{(-\infty, -\frac{1}{n})} (1 - e^{\lambda y} + \lambda y 1_{(-1, -\frac{1}{n})}(y)) \Pi_Z(dy) \end{aligned} \quad (4.2)$$

で与えられるものとする。

$\{X^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  と  $\{Y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  をそれぞれ  $X$  と  $Y$  から上記の方法によって定まる spectrally negative な複合 Poisson 過程の列とし、 $\{X^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  と  $\{Y^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  は独立とする。確率微分方程式 (3.1) の  $X$  を  $X^{(n)}$  に、 $Y$  を  $Y^{(n)}$  に変えた方程式 (3.1) の一意の強解を  $U^{(n)}$  とする。

**定理 4.1** ([4]).  $q > 0$  と連続関数  $f$  で  $\lim_{x \uparrow \infty} f(x) = \lim_{x \downarrow -\infty} f(x) = 0$  を満たすものに対し、

$$R_{U^{(n)}}^{(q)} f \rightarrow R_U^{(q)} f \text{ uniformly as } n \uparrow \infty \quad (4.3)$$

が成り立つ。

この定理から、 $U^{(n)}$  が  $U$  に càdlàg 関数空間上で分布収束することが示される。以下でこの定理の証明の概略を与える。

1) ポテンシャル測度の各点収束性、つまり

$$R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) \rightarrow R_U^{(q)} f(x) \text{ as } n \uparrow \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

を示す。定理 3.1 における  $R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x)$  と  $R_U^{(q)} f(x)$  の表示において、優収束定理を用いればよい。

2)  $\{\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  が同程度連続であることを示す。系 3.3 より、 $\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$  と  $\bar{V}_U^{(q)}$  は連続で単調増加な関数であるから、 $\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$  が  $\bar{V}_U^{(q)}$  に各点収束することを示せば一様収束することがわかり、同程度連続性も求められる。 $x \leq 0$  の時は、 $\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)} = e^{\Phi_{Y^{(n)}}(q)x}$  であるから、 $Y^{(n)}$  の定義より各点収束はすぐにわかる。 $x > 0$  の時は、 $\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$  の各点収束は、 $\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$  の定義より  $\mathbb{E}_0^{U^{(n)}}(e^{-q\tau_x^+})$  の  $\mathbb{E}_0^U(e^{-q\tau_x^+})$  への各点収束と同値である。強 Markov 性を用いて、

$$R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty, x)}(0) = \frac{1}{q} - \mathbb{E}_0^{U^{(n)}}(e^{-q\tau_x^+}) \left( \frac{1}{q} - R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty, x)}(x) \right) \quad (4.5)$$

を示す。1) を用いれば、 $R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty, x)}(0)$  の  $R_U^{(q)} 1_{(-\infty, x)}(0)$  への収束や、 $R_{U^{(n)}}^{(q)} 1_{(-\infty, x)}(x)$  の  $R_U^{(q)} 1_{(-\infty, x)}(x)$  への収束が示せるため、 $\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}$  の各点収束を示せる。

3) コンパクト区間上の一様収束, すなわち  $k > 0$  を固定したときに

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sup_{x \in [-k, k]} \left| R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) - R_U^{(q)} f(x) \right| = 0 \quad (4.6)$$

となることを示す. **1)** が得られているため,  $\{R_{U^{(n)}}^{(q)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  の  $[-k, k]$  上での同程度連続性を示すことができれば十分である. 強 Markov 性と系 3.3 を用いると,

$$\left| \mathbb{E}_y^{U^{(n)}} \left( \int_0^\infty e^{-qt} f(U_t^{(n)}) dt \right) - \mathbb{E}_x^{U^{(n)}} \left( \int_0^\infty e^{-qt} f(U_t^{(n)}) dt \right) \right| \quad (4.7)$$

$$\leq \frac{2}{q} \|f\| \left( 1 - \mathbb{E}_x^{U^{(n)}} \left( e^{-q\tau_y^+} \right) \right) = \frac{2}{q} \|f\| \left( 1 - \frac{\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}(x)}{\bar{V}_{U^{(n)}}^{(q)}(y)} \right) \quad (4.8)$$

とできて, **2)** に帰着する.

4) 無限遠での一様な減衰, すなわち

$$\lim_{k \uparrow \infty} \sup_{|x| > k} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) \right| = 0 \quad (4.9)$$

となることを示す.  $x$  が正の場合は  $k' > 0$  と  $k'' > 0$  に対し,

$$\sup_{x > k' + k''} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) \right| \quad (4.10)$$

$$\leq \sup_{x > k' + k''} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \mathbb{E}_x^{U^{(n)}} \left( \int_0^{\tau_{k'}^-} e^{-qt} f(U_t^{(n)}) dt \right) \right| + \sup_{x > k' + k''} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \mathbb{E}_x^{U^{(n)}} \left( \int_{\tau_{k'}^-}^\infty e^{-qt} f(U_t^{(n)}) dt \right) \right| \quad (4.11)$$

$$\leq \frac{1}{q} \sup_{x > k' + k''} |f(x)| + \frac{1}{q} \|f\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_{k' + k''}^{X^{(n)}} \left( e^{-q\tau_{k'}^-} \right) \quad (4.12)$$

を満たすため, (4.12) の二つの項を十分小さくするように  $k'$  と  $k''$  をとればよい.  $x$  が負の場合も同様に行うことができる.

5) 任意の  $k > 0$  に対して,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) - R_U^{(q)} f(x) \right| \leq \sup_{|x| \leq k} \left| R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) - R_U^{(q)} f(x) \right| + 2 \sup_{|x| > k} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| R_{U^{(n)}}^{(q)} f(x) \right| \quad (4.13)$$

が成り立つため, **3)** と **4)** を用いて主張 (4.3) が示される.

## 参考文献

- [1] J. Bertoin. Lévy processes. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [2] A. E. Kyprianou. Fluctuations of Lévy Processes with Applications. Second edition. Universitext, Springer, 2014.
- [3] A. E. Kyprianou and R. L. Loeffen. Refracted Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré. 26(2010), 24–44.
- [4] K. Noba and K. Yano. Generalized refracted Lévy process and its application to exit problem. in preparation.
- [5] 野場 啓, 矢野 孝次. 屈折 Lévy 過程の一般化と脱出問題. 無限分解可能過程に関連する諸問題 (20), 共同研究リポート 352(2016), 118–126.

# The Hilbert scheme of two point of Enriques surface

Hayasi Taro\*

department of mathematics of Osaka University

## Introduction

Throughout this paper, we work over  $\mathbb{C}$ . We denote the Hilbert scheme of  $n$  points of a surface  $S$  by  $S^{[n]} = \text{Hilb}^n S$ . Let  $E$  be an Enriques surface.  $E^{[n]}$  has a Calabi-Yau manifold  $X_n$  as the universal covering space of degree 2. In [8, Theorem1.3], the author showed that for Enriques surfaces  $S, T$ , and  $n \geq 3$ , if the universal covering spaces of  $S^{[n]}$  and  $T^{[n]}$  are isomorphic, then  $S^{[n]}$  and  $T^{[n]}$  are isomorphic by checking the action to cohomology ring of the automorphisms of them. However, in general,  $S \not\cong T$  even if their universal covering spaces are isomorphic by a result of Ohashi [10]. For  $n = 2$ , since the second cohomology of  $X_2$  is bigger than that of  $E^{[2]}$  [8, Theorem5.1], the automorphisms of  $E^{[2]}$  and  $X_2$  were not studied enough in [8]. The author does not know  $E^{[2]}$  is uniquely determined by  $X_2$ . In this paper, we study the automorphisms of the Hilbert scheme of two points of Enriques surfaces by using that the second cohomology of  $X_2$  is bigger than that of  $E^{[2]}$ . There are two main results (Theorem 0.3 and 0.5).

Let  $S$  be a smooth projective surface. First we study whether  $S$  could be restored from  $S^{[2]}$ , i.e. for an two projective surfaces  $S$  and  $S'$ , if  $S^{[2]} \cong S'^{[2]}$ , then are  $S$  and  $S'$  isomorphic? For K3 surfaces, this problem is fully studied. In [11, Example 7.2], Yoshioka showed that there exist two K3 surfaces  $K$  and  $K'$  such that  $K \not\cong K'$  and  $K^{[2]} \cong K'^{[2]}$ . The following two theorems is very useful:

**Theorem 0.1.** *For a smooth projective surface  $S$ , we put*

$$h^{p,q}(S) := \dim_{\mathbb{C}} H^q(S, \Omega_S^p) \text{ and}$$

$$h(S, x, y) := \sum_{p,q} h^{p,q}(S) x^p y^q.$$

---

\*tarou-hayashi@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

By [7, Theorem 2] and [6, page 204], we have the equation (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p,q} h^{p,q}(S^{[n]}) x^p y^q t^n = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{p,q=0}^2 \left( \frac{1}{1 - (-1)^{p+q} x^{p+k-1} y^{q+k-1} t^k} \right)^{(-1)^{p+q} h^{p,q}(S)}.$$

**Theorem 0.2.** [7] *Let  $X$  be smooth projective variety with  $n = \dim X \geq 1$ . Then there is an isomorphism  $S_d H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \cong H^0(X^{[n]}, \omega_{X^{[n]}}^{\otimes m})$  and the Kodaira dimension  $\kappa(X^{[n]}) = d\kappa(X)$ . whenever  $mn$  is even.*

Therefore, for a smooth projective surface  $S$  the Hodge number and Kodaira dimension can be restored from  $S^{[n]}$ . However, we may not necessarily restore  $S$  from  $S^{[n]}$  because there is the example of Yoshioka. In addition, the relationship of the deformation of  $S$  and  $S^{[n]}$  is known. Our first main result (Theorem 0.3) shows that this never happened to Enriques surfaces:

**Theorem 0.3.** *Let  $E$  be an Enriques surface and  $S$  a smooth projective surface. If there is an isomorphism  $\varphi : E^{[2]} \xrightarrow{\sim} S^{[2]}$ , then  $S$  is an Enriques surface, and there is an isomorphism  $\psi : E \xrightarrow{\sim} S$  such that  $\varphi$  is induced by  $\psi$ .*

We also notice that for the universal covering  $K3$  surfaces  $X$  and  $Y$  of Enriques surfaces  $E$  and  $F$ , Sosna [4] showed if  $X^{[n]} \cong Y^{[n]}$  for some  $n \geq 2$ , then  $X \cong Y$ .

Our second main result (Theorem 1.3) is on the naturality problem of automorphisms of  $S^{[2]}$ . First we recall the definition of the natural automorphism [3].

**Definition.** Let  $S$  be a smooth compact surface. For  $n \geq 2$ , an automorphism  $g \in \text{Aut}(S^{[n]})$  is called natural if there is an automorphism  $f \in \text{Aut}(S)$  such that  $g = f^{[n]}$ . Here  $f^{[n]}$  is the automorphism of  $S^{[n]}$  that is naturally induced by  $f \in \text{Aut}(S)$ .

**Theorem 0.4.** *For  $n \geq 2$ , let  $S$  be a  $K3$  surface or an Enriques surface, and  $D$  the exceptional divisor of the Hilbert-Chow morphism  $\pi : S^{[n]} \rightarrow S^{(n)}$ . An automorphism  $f$  of  $S^{[n]}$  is natural if and only if  $f(D) = D$ .*

When  $S$  is not a  $K3$  surface and an Enriques surface, this theorem does not hold good, i.e. there exist a smooth projective surface  $S$  which has an automorphism  $f$  of  $S^{[n]}$  such that  $f(D) = D$  but  $f$  is not natural. Our second main result is the following theorem:

**Theorem 0.5.** *Let  $E$  be an Enriques surface. Then  $\text{Aut}(E^{[2]}) \cong \text{Aut}(E)$ , i.e. all automorphisms of  $\text{Aut}(E^{[2]})$  are natural.*

For a smooth quartic surface  $Z$  of  $\mathbb{P}^3$  which is a  $K3$  surface, generic line  $L$  on  $\mathbb{P}^3$  meets  $Z$  along 4 distinct points. By alternating them, Beauville showed  $Z^{[2]}$  has an automorphism which is not natural [1]. Further, Oguiso showed the fact there exists a  $K3$  surface  $Y$  such that  $[\text{Aut}(Y^{[2]}) : \text{Aut}(Y)] = \infty$  under the natural inclusion [9, Theorem 1.2 (1)], which is completely different from Theorem 1.3.

The author does not know whether Theorem 1.1 and 1.3 are true or no for  $n \geq 3$ .

## Preliminaries

It is well known that  $S^{[2]} \cong \text{Blow}_{\Delta_S} S^2 / \mathcal{S}_2$ , where

$$\Delta_S := \{(x, y) \in S^2 : x = y\},$$

and  $\mathcal{S}_2$  is the symmetric group of degree 2, which acts by interchanging the two factors of the product.

Let  $E$  be an Enriques surface, and  $\mu : K \rightarrow E$  its universal covering space. Let  $\pi : X \rightarrow E^{[2]}$  be the universal covering space of  $E^{[2]}$ .

From  $\text{Blow}_{\Delta_E} E^2 / \mathcal{S}_2$  and  $\mu : K \rightarrow E$ , we will construct  $X$ . Let  $\sigma$  be the covering involution of  $\mu$ ,  $H$  the finite subgroup of  $\text{Aut}(K^2)$  which is generated by  $\mathcal{S}_2$  and  $\sigma \times \sigma$ , and  $G$  the finite subgroup of  $\text{Aut}(K^2)$  which is generated by  $\mathcal{S}_2$  and  $\text{id}_K \times \sigma$ . Since  $K^2 / G = E^2 / \mathcal{S}_2$ , and  $H$  is a normal subgroup of  $G$ , the covering space  $\mu^2 : K^2 \rightarrow E^2$  induces the covering spaces [8, Lemma 2.3, 2.4]:

$$K^2 \setminus \mu^{2^{-1}}(\Delta_E) \rightarrow (E^2 \setminus \Delta_E) / \mathcal{S}_2, \text{ and}$$

$$\text{Blow}_{\mu^{2^{-1}}(\Delta_E)} K^2 / H \rightarrow \text{Blow}_{\Delta_E} E^2 / \mathcal{S}_2.$$

Since  $|G/H| = 2$ , and  $E^{[2]} \cong \text{Blow}_{\Delta_E} E^2 / \mathcal{S}_2$ , we have  $X \cong \text{Blow}_{\mu^{2^{-1}}(\Delta_E)} K^2 / H$ , and the automorphism  $\text{id}_K \times \sigma$  of  $K^2 / H$  induces the covering involution  $\rho$  of  $\pi : X \rightarrow E^{[2]}$ . From here, we consider  $X$  as  $\text{Blow}_{\mu^{2^{-1}}(\Delta_E)} K^2 / H$ .

Let  $\eta : \text{Blow}_{\mu^{2^{-1}}(\Delta_E)} K^2 / H \rightarrow K^2 / H$  be the natural morphism. We put

$$T := \{(x, y) \in K^2 : \sigma(x) = y\}.$$

Then we have  $\mu^{2^{-1}}(\Delta_E) = \Delta_K \cup T$ . Furthermore, we put

$$D_1 := \eta^{-1}(T), \quad D_2 := \eta^{-1}(\Delta_K),$$

and

$$h_i \text{ the first chern class of } D_i \text{ for } i = 1, 2.$$

Since  $\pi^{-1}(D) = D_1 \cup D_2$ , we get

$$\mathbb{H}^2(X, \mathbb{C}) = \pi^*(\mathbb{H}^2(E^{[2]}, \mathbb{C})) \oplus \mathbb{C}\langle h_1 - h_2 \rangle.$$

Thus  $\dim \mathbb{H}^2(X, \mathbb{C}) = 12 = \dim \mathbb{H}^2(E^{[2]}, \mathbb{C}) + 1$ . Pay attention that for  $n \geq 3$   $\dim \mathbb{H}^2(X, \mathbb{C}) = \dim \mathbb{H}^2(E^{[n]}, \mathbb{C}) = 11$ . Furthermore since  $(\text{id}_K \times \sigma)(T) = \Delta_K$ , we get  $\rho^* h_1 = h_2$ ,

$$\text{the eigenspace for the eigenvalue } -1 \text{ of } \rho^* \text{ is } \mathbb{C}\langle h_1 - h_2 \rangle,$$

and

$$\text{the eigenspace for the eigenvalue } 1 \text{ of } \rho^* \text{ is } \pi^*(\mathbb{H}^2(E^{[2]}, \mathbb{C})).$$

## Main theorems

Theorem 0.3 and 0.4 are followed by the following theorem:

**Theorem 0.6.** *Let  $E$  and  $E'$  be two Enriques surfaces. For an isomorphism  $g : E^{[2]} \xrightarrow{\sim} E'^{[2]}$ , we get  $g(D) = D'$ .*

**sketch 0.7.** *From the uniqueness of the universal covering space, there is an isomorphism  $f : X \xrightarrow{\sim} X'$  such that  $g \circ \pi = \pi' \circ f$ . From this, we have only to show  $f(\pi^{-1}(D)) = \pi'^{-1}(D')$ . Since the each degree of  $\pi$  and  $\pi'$  is 2, we have  $f^{-1} \circ \rho' \circ f = \rho$  and  $\rho^* = f^* \circ \rho'^* \circ f^{-1*}$  as an automorphism of  $H^2(X, \mathbb{C})$ . Since the eigenspace for the eigenvalue  $-1$  of  $\rho^*$  is  $\mathbb{C}\langle h_1 - h_2 \rangle$ , we have*

$$\begin{aligned} -(h_1 - h_2) &= \rho^*(h_1 - h_2) \\ &= f^* \circ \rho'^* \circ f^{-1*}(h_1 - h_2) \text{ in } H^2(X, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Thus for a linear isomorphism  $f^*$  from  $H^2(X', \mathbb{C})$  to  $H^2(X, \mathbb{C})$ , we obtain

$$\rho'^*(f^{-1*}(h_1 - h_2)) = -f^{-1*}(h_1 - h_2) \text{ in } H^2(X', \mathbb{C}).$$

Since the eigenspace for the eigenvalue  $-1$  of the linear mapping  $\rho'^*$  is  $\mathbb{C}\langle h'_1 - h'_2 \rangle$ , there is some  $a \in \mathbb{C}$  such that

$$f^*(h'_1 - h'_2) = a(h_1 - h_2) \text{ in } H^2(X, \mathbb{C}).$$

Since  $X$  and  $X'$  are Calabi-Yau manifolds,  $\text{Pic}(X)$  and  $\text{Pic}(X')$  are torsion free and the natural maps  $\text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$  and  $\text{Pic}(X') \rightarrow H^2(X', \mathbb{Z})$  are isomorphic. Thus there are some non zero integer  $t \in \mathbb{Z}_{>0}$  and  $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  such that  $a = \frac{s}{t}$ , i.e.

$$f^*(\mathcal{O}_{X'}(t(D'_1 - D'_2))) \cong \mathcal{O}_X(s(D_1 - D_2)) \text{ as a line bundle.}$$

Since  $D_1$  and  $D_2$  are the exceptional divisors of  $X \rightarrow \text{Blow}_{T \cup \Delta_K} K^2/H$ , we get that  $f(D_1 \cup D_2) = D'_1 \cup D'_2$ .

## References

- [1] A. Beauville: Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. J. Differential Geom. 18 (1983), no. 4, 755-782.
- [2] D. Arapura and S. Archava: Kodaira dimension of symmetric powers. Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 5, 1369-1372 (electronic).
- [3] S. Boissiere: Automorphismes naturels de l'espace de Douady de points sur une surface. Canad. J. Math. 64 (2012), no. 1, 3-23.
- [4] B. Fantechi: Deformation of Hilbert schemes of points on a surface. Compositio Math. 98 (1995), 205-217.

- [5] J. Fogarty: Families on an Algebraic Surface. American Journal of Mathematics Vol. 90, No. 2 (Apr., 1968), pp. 511-521.
- [6] L. Göttsche: The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface. Math. Ann. 286, 193-207 (1990).
- [7] L. Göttsche, W. Soergel: Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces. Math. Ann. 296 (1993), 235-245.
- [8] T. Hayashi: Universal covering calabi-yau manifolds of the Hilbert schemes of  $n$  points of Enriques surfaces. arXiv:1502.02231.
- [9] K. Oguiso: On automorphisms of the punctual Hilbert schemes of K3 surfaces. Eur. J. Math. 2 (2016), no. 1, 246-261.
- [10] H. Ohashi: On the number of Enriques quotients of a K3 surface. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 43 (2007), no. 1, 181-200. 14J28.
- [11] K. Yoshioka: Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces. Math. Ann. 321 (2001), no. 4, 817-884.

# 次数6の del Pezzo ファイブレーションを持つ3次元概 Fano 多様体の分類について

福岡 尊\*

東京大学大学院数理科学研究科, 2016年2月

この度は第13回城崎新人セミナーで発表する機会を与えて頂き、ありがとうございました。このような場を提供して下さい、運営委員の皆様と、参加者の皆様に、心から感謝致します。

## 1 研究の背景

非特異な複素射影多様体  $X$  の反標準因子  $-K_X$  が豊富であるとき、 $X$  を **Fano 多様体** という。射影空間  $\mathbb{P}^n$  や、 $\mathbb{P}^n$  の次数  $n$  以下の超曲面などが、Fano 多様体の典型例である。Fano 多様体は、その分類理論を始めとして、現在でも深く研究が行われている。ここで、豊富性を弱めた条件として、**ネフかつ巨大** という条件を考えよう。 $-K_X$  がネフかつ巨大であるとき、 $X$  を **弱 Fano 多様体** と呼び、Fano 多様体でない弱 Fano 多様体を **概 Fano 多様体** という。大雑把に言えば、概 Fano 多様体は Fano 多様体の“退化”であり、概 Fano 多様体の分類も興味深い問題の一つである。

(概) Fano 多様体の分類に際し、具体的な取り組みとして以下の3つの問題が挙げられる：

**問題 1.** (概) Fano 多様体  $X$  の不変量 (の組) が取りうる値を評価せよ。

ここで言う不変量とは、**ピカル数**  $\rho(X)$ <sup>1</sup>、**反標準次数**  $(-K_X)^{\dim X}$ 、そして  $X$  の持つ端射線収縮のタイプなどが挙げられる。固定された不変量の組について、集合

$$\{X \mid X \text{ はその固定された組を不変量の組として持つ}\}$$

を、不変量の組に対応する **クラス** と呼ぶ事にする。

**問題 2.** 取り得る不変量の各値に対し、それに対応するクラスは元を持つか。

**問題 3.** クラスが空でないとき、そのクラスに属する任意の (概) Fano 多様体を、統一的に記述する方法を確立せよ。

問題 3 は、特に各クラスにモジュライ空間の構造を入れる際に、重要な視点を与える。例えば del Pezzo 曲面、すなわち 2次元 Fano 多様体については、3つの問題は解かれている。

1. 例えば del Pezzo 曲面  $S$  の**次数**  $d = (-K_S)^2$  が取りうる値は  $1 \leq d \leq 9$  である。
2. 各  $d \in \{1, \dots, 9\}$  について、ある del Pezzo 曲面  $S$  で  $(-K_S)^2 = d$  を満たすものが存在する。

\*tfukuoka@ms.u-tokyo.ac.jp

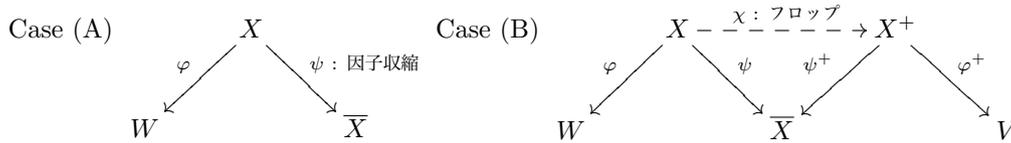
<sup>1</sup> $X$  が弱 Fano 多様体なら  $\rho(X)$  は第 2 Betti 数  $b_2(X)$  に一致する。

3. 例えば、次数 3 (resp. 4, 5) の del Pezzo 曲面は  $\mathbb{P}^3$  の 3 次曲面 (resp.  $\mathbb{P}^4$  の  $(2) \cap (2)$  完全交差,  $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$  の線型切断) となる. 次数 6 の del Pezzo 曲面は,  $(\mathbb{P}^2)^2 \subset \mathbb{P}^8$  の線型切断であり,  $(\mathbb{P}^1)^3 \subset \mathbb{P}^7$  の線型切断でもある.

3 次元 Fano 多様体の分類問題は, Fano 自身による研究を発端として, Iskovskikh, 藤田, 向井, 森-向井によって取り組まれた. 特に上の 3 つの問題については満足の行く解答が得られている.

## 2 概 Fano 多様体の分類理論と主結果 1

3 次元概 Fano 多様体  $X$  の分類を考えよう. 現在までの研究では, Picard 数が最小の場合, すなわち  $\rho(X) = 2$  の場合が主に調べられている<sup>2</sup>. この場合, 森理論により,  $X$  は 2 つの端射線収縮を持つ.  $K_X$ -負な端射線収縮を  $\varphi: X \rightarrow W$ ,  $K_X$ -自明な端射線収縮を  $\psi: X \rightarrow \bar{X} \simeq \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, -nK_X)$  とする. この場合,  $\psi$  は因子収縮, またはフロップ収縮である.  $\psi$  がフロップ収縮ならば, そのフロップを  $\chi: X \dashrightarrow X^+$  とすると,  $X^+$  は  $K_{X^+}$ -負な収縮射  $\varphi^+: X^+ \rightarrow V$  を持つ. まとめて,  $\psi$  の状況に応じて以下のように場合分け出来る.



$K_X$ -負な収縮射  $\varphi$  には, 以下の 3 通りが起こりうる.  $\varphi^+$  についても同様である:

- $\varphi$  は  $W$  のある部分多様体にそったブローアップ. このとき  $\varphi$  を**因子収縮**という.
- $W = \mathbb{P}^2$  で,  $\varphi$  の一般ファイバーが  $\mathbb{P}^1$ . このとき  $\varphi$  を**コニック束**という.
- $W = \mathbb{P}^1$  で,  $\varphi$  の一般ファイバーは次数  $d$  の del Pezzo 曲面. このとき  $\varphi$  を**次数  $d$  の del Pezzo ファイブレーション**という.

以下では,  $\varphi$  を次数  $d$  の del Pezzo ファイブレーションとする. Jahnke-Peternell-Radloff は, Case (A), (B) の両方の場合に関して問題 1 に取り組み, 取り得る不変量の組を絞った [3, 4]. しかし, 各不変量に対応するクラスが空かどうかは, 完全には調べられていなかった. 一方で, 竹内は Case (B) かつ  $d \neq 6$  の場合に取り組んだ [6]. 彼は不変量の組を絞り, さらに各不変量の組に対してそれに属する例を構成した. この 2 つの研究は独立して行われている.

そこで  $d = 6$  と仮定しよう. これが今回の講演のタイトルにある設定である. [3, 4] によって,  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  は以下の表 1, 2 に挙げた 14 のクラスのどれかになる. しかし, 元の存在が知られていたのは, そのうちの 5 クラスのみだった. それを踏まえて, 主結果 1 は以下である:

**主結果 1.** 各 14 クラスに対して, それに属する例が存在する.

表 1: Case (A)

Case	Type of $\psi: X \rightarrow \bar{X}$	$(-K_X)^3$	$\exists$ is known by
A	$(g, d) = (1, 6)$	12	[2]

<sup>2</sup> $\rho(X) = 1$  ならば  $-K_X$  がネフかつ巨大と豊富が同値であり, 概 Fano にならない.

表 2: Case (B)

Case	$V$	Type of $\varphi^+ : X^+ \rightarrow V$	$(-K_X)^3$	$\exists$ is known by
B-(i)	$V(10)$	smooth point	10	[5] (2.8.1)
B-(ii)-1	$B(5)$	$(g, d) = (0, 4)$	22	[4] 7.4 No.1.
B-(ii)-2	$\mathbb{Q}^3$	$(g, d) = (1, 6)$	18	[4] 7.4 No.3.
B-(ii)-3	$\mathbb{P}^3$	$(g, d) = (1, 6)$	16	[4] 7.4 No.4.
B-(ii)-4	$V(9)$	$(g, d) = (0, 2)$	10	[5] (2.8.2)
B-(ii)-5	$B(4)$	$(g, d) = (1, 6)$	8	[2]
B-(ii)-6	$V(10)$	$(g, d) = (1, 6)$	6	[2]
B-(ii)-7	$V(9)$	$(g, d) = (1, 6)$	4	[2]
B-(iii)	$\mathbb{P}^2$	$\deg(\text{disc.}) = 4$	14	[2]
B-(iv)-1	$\mathbb{P}^1$	$dP_6$	12	[2]
B-(iv)-2	$\mathbb{P}^1$	$dP_6$	6	[2]
B-(iv)-3	$\mathbb{P}^1$	$dP_6$	4	[2]
B-(iv)-4	$\mathbb{P}^1$	$dP_6$	2	[2]

表 1, 2 について

Fano 多様体  $V$  について  $i_V := \max\{i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \exists H \in \text{Pic}(V) \text{ s.t. } -K_V = iH\}$  を **Fano 指数** という。

- 表 1 の “ $(g, d)$ ” は,  $\psi$  が  $-K_X.C = d$  となる種数  $g$  の曲線  $C$  での爆発である事を表す。
- 表 2 の左から 2 番目の列は  $V$  のタイプを表す。  $V = \mathbb{Q}^3$  は  $\mathbb{P}^4$  の非特異 2 次超曲面を表す。  $V = B(m)$  は  $i_V = 2$  かつ  $(-K_V)^3 = 8m$  を満たす Fano 多様体を表す。  $V = V(g)$  は  $i_V = 1$  かつ  $(-K_V)^3 = 2g - 2$  を満たす Fano 多様体を表す。
- 表 2 の左から 3 番目の列は  $\varphi^+$  のタイプを表す。
  - “smooth point” は  $\varphi^+$  が非特異点での爆発である事を表す。
  - “ $(g, d)$ ” は  $\varphi^+$  が  $-K_V.C = i_V \cdot d$  を満たす種数  $g$  の曲線  $C$  での爆発である事を表す。
  - “ $\deg(\text{disc.}) = 4$ ” は  $\varphi^+ : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  がコニック束であり, 判別式因子 (discriminant divisor) の次数が 4 である事を表す。
  - “ $dP_6$ ” は  $\varphi^+$  が次数 6 の del Pezzo ファイブレーションである事を表す。
- 右端の列は, 各クラスに属する元の存在の証明を行った文献である。

**主結果 1 の証明の概略.** (B)-(ii) の場合は, Fano 多様体  $V$  の部分多様体として, 種数 1 かつ次数 6 の曲線  $C$  が構成出来るかという問題に帰着される。このような問題については, [3], [4], [6], [1] 等により同様の研究が成されている。まず, B-(ii)-5 の場合は, 種数 1 かつ次数 6 の曲線  $C$  が  $(\mathbb{P}^1)^3 \subset \mathbb{P}^7$  の線型切断で得られる事, さらに Segre 埋め込みに関する定義方程式が 2 次式で与えられる事の 2 点により,  $C$  を含む  $\mathbb{P}^5$  の  $(2) \cap (2)$  完全交差  $V$  を具体的に得る事が出来る。B-(ii)-6, 7 の場合は, K3 曲面の Néron-Severi 格子に関する理論を利用する事で例を構成する。

(A), (B)-(iii), B-(iv) の場合は, このような直接の構成は難しい。それを解決するために, 以下の双有理変換を考える;  $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{P}^3$  を非特異な 2 次曲面とし, 一般の 3 点  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Q}^2$  をとる。

この3点の張る平面と  $\mathbb{Q}^2$  の交わりは2次曲線  $C$  である.  $\sigma: F \rightarrow \mathbb{Q}^2$  を  $p_1, p_2, p_3$  での爆発とすれば,  $C$  の固有変換  $\tilde{C}$  は  $(-1)$ -曲線となる.  $\tilde{C}$  の爆縮  $\tau: F \rightarrow S$  を行くと,  $S$  は次数6の del Pezzo 曲面である. この非常に基本的な双有理変換  $S \leftarrow F \rightarrow \mathbb{Q}^2$  を相対化したのが次の命題である:

**命題 2.1.** [2, Proposition 3.5] 非特異な2次曲面ファイブレーション  $\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1$  と, 滑らかな部分曲線  $B \subset W$  の組  $(\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1, B)$  が, 以下の条件 (†) を満たすと仮定する:

$$(†) \cdots \begin{cases} \deg(\pi|_B: B \rightarrow \mathbb{P}^1) = 3 \text{ かつ} \\ \tau: Z := \text{Bl}_B W \rightarrow W, p := \pi \circ \tau: Z \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ に対し, } -K_Z \text{ が } p\text{-ネフかつ } p\text{-巨大.} \end{cases}$$

この時, ある  $\mathbb{P}^1$  上の余次元1で同型な双有理写像  $\Phi: Z \dashrightarrow Y$  と,  $\mathbb{P}^1$  上の双有理射  $\mu: Y \rightarrow X$  が存在する. さらに  $q: Y \rightarrow \mathbb{P}^1, \varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  をそれぞれ構造射とすれば, 以下が成り立つ:

(1) 以下の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccccccc} & & D & \subset Y = \text{Bl}_C X \xleftarrow{\Phi} Z = \text{Bl}_B W \supset & E & & \\ & \swarrow & & \downarrow q & & \searrow \tau & \\ C & \subset & X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi} & W \supset B \\ & & & & & & \end{array}$$

(3)  $\mu$  は  $\varphi$ -セクション  $C$  に沿った爆発であり,  $\varphi$  は次数6の del Pezzo ファイブレーション.

(4)  $q$ -ファイバーを  $F_Y, D := \text{Exc}(\mu), E := \text{Exc}(\tau), E_Y := \Phi_* E$  とおけば, 以下が成立する:

$$D \equiv \frac{1}{2}(-K_Y) - \frac{1}{2}E_Y + zF_Y, \quad (-K_X)^3 = \frac{3(-K_W)^3 - 16g_B - 32}{4}, \\ -K_X \cdot C = \frac{8(-K_W) \cdot B - 24g_B - (-K_W)^3 - 32}{8} \text{ and } z = \frac{4(-K_W) \cdot B - 8g_B - (-K_W)^3}{8}.$$

これによって, 例の構成は組  $(\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1, B)$  の構成に帰着できる. 例えば  $W$  として,  $\mathbb{Q}^3$  の2次曲線  $\Gamma$  での爆発 (resp.  $\mathbb{P}^3$  の次数4の楕円曲線  $\Gamma$  での爆発) を考える. すると  $(\pi: W \rightarrow \mathbb{P}^1, B)$  の構成は,  $\mathbb{Q}^3$  (resp.  $\mathbb{P}^3$ ) 内の曲線の組  $(B, \Gamma)$  の構成に等しい. このような曲線の組の構成には, やはり K3 曲面の Néron-Severi 格子に関する理論を用いる. 実際 B-(iv)-3 以外は, このような  $W$  で構成出来る (B-(iv)-3 の場合,  $W$  は  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$  の  $(2, 2)$  因子とする). この方針で証明するには,  $g(B), \deg B, \#(B \cap \Gamma)$  の値が必要である. 命題 2.1 (4) と各クラスの条件から, これらの値にはある程度の制限がつく. その中で条件 (†) を満たし  $-K_X$  がネフとなるものを, 試行錯誤で見つける事で構成する.  $\square$

### 3 次数6の特殊事情と主結果2

竹内の結果 [6] は, 以下の事実を用いたものであった.

**事実 1.**  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  を次数  $d$  の del Pezzo ファイブレーションとする. もし  $d \neq 6$  ならば, ファイバーが全て同型な Fano 多様体による全射  $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  と,  $\mathbb{P}^1$  上の閉埋め込み  $X \hookrightarrow Y$  が存在して,  $X$  は  $Y$  の  $\mathbb{P}^1$  上相対的な完全交差になる.

これは問題3の緩い意味での解答と言える. 例えば,  $d = 3$  (resp. 4, 5) ならば,  $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  は  $\mathbb{P}^3$ -束 (resp.  $\mathbb{P}^4$ -束,  $\text{Gr}(2, 5)$ -束) であり,  $X$  は  $Y$  に  $\mathbb{P}^1$  上相対的な3次曲面 (resp.  $(2) \cap (2)$  完全交差, 線型切断) として埋め込まれる.

一方で  $d = 6$  の場合を考えると、 $X$  の埋め込み先  $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  があるとすれば、その一般ファイバーは  $(\mathbb{P}^2)^2$ 、もしくは  $(\mathbb{P}^1)^3$  が適切だと考えられる。しかし、底空間である  $\mathbb{P}^1$  が単連結であることから、 $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  は必ず退化ファイバーを持ち、事実 1 に相当する理論が無い。これが  $d = 6$  の時の面白さである。私はこの現象を特に  $X$  が概 Fano の場合に調べ、以下を得た：

**主結果 2.** B-(ii)-1 (resp. B-(ii)-2, B-(ii)-5) の各元  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  に対して、ある Picard 数 2 の非特異射影多様体  $Y$  と全射  $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  であって、 $\varphi_Y$  の一般ファイバーが  $(\mathbb{P}^2)^2$  (resp.  $(\mathbb{P}^1)^3$ ,  $(\mathbb{P}^2)^2$ ) かつ  $X$  が  $Y$  に  $\mathbb{P}^1$  上線型切断として埋め込まれるものが存在する。

さらに B-(ii)-1 の場合、 $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  は、B-(ii)-1 に属する各元  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  の取り方に依らない。従って、B-(ii)-1 に属する任意の元は  $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  の相対的な線型切断となる。

これにより、クラス B-(ii)-1 に関しては問題 3 に満足の行く解答を得る事が出来た。

**B-(ii)-1 についての証明の概略.** 根本的なアイデアは「高次元版の Case (B) の図式を構成する」ということである。Case (B) の図式を思い出そう。まず、B-(ii)-1 の任意の元  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  をとる。フロップ  $\chi: X \dashrightarrow X^+$  について、 $X^+$  は  $V = \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^6$  の次数 4 の正規有理曲線  $C$  での爆発である。フロップされた曲線は  $C$  とちょうど 2 点で交わる直線  $l$  の固有変換であり、 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  を定める線型系を  $V$  に固有変換すれば、 $V$  上のペンシル  $|\mathcal{O}_V(1) \otimes \mathcal{I}_{l \cup C}|$  を得る。

この幾何を“高次元に拡張”する。まず  $M = \text{Gr}(2, 5) \cap \mathbb{P}^8$  及び 3-平面  $P = \mathbb{P}^3 \subset M$  で、 $V \cap P = l$  を満たすものが存在する。爆発  $f_M: \widetilde{M} = \text{Bl}_P M \rightarrow M$  を考えると、 $\mathbb{Q}^3$  上の  $\mathbb{P}^2$  束  $\pi_M: \widetilde{M} \rightarrow M$  が存在する。ここで、 $R := f_M(\pi_M^{-1}(\pi_M((f_M)_*^{-1}C)))$  を考えると、 $R$  は  $C$  を線型切断としてもつ次数 4 のスクロールである事がわかる。これにより、 $V$  (resp.  $l$ ,  $C$ ) を線型切断として持つ  $M$  (resp.  $P = \mathbb{P}^3$ , 次数 4 のスクロール  $R$ ) が構成された。さらに  $|\mathcal{O}_M(1) \otimes \mathcal{I}_{P \cup R}|$  はペンシルを成す。 $\text{Bl}_R M$  において  $P$  はフリップでき、ペンシルの固定点が消え、一般ファイバーが  $(\mathbb{P}^2)^2$  なるファイブレーション  $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  が得られる。□

任意の次数 6 の del Pezzo ファイブレーション  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$  に対して、これを相対的な線型切断を持つ  $\varphi_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$  が自然に構成できるかという問題は、今後の課題である。

## 参考文献

- [1] J. W. Cutrone and N. A. Marshburn. Towards the classification of weak Fano threefolds with  $\rho = 2$ . *Cent. Eur. J. Math.*, 11(9):1552–1576, 2013.
- [2] T. Fukuoka. On the existence of almost Fano threefolds with del Pezzo fibrations. *arXiv preprint, arXiv:1603.07139*, 2016.
- [3] P. Jahnke, T. Peternell, and I. Radloff. Threefolds with big and nef anticanonical bundles. I. *Math. Ann.*, 333(3):569–631, 2005.
- [4] P. Jahnke, T. Peternell, and I. Radloff. Threefolds with big and nef anticanonical bundles II. *Cent. Eur. J. Math.*, 9(3):449–488, 2011.
- [5] K. Takeuchi. Some birational maps of Fano 3-folds. *Compositio Math.*, 71(3):265–283, 1989.
- [6] K. Takeuchi. Weak Fano threefolds with del Pezzo fibration. *arXiv preprint arXiv:0910.2188*, 2009.

# 変形 BGG 圏と Schur-Weyl 双対性

藤田 遼\*

京都大学数学教室, 2016 年 2 月

**概要** Lie 代数  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  と退化アフィン Hecke 環の表現を結びつける構成として知られる荒川-鈴木関手を用いて両者のアフィン最高ウェイト表現圏を比較する。この対応は古典的な Schur-Weyl 双対性の変種であると見なせる。

## 1 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の最高ウェイト表現論

### 1.1 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現論

動機づけのため、まずは有限次元表現論を復習する。

$\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  を一般線形 Lie 代数とし、 $e_{ij} \in \mathfrak{g}$  で  $(i, j)$ -行列単位を表す。任意の有限次元  $\mathfrak{g}$ -表現  $M$  は互いに可換な  $n$  個の線形作用素  $e_{ii}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の同時固有空間 (別の言い方として、対角行列のなす可換部分 Lie 代数  $\mathfrak{h}$  の既約表現) の直和  $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}^n} M_\lambda$  に分解する。ここで  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  に対して、 $M_\lambda := \{v \in M \mid e_{ii} \cdot v = \lambda_i v, (\forall i)\}$  と定義する。 $M_\lambda \neq 0$  となるとき、 $\lambda$  を  $M$  のウェイトと呼び、 $M_\lambda$  を  $M$  の (ウェイト  $\lambda$  の) ウェイト空間と呼ぶ。ウェイト空間分解の構造に着目することが Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の有限次元表現を分類するための基本的なアイデアである。以下では  $\Lambda := \mathbb{Z}^n$  とし、簡単のため  $\mathfrak{g}$ -加群のウェイトはすべて  $\Lambda$  に属するとする。このとき  $M$  の指標を  $x_i$  たちの Laurent 多項式として  $\text{ch } M := \sum_{\lambda \in \Lambda} (\dim M_\lambda) x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$  と定義する。

ウェイトの集合  $\Lambda$  に半順序  $\leq$  を

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^j \lambda_i \leq \sum_{i=1}^j \mu_i, & (\forall j = 1, 2, \dots, n-1); \\ \text{and } \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \end{cases}$$

によって定義する。 $1 \leq i < j \leq n$  のとき、 $e_{ij} \cdot M_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \subset M_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j-1, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n)}$  だから、狭義上三角行列のなす部分 Lie 代数  $\mathfrak{n}_+$  はウェイトを大きくする方向に作用する。ウェイト  $\lambda \in \Lambda$  は条件  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  をみたすとき支配的であるという。Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の有限次元表現は次の古典的な結果によって完全に分類される。

**定理 1.1** (Cartan-Weyl 理論). 1. Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の任意の有限次元表現は半単純である。;

2. 各支配的ウェイト  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\dim V(\lambda)_\lambda = 1$ ,  $V(\lambda)_\mu = 0$  ( $\forall \mu \not\leq \lambda$ ) をみたす有限次元既約  $\mathfrak{g}$ -表現  $V(\lambda)$  が同型を除いてただ一つ存在する。;

3. { 支配的ウェイト全体 }  $\xrightarrow{\cong}$  {  $\mathfrak{g}$  の有限次元既約表現 (の同型類) };  $\lambda \mapsto V(\lambda)$ ;

4. 既約表現  $V(\lambda)$  の指標  $\text{ch } V(\lambda)$  は Schur 多項式  $S_\lambda(x)$  に一致する。 □

\*rfujita@math.kyoto-u.ac.jp

## 1.2 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の BGG 圏

ここからは無限次元の表現も視野に入れて話を進める。有限次元既約表現は特に支配的ウェイトを最高ウェイトとする既約表現であった。そこで次に考えるべきは支配的でない最高ウェイトを持つ（無限次元の）既約表現である。これは次のように構成される。まずウェイト  $\lambda \in \Lambda$  に対して、Verma 加群と呼ばれる“普遍最高ウェイト加群”

$$M(\lambda) := \text{Ind}_{\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda - \rho} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+)} \mathbb{C}_{\lambda - \rho}$$

を考える<sup>1</sup>。ただし  $\rho := (0, -1, -2, \dots, -n+1) \in \Lambda$  とする。各 Verma 加群  $M(\lambda)$  はその構成からただ一つの既約商加群  $L(\lambda)$  をもち、これが最高ウェイト  $\lambda - \rho$  を持つ既約表現を与える。逆に最高ウェイト  $\lambda$  をもつ任意の既約  $\mathfrak{g}$ -表現は  $L(\lambda + \rho)$  に同型である。 $\dim L(\lambda) < \infty$  となる必要十分条件は  $\lambda - \rho$  が支配的であることであって、その場合は  $L(\lambda) \cong V(\lambda - \rho)$  となる。

Verma 加群  $M(\lambda)$  やその既約商  $L(\lambda)$  を扱う自然な表現論的枠組みとして次の BGG 圏<sup>2</sup>がある。

**定義 1.2** (Bernstein-Gelfand-Gelfand 1976). 支配的ウェイト  $\lambda \in \Lambda$  に対し、BGG 圏 (の  $\lambda$ -block)  $\mathcal{O}_\lambda$  を、Verma 加群たち  $\{M(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  の部分商の有限拡大であってウェイト空間分解可能な  $\mathfrak{g}$ -加群たちのなす  $\mathfrak{g}$ -加群圏の充満部分圏として定義する。□

BGG 圏  $\mathcal{O}_\lambda$  は半単純とは限らないアーベル圏であり、各対象は有限長の組成列を持つ。BGG 圏  $\mathcal{O}_\lambda$  に属する任意の既約表現はある  $L(\mu)$  ( $\mu \in \mathfrak{S}_n \lambda$ ) に同型であり、特に  $1 : 1$  対応  $\mathfrak{S}_n \lambda \xrightarrow{\cong} \{\mathcal{O}_\lambda \text{ の既約表現 (の同型類)}\}; \mu \mapsto L(\mu)$  があることが知られている。

さて、次に既約表現の指標  $\text{ch } L(\mu)$  を求めることを考える。既約指標たち  $\{\text{ch } L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  および Verma 加群指標たち  $\{\text{ch } M(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  はともに線形空間  $\text{span}_{\mathbb{C}}\{\text{ch } M \mid M \in \mathcal{O}_\lambda\}$  の基底をなす。各 Verma 加群指標  $\text{ch } M(\mu)$  は定義から簡単に求めることができるので、既約指標を求めるためには基底の変換行列である組成重複度  $([M(\mu) : L(\nu)])_{\mu, \nu \in \mathfrak{S}_n \lambda}$  を求めればよい。この問題の解がいわゆる“Kazhdan-Lusztig 予想”である。

**定理 1.3** (“Kazhdan-Lusztig 予想”, Beilinson-Bernstein 1981, Brylinski-柏原 1981). 組成重複度  $[M(\mu) : L(\nu)]$  は適当な Kazhdan-Lusztig 多項式 (これは  $\mathfrak{S}_n$  の組み合わせ論で定義される) の 1 での値を用いて明示的に表せる。□

## 1.3 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の変形 BGG 圏

双対空間  $\mathfrak{h}^*$  の座標環  $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$  の原点  $0 \in \mathfrak{h}^*$  での完備化を  $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$  で表す。ウェイト  $\lambda$  に対して、変形 Verma 加群

$$\widetilde{M}(\lambda) := \text{Ind}_{\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda - \rho}[[\mathfrak{h}^*]] = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+)} \mathbb{C}_{\lambda - \rho}[[\mathfrak{h}^*]]$$

を定義する<sup>3</sup>。 $\widetilde{M}(\lambda)$  は Lie 代数  $\mathfrak{g}$  の作用に可換な  $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$ -作用を持ち、Verma 加群を原点の形式近傍  $\text{Spec}(\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]])$  上で形式的に変形したものと見なせる。

**定義 1.4** (Soergel 1990). 支配的ウェイト  $\lambda \in \Lambda$  に対し、変形 BGG 圏 (の  $\lambda$ -block)  $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$  を変形 Verma 加群たち  $\{\widetilde{M}(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  の部分商の有限拡大のなす  $(\mathfrak{g}, \mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]])$ -双加群圏の充満部分圏として定義する。□

<sup>1</sup>ここで  $\mathbb{C}_{\lambda - \rho}$  は  $\mathfrak{h}$  がウェイト  $\lambda - \rho$  で作用し  $\mathfrak{n}_+$  が自明に作用する 1 次元表現。

<sup>2</sup>BGG 圏に関しては文献 [4] に詳しい解説がある。

<sup>3</sup> $\mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$  には  $\mathfrak{h}$  が左からの積によって自然に作用し  $\mathfrak{n}_+$  が自明に作用するとして、 $\mathbb{C}_{\lambda - \rho}[[\mathfrak{h}^*]] = \mathbb{C}_{\lambda - \rho} \otimes \mathbb{C}[[\mathfrak{h}^*]]$  を  $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$  の左加群と思う。

通常の BGG 圏  $\mathcal{O}_\lambda$  は  $\mathbb{C}[[\hbar^*]]$  が自明に作用する部分圏として自然に  $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$  に埋め込まれ、特に  $\{L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  が圏  $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$  の既約表現の同型類集合の完全代表系を与える。

変形 BGG 圏  $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$  は“アフィン最高ウェイト圏”の構造を持つ。

“定義” 1.5. <sup>4</sup> $\mathbb{C}$ -線形アーベル圏  $\mathcal{C}$  は次の条件をみたすときアフィン最高ウェイト圏であるという。

1. 有限集合  $\Pi$  が存在して  $\mathcal{C}$  の単純対象 (の同型類) および直既約射影対象 (の同型類) をパラメトライズする。さらに  $\pi \in \Pi$  に対応する直既約射影対象  $P(\pi)$  は対応する単純対象  $L(\pi)$  の射影被覆である。;
2. 各  $\pi \in \Pi$  に対し、2つの直既約対象  $\Delta(\pi), \tilde{\Delta}(\pi)$  が存在して  $P(\pi) \twoheadrightarrow \tilde{\Delta}(\pi) \twoheadrightarrow \Delta(\pi) \twoheadrightarrow L(\pi)$  をみたす。 $\tilde{\Delta}(\pi)$  を標準対象、 $\Delta(\pi)$  を被約標準対象と呼ぶ。;
3. (BGG 相互律) 各  $P(\pi)$  は標準対象たち  $\tilde{\Delta}(\rho)$  の有限回の拡大の結果であって、その重複度は被約標準対象の組成重複度と等式  $(P(\pi) : \tilde{\Delta}(\rho)) = [\Delta(\rho) : L(\pi)]$ ,  $\forall \pi, \rho \in \Pi$  で結ばれる。□

定理 1.6 (Soergel 1990 [6], Fiebig 2003 [3]). 変形 BGG 圏  $\tilde{\mathcal{O}}_\lambda$  は  $\{L(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  を単純対象、 $\{M(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  を被約標準対象、 $\{\tilde{M}(\mu) \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  を標準対象の族とするようなアフィン最高ウェイト圏の構造を持つ。□

## 2 退化アフィン Hecke 環の表現論

退化アフィン Hecke 環  $H_d$  は以下のように定義される非可換  $\mathbb{C}$ -代数である。

- $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として  $H_d = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$  であって、多項式環  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d] \otimes 1$  および対称群の群代数  $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d \cong 1 \otimes \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$  はともに  $H_d$  の部分  $\mathbb{C}$ -代数になっている。;
- $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ ,  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  について、

$$(1 \otimes s_{i,i+1})(f \otimes 1) = s_{i,i+1}f \otimes s_{i,i+1} + \frac{s_{i,i+1}f - f}{x_i - x_{i+1}} \otimes 1$$

(退化) アフィン Hecke 環の表現は  $p$ -進群  $\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$  の岩堀部分群による非自明な固定部分をもつ認容表現に対応し、歴史的には“Langlands プログラム”の観点から重要な研究対象である。

### 2.1 アフィン最高ウェイト構造

整数  $b \in \mathbb{Z}$  と自然数  $s \in \mathbb{Z}_{>0}$  に対し、区間  $[b, s]$  を有限集合  $[b, s] := \{b, b+1, b+2, \dots, b+s-1\}$  とする。区間  $[b, s]$  に対して Hecke 環  $H_s$  の 1 次元表現  $\mathbb{C}_{[b,s]} := \mathbb{C}\mathbf{1}_{[b,s]}$  を

$$\begin{aligned} x_i \mathbf{1}_{[b,s]} &= (b+i-1) \mathbf{1}_{[b,s]}, & i &= 1, \dots, s; \\ w \mathbf{1}_{[b,s]} &= \mathbf{1}_{[b,s]}, & \forall w &\in \mathfrak{S}_s \end{aligned}$$

で定義する。多重区間  $[\beta, \sigma] = ([\beta_i, \sigma_i])_{1 \leq i \leq m}$  が  $\sigma_1 + \dots + \sigma_m = d$  をみたしているとする。このときタイプ  $\sigma$  の放物型部分代数  $H_\sigma = H_{\sigma_1} \times \dots \times H_{\sigma_m} \subset H_d$  の 1 次元表現  $\mathbb{C}_{[\beta, \sigma]} := \mathbb{C}_{[\beta_1, \sigma_1]} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbb{C}_{[\beta_m, \sigma_m]}$  を考え、その  $H_d$  への誘導表現  $\mathrm{Ind}_{H_\sigma}^{H_d} \mathbb{C}_{[\beta, \sigma]}$  を  $S(\beta, \sigma)$  と表す。

<sup>4</sup>引用符“ ”にはここでの“定義”が簡略版であることをお断りする意味が込められている。実際にはパラメータ集合  $\Pi$  は半順序集合であり、その順序が標準対象や射影対象の構造を統制する。

Hecke 代数  $H_d$  の中心  $Z_d$  は自然に対称多項式環  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]^{\mathfrak{S}_d}$  と同一視できることが知られている。点  $a \in \mathbb{C}^d / \mathfrak{S}_d = \text{Specm}(Z_d)$  における中心  $Z_d$  の完備化を  $\hat{Z}_d(a)$  とし、 $\hat{H}_d(a) := H_d \otimes_{Z_d} \hat{Z}_d(a)$  と定義する。多重区間  $[\beta, \sigma] = ([\beta_i, \sigma_i])_{1 \leq i \leq m}$  で  $\sigma_1 + \dots + \sigma_m = d$  をみたすものに対し  $[\beta, \sigma]$  に属する重複込み  $d$  個の整数により点  $a = a(\beta, \sigma) \in \mathbb{Z}^d / \mathfrak{S}_d$  が決まる。このとき自然に  $S(\beta, \sigma) \in \hat{H}_d(a)\text{-mod}_{\text{fg}}$ <sup>5</sup> である。以下、節約のため  $\mathcal{H}_d(a) := \hat{H}_d(a)\text{-mod}_{\text{fg}}$  と書く。<sup>6</sup>

**定理 2.1** (Zelevinsky 1980). 各  $a \in \mathbb{Z}^d / \mathfrak{S}_d$  に対し、 $a = a(\beta, \sigma)$  なる多重区間  $[\beta, \sigma]$  からなるある集合  $\text{MS}(a)$  が存在して次を満たす。:

1. 各  $[\beta, \sigma] \in \text{MS}(a)$  に対して  $S(\beta, \sigma)$  は唯一の既約商  $L(\beta, \sigma)$  をもつ。;
2.  $\text{MS}(a) \xrightarrow{\cong} \{\mathcal{H}_d(a) \text{ の既約表現 (の同型類) }\}; [\beta, \sigma] \mapsto L(\beta, \sigma)$ . □

**定理 2.2** (“Kazhdan-Lusztig 予想の  $p$ -進類似”, Ginzburg 1987, Lusztig 1995). 組成重複度  $[S(\beta, \sigma) : L(\gamma, \tau)]$  は適当な Kazhdan-Lusztig 多項式の 1 での値を用いて明示的に表せる。 □

次の定理は Khovanov-Lauda-Rouquier 代数 (=アフィン Hecke 環の一般化と見なせる次数付き代数) による圏論化の文脈で、量子包絡環の PBW 基底に対応する対象を探求する中で得られた。

**定理 2.3** (加藤 2014 [5], Brundan-Kleshchev-McNamara 2014 [2]). 圏  $\mathcal{H}_d(a)$  は  $\{L(\beta, \sigma) \mid [\beta, \sigma] \in \text{MS}(a)\}$  を単純加群の族とし、 $\{S(\beta, \sigma) \mid [\beta, \sigma] \in \text{MS}(a)\}$  を被約標準加群の族とするようなアフィン最高ウェイト圏の構造を持つ。 □

## 3 アフィン最高ウェイト構造の比較

### 3.1 古典的 Schur-Weyl 双対性

$V := \mathbb{C}^n$  を一般線形 Lie 代数  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  の自然な表現とする。テンソル積空間  $V^{\otimes d}$  には Lie 代数  $\mathfrak{g}$  のテンソル表現としての左作用と  $d$  次対称群  $\mathfrak{S}_d$  のテンソル成分の置換による右作用が互いに可換であるように入る。:  $\mathfrak{g} \curvearrowright V^{\otimes d} \curvearrowleft \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$

**定理 3.1** (Schur 1927, Weyl 1946). 関手  $F_d := \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{\otimes d}, ?) : \text{Rep}_d \mathfrak{g} \rightarrow \text{Rep}_{\leq n} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$  は圏同値を与える。ただし、 $\text{Rep}_d \mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{g}$  の有限次元  $d$  次 “多項式” 表現<sup>7</sup> 全体のなす圏、 $\text{Rep}_{\leq n} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$  は長さ  $n$  以下の  $d$  の分割に対応する有限次元表現全体のなす圏とする。 □

ただし、 $\text{Rep}_d \mathfrak{g}$  と  $\text{Rep}_{\leq n} \mathbb{C}\mathfrak{S}_d$  はともに半単純な圏なので、これは既約表現 (の同型類) の間に  $1:1$  対応があることと同値である<sup>8</sup>。

### 3.2 荒川-鈴木関手

ウェイト  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Lambda$  に付随する変形 Verma 加群  $\widetilde{M}(\beta)$  をとる。テンソル積空間  $\widetilde{M}(\beta) \otimes V^{\otimes d}$  には Lie 代数  $\mathfrak{g}$  のテンソル表現としての左作用およびテンソル成分の置換と多項

<sup>5</sup>  $\hat{H}_d(a)\text{-mod}_{\text{fg}}$  は代数  $\hat{H}_d(a)$  の有限生成加群圏

<sup>6</sup> 以下の 2 つの定理については例えば [7] およびそこでの参考文献を参照。

<sup>7</sup> 代数群  $GL_n(\mathbb{C})$  の有限次元  $d$  次多項式表現の微分として得られる  $\mathfrak{g}$  の表現、あるいは  $d$  の分割を与えるような支配的ウェイト  $\lambda$  に対応する既約  $\mathfrak{g}$  表現  $V(\lambda)$  たちの直和のこと。

<sup>8</sup> 無限次元表現を考えに入れると  $\mathfrak{g}$  の表現論は半単純でなくなり、とくに既約表現の行き先を見ただけでは圏同値とは言えない。

式環  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$  の適当な作用によって得られる  $H_d$  の右作用が互いに可換であるように入る<sup>9</sup>。  
 $: \mathfrak{g} \curvearrowright \widetilde{M}(\beta) \otimes V^{\otimes d} \curvearrowright H_d$

**定義 3.2** (荒川-鈴木 1998 [1][7]). ウェイト  $\beta$ , ランク  $d$  の荒川-鈴木関手  $F_{\beta,d} : \mathfrak{g}\text{-mod} \rightarrow H_d\text{-mod}$  を  $F_{\beta,d} := \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(\widetilde{M}(\beta) \otimes V^{\otimes d}, ?)$  と定義する。  $\square$

ウェイト  $\lambda, \beta$  が条件  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \beta_1 > \dots > \beta_n$  を満たしているとする。このとき各  $\mu \in \mathfrak{S}_n \lambda$  に対し  $[\beta, \mu - \beta] := ([\beta_i, \mu_i - \beta_i])_{1 \leq i \leq n}$  は  $n$  個の区間からなる多重区間をなす。集合  $\text{MS}(a)^{\leq n}$  を  $n$  個 (以下) の区間からなる多重区間のなす  $\text{MS}(a)$  の部分集合とすると  $\text{MS}(a)^{\leq n} = \{[\beta, \mu - \beta] \mid \mu \in \mathfrak{S}_n \lambda\}$  が成り立つ。このとき  $\text{MS}(a)^{\leq n}$  に対応する部分圏  $\mathcal{H}_d(a)^{\leq n}$  は  $\mathcal{H}_d(a)$  から自然に誘導されるアフィン最高ウェイト構造 ( $P \rightarrow \widetilde{S} \rightarrow S \rightarrow L$ ) をもつ。

**定理 3.3** (荒川-鈴木 1998 + F.). ウェイト  $\beta, \lambda \in \Lambda$  が条件  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > \beta_1 > \dots > \beta_n$  を満たすとし、 $d := \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \beta_i)$ ,  $a = a(\beta, \lambda - \beta)$  とおく。このとき荒川-鈴木関手  $F_{\beta,d}$  は  $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$  で完全であり、各  $\mu \in \mathfrak{S}_n \lambda$  について  $F_{\beta,d}(L(\mu)) \cong L(\beta, \mu - \beta)$ ,  $F_{\beta,d}(M(\mu)) \cong S(\beta, \mu - \beta)$ ,  $F_{\beta,d}(\widetilde{M}(\mu)) \cong \widetilde{S}(\beta, \mu - \beta)$  が成り立つ。さらにもし各直既約射影加群  $P(\mu)$  の像  $F_{\beta,d}(P(\mu))$  の極大半単純商が単純ならば<sup>10</sup>,  $F_{\beta,d}(P(\mu))$  は  $\mathcal{H}_d(a)^{\leq n}$  の直既約射影加群  $P(\beta, \mu - \beta)$  に同型であり、したがって特に  $F_{\beta,d}$  は 2 つのアフィン最高ウェイト圏  $\widetilde{\mathcal{O}}_\lambda$  と  $\mathcal{H}_d(a)^{\leq n}$  の間の圏同値を導く。<sup>11</sup>  $\square$

後半の主張の証明には BGG 相互律を用いる。 $\beta$  が非正則な場合にも被約標準加群、単純加群の対応の部分は制御できる。[7] において次が証明されている。

**系 3.4** (荒川-鈴木 1998). “Kazhdan-Lusztig 予想” と “Kazhdan-Lusztig 予想の  $p$ -進類似” は同値である。  $\square$

## 参考文献

- [1] T. Arakawa and T. Suzuki, *Duality between  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  and the degenerate affine Hecke algebra*, Journal of Algebra **209**, 288-304 (1998).
- [2] J. Brundan, A. Kleshchev and P. McNamara, *Homological properties of finite type Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), no.7, 1353-1404.
- [3] P. Fiebig, *Centers and translation functors for the category  $\mathcal{O}$  over Kac-Moody algebras*, Math. Z. **243**, 689-717 (2003)
- [4] J. E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category  $\mathcal{O}$* , GMS **94** (2008), AMS.
- [5] S. Kato, *Poincare-Birkhoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras*, Duke Math. J. **163** (2014), no.3, 619-663.
- [6] W. Soergel, *Kategorie  $\mathcal{O}$ , perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, J. Amer. Math **3** (1990), 421-445.
- [7] T. Suzuki, *Rogawski’s conjecture on the Jantzen filtration for the degenerate affine Hecke algebra of type  $A$* , Represent. theory (Electronic Jour. of AMS) **2** (1998), 393-409.

<sup>9</sup>多項式環の作用は  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  の Casimir 作用素を使って定義される。

<sup>10</sup>この仮定は常に正しいであろうと強く期待されます。

<sup>11</sup>残念ながら、セミナー発表時よりも弱い結果に退化してしまっています。

# 測地線連分数の周期性について

戸次 鵬人 \*

東京大学大学院数理科学研究科 修士 2 年 戸次 鵬人, 2016 年 2 月

## 1 序

本講演では古典的連分数論における Lagrange の定理の、測地線を用いた一般化の研究とそれによって得られた結果について発表した。

古典的な連分数論において実数  $\alpha$  は以下の様に有限あるいは無限連分数に展開される。

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots}} = [a_0, a_1, \dots] \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{N}_{>0} \text{ for } k \geq 1).$$

このとき、 $p_k/q_k = [a_0, a_1, \dots, a_k]$  ( $p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in \mathbb{N}_{>0}$  : 互いに素) を  $\alpha$  の  $k$  番目の近似分数と呼ぶ。本研究の動機は、連分数展開の周期性に関する次の Lagrange の定理の一般化である。

**定理 1.1** (Lagrange's theorem).

- (i) 実数  $\alpha$  について、その連分数展開が周期的になる事と実二次無理数である事は同値。
- (ii)  $\alpha$  を実二次無理数とし、連分数展開  $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$  が純周期的である、すなわち、ある  $l \in \mathbb{N}_{>0}$  が存在して、 $a_{k+l} = a_k$  for  $k \in \mathbb{N}$  が成立するとする。このとき、 $l$  を最小にとつてあるとすると  $u = p_{l-2}\alpha + p_{l-1}$  は  $\alpha$  に付随する整環  $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{Q}(\alpha) \mid x(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha) \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha\}$  の基本単数となる。ただし、 $p_k/q_k$  は  $\alpha$  の  $k$  番目の近似分数とする。

定理 1.1 を一般化するにあたり、Sarnak [3] によって与えられた、次の定理 1.1 の幾何学的解釈を与えていると考えられる定理に注目する。

**定理 1.2** (Geodesic Lagrange's theorem [3]).  $\mathfrak{h}$  を通常の Poincaré 上半平面とする。

- (i) 相異なる実数  $\alpha, \beta$  に対し、 $\alpha, \beta \in \mathbb{R} = \partial\mathfrak{h}$  を結ぶ上半平面の測地線が、 $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h}$  に射影したとき周期的になる、すなわち閉測地線となる事と  $\alpha$  と  $\beta$  が互いに共役な実二次無理数である事は同値。

---

\*bekki@ms.u-tokyo.ac.jp

(ii) このとき、 $l \in \mathbb{R}_{>0}$  をその閉測地線の長さとする、 $u = \exp(l/2)$  は  $(\alpha, \beta)$  に付随する整環  $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta) \mid x(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \subset \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta\}$  の基本単数を与える。

本研究においては、まず定理 1.2 が一般化される幾何学的枠組み “Heegner object” を構築し、その枠組みと元々 Diophantus 近似の領域で Lagarias [2], Beukers [1] などによって考察されていた測地線連分数のアイデアを組み合わせることで、幾つかの代数体のクラスに対する定理 1.1 の一般化を得た。それらを簡単にまとめると、

(A) 相対単数群の階数が 1 であるような代数体の拡大  $F/F'$  に対し、 $F$  の  $\mathbb{Q}$ -基底を “展開” する測地線連分数を構成し、その周期性と、周期が相対単数群を記述する事を示した。

(B)  $p$  を素数とし、体同型  $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_p$  を固定する。 $\mathfrak{h} \subset \mathbb{C}$  を通常の Poincaré 上半平面とする。このとき、 $z \in \mathfrak{h} \cap \mathbb{Q}_p$  を展開する  $\{\infty, p\}$ -連分数を構成し、虚二次無理数  $z \in \mathfrak{h} \cap \mathbb{Q}_p$  の  $\{\infty, p\}$ -連分数展開の周期性と、周期が  $z$  に付随する虚二次体の整環のノルム 1 基本  $p$ -単数を与える事を示した。

本稿では、鍵となる Heegner object の構成とその周期性の結果 (定理 1.2 の一般化)、測地線連分数のアルゴリズム、及び得られた定理 1.1 の一般化について述べる。

## 2 Heegner objects

実際には Heegner object は無限素点を含む有理数体の有限個の素点の集合  $S$  に対して  $S$ -adélic に構成されるが、ここでは簡単のため  $S = \{\infty\}$  ( $\infty$  は有理数体の唯一の無限素点) の場合についてのみ述べる。まずは、定理 1.2 における Poincaré 上半平面を一般化する  $GL_n(\mathbb{R})$  の一般化上半空間を定義する。

**定義 2.1** (一般化上半空間).  $GL_n(\mathbb{R})$  の一般化上半空間  $\mathfrak{h}^n$  を次で定める。

$$\mathfrak{h}^n := GL_n(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times O(n).$$

$A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{R})$  に対し、 $A$  が定める  $\mathfrak{h}^n$  の類を  $[A]$  あるいは  $[a_{ij}]$  で表す。

以降、 $\mathbb{R}$ -ベクトル空間の同型  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2; x + iy \mapsto (y, x)$  を固定し、しばしば同一視する。 $F$  を  $n$  次代数体とし、 $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$  を  $F$  の実素点、 $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}$  ( $r := r_1 + r_2$ ) を  $F$  の複素素点とする。また、 $F$  の素点  $\sigma_i$  による完備化を  $F_i = F_{\sigma_i}$  で表し、素点  $\sigma_i$  と埋め込み  $F \hookrightarrow F_i$  を同一視する。 $(F_i \simeq \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \text{ for } \sigma_i: \text{ 実素点 (resp. 複素素点).})$   $n_i := [F_i : \mathbb{R}]$  とおく。このとき、次の自然な埋め込みが定まる。

$$\sigma : F \hookrightarrow F_\infty := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \prod_i F_i = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n.$$

ここで最後の同型は、初めに固定した  $\mathbb{R}$ -ベクトル空間の同型を使う。次に、 $w_1, \dots, w_n$  を  $F$  の  $\mathbb{Q}$ -基底とする。 $w = {}^t(w_1, \dots, w_n)$  ( ${}^t$  は行列の転置を表す) とおく。

**定義 2.2.**  $F$  の  $\mathbb{Q}$ -基底  $w$  に付随する Heegner object を次の写像で定める。

$$\varpi = \varpi_w : T^1 := \left( \prod_i \mathbb{R}_{>0} \right)^1 \rightarrow \mathfrak{h}^n; (t_1, \dots, t_r) \mapsto [t_1 \sigma_1(w) \cdots t_r \sigma_r(w)].$$

ここで、 $(\prod_i \mathbb{R}_{>0})^1 := \{(t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{R}_{>0}^r \mid \prod_{i=1}^r t_i^{n_i} = 1\}$  であり、固定した同一視  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  によって複素成分は虚部と実部を横に並べて  $(t_1 \sigma_1(w) \cdots t_r \sigma_r(w)) \in GL_n(\mathbb{R})$  とみなす。行列の正則性は  $\sigma(w) = {}^t(\sigma(w_1), \dots, \sigma(w_n))$  が  $F_\infty$  の  $\mathbb{R}$ -基底をなすことに依る。また、前述の記法によって  $[t_1 \sigma_1(w) \cdots t_r \sigma_r(w)]$  は  $(t_1 \sigma_1(w) \cdots t_r \sigma_r(w))$  の定める  $\mathfrak{h}^n$  の元である。

今、 $\mathfrak{h}^n = GL_n(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times O(n)$  には離散群  $SL_n(\mathbb{Z})$  が左から自然に作用しており、我々はこの作用に関する Heegner object  $\varpi$  の周期性、すなわち次の写像の周期性を考察する。

$$\pi \circ \varpi : T^1 \rightarrow SL_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h}^n.$$

ただし  $\pi : \mathfrak{h}^n \rightarrow SL_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{h}^n$  は自然な射影。以下、 $\Gamma := SL_n(\mathbb{Z})$  とおく。

**定義 2.3.** 組  $(A, \rho) \in \Gamma \times T^1$  が  $\Gamma$  に対する  $\varpi$  の周期であるとは次を満たすことを言う。

$$A\varpi(t) = \varpi(\rho t) \quad \forall t \in T^1.$$

このとき、単に  $A \in \Gamma$  (resp.  $\rho \in T^1$ ) についても、 $(A, \rho)$  が周期となる対応する  $\rho$  (resp.  $A$ ) の存在を暗に含んで、 $\varpi$  の周期であるという。 $\Gamma_\varpi \subset \Gamma$  (resp.  $\Lambda_\varpi \subset T^1$ ) によって周期全体のなす群を表す。定め方より、 $\pi \circ \varpi$  は商空間  $\Lambda_\varpi \backslash T^1$  を経由する。

これらの設定のもとで次の、定理 1.2 の一般化を示した。

**定理 2.4.** (i)  $\Lambda_\varpi \backslash T^1$  はコンパクト。

(ii)  $A \in \Gamma_\varpi$  とすると、 $A$  は  $w$  を固有ベクトルとして持ち、対応する固有値を  $\varphi_w(A) \in F^\times$  とかく事にすると、写像

$$\varphi_w : \Gamma_\varpi \rightarrow F^\times; A \mapsto \varphi_w(A)$$

は単射群準同型であり、その像は  $w$  に付随する整環  $\mathcal{O}_w$  のノルム 1 単数群  $\mathcal{O}_w^1$  と一致する。ただし、 $\mathcal{O}_w := \{x \in F \mid x(\mathbb{Z}w_1 + \cdots + \mathbb{Z}w_n) \subset \mathbb{Z}w_1 + \cdots + \mathbb{Z}w_n\}$ ,  $\mathcal{O}_w^1 := \{x \in \mathcal{O}_w^\times \mid N_{F/\mathbb{Q}}x = 1\}$ 。

*Remark.* Heegner object と本質的に同じ対象は連分数論とは異なる領域の幾つかの先行研究においても見つけられ、まったく新しいというわけでは無い。一方、周期群  $\Gamma_\varpi$  の考察 (定理 2.4 (ii)) とそれが可能にする連分数論の一般化への応用は著者の知る限り無い。

### 3 測地線連分数

定理 2.4 によって、数論的に重要な対象である単数群  $\mathcal{O}_w^1$  が幾何学的に考察可能な Heegner object の周期群  $\Gamma_\varpi$  と一致することが分かった。この節では、 $\varpi$  が 1 次元の場合に一般化上半空間  $\mathfrak{h}^n$  の幾何学を用いて具体的に周期群  $\Gamma_\varpi$  を記述するアイデアを紹介する。記号は今までの通りとし、以下 Heegner object  $\varpi$  は 1 次元、すなわち  $\varpi : T^1 \simeq \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathfrak{h}^n$  とする。このとき、 $\varpi$  は  $\mathfrak{h}^n$  に自然に定まる Riemann 計量に関して測地線であることが分かる。

$\mathcal{F} \subset \mathfrak{h}^n$  を離散群  $\Gamma$  に関する“良い”基本領域とする。“良い”事の定義はここでは割愛する。

**定義 3.1.** Heegner object  $\varpi$  と基本領域  $\mathcal{F}$  に対し、列  $\{(A_k, B_k, \varpi_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  を以下のように定める。

- $u_0 := 1 \in \mathbb{R}_{>0} (\simeq T^1)$  とおき、 $\varpi(u_0) \in B_0 \mathcal{F}$  なる  $B_0 \in \Gamma$  をとる。 $\varpi_0 := B_0^{-1} \varpi$  とおく。
- $k \geq 0$  に対し、 $u_k \in T^1, \varpi_k$  s.t.  $\varpi_k(u_k) \in \mathcal{F}$  が与えられているとき、 $(A_{k+1}, B_{k+1}, \varpi_{k+1})$  を次のようにとる。 $t \in T^1 \simeq \mathbb{R}_{>0}$  を  $u_k$  から連続的に増大させていき、 $t = t_k$  を境に  $\varpi_k(t)$  が  $\mathcal{F}$  から飛び出したとする。このとき、 $t = t_k$  の近傍で  $\varpi_k(t)$  が  $\mathcal{F} \cap A_{k+1} \mathcal{F}$  に覆われる  $A_{k+1} \in \Gamma$  をとる。 $B_{k+1} := B_k A_{k+1}, \varpi_{k+1} := A_{k+1}^{-1} \varpi_k$  とおく。
- $k \leq 0$  に対しても  $t$  を減少させながら同様に定める。

**命題 3.2.** “良い”基本領域に対してこのアルゴリズムは *well-defined*。これを  $w$  あるいは  $\varpi$  の測地線連分数展開と呼ぶ。

*Remark.* 測地線連分数の定義や議論は概ね Lagarias, Beukers のものに従っている。ただし、元のままでは Heegner objects に適用できなかったため、主に基本領域の“良さ”の定義を改良して、議論を一般化した。

## 4 主結果

定理 2.4 を用いて測地線連分数展開の周期性に関する次の結果を示した。

**定理 4.1** (Rank one generalized Lagrange’s theorem).

$\{(A_k, B_k, \varpi_k)\}_k$  を  $w$  に付随する Heegner object  $\varpi$  の測地線連分数展開とする。

- ある  $k_0, k_1 \in \mathbb{N}, k_0 < k_1$  及び  $\rho \in \mathbb{R}_{>1}$  が存在して、 $\varpi_{k_0}(t) = \varpi_{k_1}(\rho t) \forall t$  が成立する。
- このとき、 $B_{k_1} B_{k_0}^{-1} \in \Gamma_\varpi$  であり、 $\epsilon := \varphi_w(B_{k_1} B_{k_0}^{-1}) \in F^\times$  は  $\mathcal{O}_w^1$  の *non-torsion* 元を与える。特に、 $\epsilon$  は  $\mathcal{O}_w^1$  の指数有限部分群を生成する。

*Remark.* Heegner object  $\varpi$  が 1 次元であるためには  $r = 2$  である事が必要十分なので、定理 4.1 は  $F$  が、実二次体、複素三次体、総虚四次体の場合への定理 1.1 の一般化を与えている。

## 5 補遺

前述のように、Heegner object の枠組みは有限個の有限素点も含めて adélic に構成することができる。また、 $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  の二次指標  $\chi$  に対して、Heegner object の  $\chi$ -component を定義し、これに対しても定理 2.4 と同等の事実を示すことができる。その結果として、上述の場合も含めて以下の場合への定理 1.1 の拡張を得ることができた。

- 実二次体、複素三次体、総虚四次体と、その単数群。
- 総実体上の二次拡大体でちょうど 2 つの実素点を持つものと、その相対単数群
- ちょうど 1 つの複素素点を持つ代数体上の二次拡大で総虚なもの、その相対単数群。

(b) 虚二次体と分裂する素数  $p$  に対するノルム 1  $p$ -単数群。

(a1)~(a3) は以下のようにまとめることもできる。

(a) 代数体の拡大でその相対単数群の階数が 1 であるものと、その相対単数群。

## 6 謝辞

この度は第 13 回城崎新人セミナーに参加して、大変有意義な時間を過ごすことができました。参加、講演の機会をくださった運営委員の皆様、たくさんの興味深い議論、意見を交わして下さった参加者の皆様に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] F. Beukers, Geodesic continued fractions and LLL, *Indag. Math. (N.S.)* **25** (2014), no. 4, 632–645.
- [2] J. C. Lagarias, Geodesic multidimensional continued fractions, *Proc. London Math. Soc.* (3) **69** (1994), no. 3, 464–488.
- [3] P. Sarnak, Class numbers of indefinite binary quadratic forms, *J. Number Theory* **15** (1982), no. 2, 229–247.

# 有限代数の Hilbert スキームについて

松澤陽介\*

東京大学大学院数理科学研究科, 2016 年 2 月

## 1 イントロダクション

$k$  を代数閉体、 $A$  を  $k$  上の可換代数とする。この時、 $A$  の  $k$  上の  $r$  点の Hilbert スキーム  $\text{Hilb}^r(A)$  とは次のようなスキームのことである (点の Hilbert スキームについては例えば [Be] が分かりやすい)。

$$\begin{aligned} & \text{Hilb}^r(A)(R) \\ &= \left\{ \phi: A \otimes_k R \rightarrow E \mid \begin{array}{l} \phi \text{ is an } R\text{-algebra surjection and} \\ E \text{ is locally free of rank } r \text{ as an } R\text{-module} \end{array} \right\} / \sim_{\text{isom}} \\ &\simeq \left\{ I \subset A \otimes_k R \mid \begin{array}{l} I \text{ is an ideal and} \\ A \otimes_k R / I \text{ is locally free of rank } r \text{ as an } R\text{-module} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

ただしここで  $R$  は任意の  $k$  代数である。

例えば、 $A = \mathbb{C}[x, y]/(x^a, y^b)$  のとき ( $a, b$  は自然数)、 $\text{Hilb}^r(A)$  は  $\mathbb{C}$  上の射影的スキームとなり、classical topology についてのオイラー数は

$$\chi(\text{Hilb}^r(A)) = \#\{\text{partition of } r \text{ contained in the box of size } a \times b\} =: p(r; a, b)$$

となる。

*sketch of the proof.* 作用  $\mathbb{G}_m^2 \curvearrowright \text{Spec} A; (t, s) \cdot (x, y) = (tx, sy)$  から作用  $\mathbb{G}_m^2 \curvearrowright \text{Hilb}^r(A)$  が誘導される。この作用の固定点の集合は次集合と一対一に対応する。

$$\{\mathbb{C}[x, y] \text{ の monomial ideal で } (x^a, y^b) \text{ を含むもの}\}$$

この集合の元の個数はちょうど  $p(r; a, b)$  である。今の場合一般的な 1-パラメータ部分群  $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{G}_m^2$  を取っても固定点の集合は変わらない。そして  $\text{Hilb}^r(A)^{\mathbb{G}_m} \subset \text{Hilb}^r(A)$  はうまく locally closed set に分割するとそれぞれで deformation retract になっている。代数多様体の場合、コンパクトサポートを持つコホモロジーで定義したオイラー数と特異コホモロジーで定義したオイラー数は同じなので、

$$\chi(\text{Hilb}^r(A)) = \chi(\text{Hilb}^r(A)^{\mathbb{G}_m}) = p(r; a, b)$$

□

---

\*myohsuke@ms.u-tokyo.ac.jp

変数の個数が3以上の場合も全く同様のことが成立する。  
 そこで次のような問題を考えることができる。

**問題**

- (1)  $A$  を一般の有限代数とすると、 $\text{Hilb}^r(A)$  はどのように振る舞うのか？
- (2)  $\text{Hilb}^r(A)$  や  $\chi(\text{Hilb}^r(A))$  から  $A$  のどのような情報は復元されるのか？

## 2 Gorenstein 環の Hilbert スキーム

先に挙げた例  $A = \mathbb{C}[x, y]/(x^a, y^b)$  の場合、Hilbert スキームには次のような対称性がある。

$$\chi(\text{Hilb}^r(A)) = p(r; a, b) = p(ab - r; a, b) = \chi(\text{Hilb}^{ab-r}(A)).$$

この対称性は、環  $\mathbb{C}[x, y]/(x^a, y^b)$  が Gorenstein であることの表れだと理解することができる。ここで Artin 局所環  $(A, \mathfrak{m})$  が Gorenstein であるとは  $(0 : \mathfrak{m}) = \{x \in A \mid \mathfrak{m} \cdot x = 0\}$  が  $A$  上一元生成ということである。上の事実は次のように一般化される。

**Theorem 2.1.**  $A$  を  $k$  上の有限局所 Gorenstein 代数とし、 $\dim_k A = n$  とする。このときスキームとして

$$\text{Hilb}^r(A) \simeq \text{Hilb}^{n-r}(A)$$

となる。

**Remark 2.2.**  $k$ -value points での全単射だけであれば、Matlis 双対性 (あるいは local duality) からすぐに従う。

**Remark 2.3.**  $A$  が Gorenstein とは限らない場合は、 $\omega$  を  $A$  の標準加群とすれば片方が Quot スキームになった次の同型が成立する。

$$\text{Hilb}^r(A) \simeq \text{Quot}^{n-r}(\omega).$$

## 3 Hilbert スキームから復元される情報

$(A, \mathfrak{m})$  を  $k$  上の有限局所代数とし、 $\dim_k A = n$  だとする。

**Definition 3.1.**  $(0 : \mathfrak{m})$  を  $A$  の socle といい  $\text{soc}A$  とかく。これは  $k = A/\mathfrak{m}$  上のベクトル空間である。

$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  を  $A$  の埋蔵次元 (embedded dimension) といい  $\text{emdim}A$  と表す。

これらの量は Hilbert スキームから復元することができる。

**Proposition 3.2.** 記号は上の通りだとする。次が成立する。

$$\text{Hilb}^{n-1}(A)_{\text{red}} \simeq \mathbb{P}^{\dim \text{soc}A-1}$$

$$\text{Hilb}^2(A)_{\text{red}} \simeq \mathbb{P}^{\text{emdim}A-1}$$

特に

$$A \text{ は Gorenstein} \iff \dim \text{Hilb}^{n-1}(A) = 0.$$

また  $k = \mathbb{C}$  ならば

$$A \text{ は Gorenstein} \iff \chi(\text{Hilb}^{n-1}(A)) = 1.$$

Hilbert スキーム  $\text{Hilb}^r(A)$  は  $A$  のイデアルをパラメトライズしているがイデアルは全て  $\mathfrak{m}$  に含まれるので次の閉埋め込みがある。

$$\text{Hilb}^r(A) \rightarrow \text{Grass}(\mathfrak{m}, r-1).$$

ここで右辺はベクトル空間  $\mathfrak{m}$  の  $r-1$  次元商の Grassmannian. したがって

$$\dim \text{Hilb}^r(A) \leq (n-r)(r-1)$$

である。もしある  $2 \leq r \leq n-1$  で等号が成立したとすると、全ての  $r$  で等号が成立してしかも

$$A \simeq k[x_1, \dots, x_{n-1}]/(x_1, \dots, x_{n-1})^2$$

となる。基底つき (一つ目の基底は単位元 1) の有限代数のモジュライはコーン (次数つき環のスペック) になっているのだが、この代数はその頂点になっている (基底は  $1, x_1, \dots, x_{n-1}$ ) (c.f. [Po])。

## 4 代数的族と Hilbert スキーム

一般に準射影多様体の射  $\pi: X \rightarrow S$  があるとき、相対 Hilbert スキームと呼ばれる  $S$  上のスキーム  $p: \text{Hilb}^r(X/S) \rightarrow S$  があり、次の性質を持つ。

任意の点  $s \in S$  に対し

$$p^{-1}(s) \simeq \text{Hilb}^r(\pi^{-1}(s))$$

となる。ここで右辺は  $s$  の剰余体上の Hilbert スキームである。

つまり、準射影的多様体の代数的族があると、その Hilbert スキームも代数的族をなすということである。

特定の代数幾何学的対象 (例えば射影空間  $\mathbb{P}^n$  の種数を固定した曲線、有限代数のスペックとその座標環の基底のペア) の代数的族の中で普遍的なものがある場合がある。ここである族が普遍的とは、あらゆる族がその pull-back で書けるということである。このときその族のパラメーター空間をモジュライ空間 (fine moduli space)、その族を普遍族 (universal family) という。例えば Hilbert スキーム  $\text{Hilb}^r(\mathbb{A}^n)$  はアフィン空間の  $r$  点部分スキームのモジュライ空間になっている。

前節より有限代数の Gorenstein 性はその Hilbert スキームの次元だけから判定できる。有限代数の何らかのモジュライ空間  $M$  があるとき、その普遍族の相対 Hilbert スキームを考えることでよく知られた次の事実の別証を得ることができる。

**Proposition 4.1.**  $M$  の Gorenstein 環に対応する点全体は  $M$  の開集合。

またオイラー数が代数的族において generic には一定であることより次がわかる。

**Proposition 4.2.**  $k = \mathbb{C}$  とする。写像

$$M \rightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto \chi(\text{Hilb}^r(A_x))$$

は *constructible* である。ただし、 $A_x$  は点  $x \in M$  に対応する有限代数を表す。また、写像が *constructible* とは、各ファイバーが  $M$  の *constructible* 集合になっているということである。

特に、 $M$  が有限形のスキームなら、オイラー数  $\chi(\text{Hilb}^r(A_x))$  のとり得る値は有限個である。

## 5 Hilbertスキームのオイラー数

再び最初の例  $A = \mathbb{C}[x, y]/(x^a, y^b)$  について考えてみる。 $\chi(\text{Hilb}^r(A)) = p(r; a, b)$  であった。列  $(p(r; a, b))_r$  について次のことが知られている [O], [Pr], [Sy], [W]。

**Fact 5.1.** 列  $(p(r; a, b))_r$  は *unimodal* である。つまりある  $s$  があり

$$p(0) \leq p(1) \leq \cdots \leq p(s) \geq p(s+1) \geq \cdots \geq p(ab)$$

となる。

そこで有限代数  $A$  に対しても、この事実がどの程度成立するのかわかるかという問題が考えられる。

**Theorem 5.2.**  $A = \mathbb{C}[x, y]/(f, g)$ 、 $f, g$  は  $\mathbb{C}[x, y]$  の正則列をなす斉次多項式で  $\deg f = 2 \leq n = \deg g$  とする。さらに  $(f, g)$  はモノミアルイデアルではないとする。このとき  $A$  の同型類は二つでそれぞれオイラー数は次のようになる。

$$\chi(\text{Hilb}^r(A)) = 1 + \binom{r}{2} \quad 0 \leq r \leq n$$

$$\chi(\text{Hilb}^r(A)) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ r & 1 \leq r \leq n \end{cases}$$

このときも列  $(\chi(\text{Hilb}^r(A)))_r$  は *unimodal* になっている。またこの例の場合  $A$  は *graded Gorenstein* 環である。

$A = \mathbb{C}[x, y]/I$ 、 $I$  はモノミアルイデアル、の形の有限代数の場合は Hilbert スキームのオイラー数は完全に分割数の言葉で書けるのであった。つまり  $\Delta$  を  $I$  に含まれないモノミアル全体のなすヤング図形だとすると、

$$\chi(\text{Hilb}^r(A)) = \#\{r \text{ の分割で } \Delta \text{ に含まれるもの}\} =: p(r; \Delta)$$

となる。次のことが Stanton によって予想されている [St]。

**Conjecture 5.3.**  $\Delta$  が *self-conjugate* なヤング図形 (*standard set* あるいは *Ferrers shape*) のとき列  $(p(r; \Delta))_r$  は *unimodal* である。

以上のことから次のことが成り立つのではないかと考えている。

**Conjecture 5.4.**  $(A, \mathfrak{m})$  を  $\mathbb{C}$  上の局所有限代数だとし、 $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$  とする。

1.  $0 \leq r \leq \dim_{\mathbb{C}} A$  に対し  $1 \leq \chi(\text{Hilb}^r(A)) \leq \#\{r \text{ の } d\text{-次元分割}\}$
2.  $A$  が *graded Gorenstein* なら  $(\chi(\text{Hilb}^r(A)))_r$  は *unimodal* となる。
3.  $d = 2$  で  $A$  の  $\mathbb{C}[x, y]$  での定義イデアルを  $\mathfrak{S}_2$  不変に取れるとする ( $\mathfrak{S}_2 \curvearrowright \mathbb{C}[x, y]$  は  $x, y$  を入れ替える作用とする)。このとき列  $(\chi(\text{Hilb}^r(A)))_r$  は *unimodal* となる。

## 参考文献

[Be] J. Bertin, *THE PUNCTUAL HILBERT SCHEME: AN INTRODUCTION*, École thématique, Institut Fourier, 2008, pp.99. cel-00437713

- [O] K. M. O'Hara, *Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof*, J. Comb. Theory, Ser. A, Vol. 53, Iss. 1, (Jan. 1990), 29-52
- [Po] B. Poonen, *The Moduli Space of Commutative Algebras of Finite Rank*, arXiv:math/0608491v2[math.AG] (2007)
- [Pr] R. Proctor, *Solution of two difficult combinatorial problems with linear algebra*, Ame. Math. Monthly, Vol. 89, No. 10 (Dec., 1982), pp. 721-734
- [St] D. Stanton, *Unimodality and Young's lattice*, J. Comb. Theory, Ser. A Vol. 54. Iss. 1, (May 1990), 41-53
- [Sy] J. J. Sylvester, *Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants*, Collected Math. Papers, vol. 3, Chelsea, New York, 1973. pp. 117-126
- [W] D. E. White, *Monotonicity and unimodality of the pattern inventory*, Adv. Math., 38 (1980) 101-108

# Components of stable Auslander–Reiten quivers that contain non-periodic Heller lattices of string modules: the case of the Kronecker algebra $\mathcal{O}[X, Y]/(X^2, Y^2)$ over complete discrete valuation ring

宮本 賢伍\*

大阪大学大学院 情報科学研究科, 2016年2月

## 1 謝辞

この度は、城崎新人セミナーで講演させて頂く機会を頂きましたことを、城崎新人セミナー運営委員会の皆様と関係者の皆様に深く感謝申し上げます。

## 2 序

代数の表現論の大きな目標の一つは、代数上の加群圏の構造を明らかにすることであるが、その代数的な解析手法にクイバーを用いる手法がある。体上の行列を標準化する問題のひとつの答えが Jordan 標準形の理論だが、これを広範囲に一般化した理論が 1970 年代に導入された Auslander–Reiten 理論である。Auslander–Reiten 理論では、直既約加群の完全代表系に対して almost split sequence と呼ばれる特殊な短完全列を構成し、その情報をもとにして直既約加群の完全代表系を頂点とするクイバーを導入することで、抽象的な代数の加群圏を可視化して体系的に研究する。このとき得られたクイバーを Auslander–Reiten クイバーといい、これから射影成分を削ったものを安定 Auslander–Reiten クイバーという。そこで、表現論の古典的な問題として、様々な代数に対して Auslander–Reiten クイバーを記述せよというもの考えられてきた。体上の Auslander–Reiten クイバーの具体的な計算例は多くみられるが ([ASS] などを参照)、完備離散付置値環上の代数に関しては、一般論のみが先行しており、その一般論が具体的な計算は困難であるということも示唆していたためほとんど計算されていなかった。しかし、Heller lattices と呼ばれる特別な加群を切り口にするので、その代数の安定 Auslander–Reiten クイバーの計算が可能である可能性がある点に着目し、ここでは完備離散付置値環上  $\mathcal{O}$  上の Kronecker 代数  $\mathcal{O}[X, Y]/(X^2, Y^2)$  の非周期的な Heller lattices を含むような安定 Auslander–Reiten クイバーの (ただひとつの) 連結成分を完全に決定した。

---

\*k-miyamoto@ist.osaka-u.ac.jp

### 3 almost split sequence の定義とその構成.

$\mathcal{O}$  を完備離散付値環とし,  $\kappa$  を  $\mathcal{O}$  の剰余体,  $\mathcal{K}$  を  $\mathcal{O}$  の商体とし, これらは代数閉体と仮定する. 本論を通して, 特に断らない限りはテンソル積は  $\mathcal{O}$  上でとる.  $\mathcal{O}$  上の代数  $A$  が有限階数の自由代数のとき,  $A$  を  $\mathcal{O}$ -order であるという. 以下,  $A$  は Gorenstein  $\mathcal{O}$ -order なものを考える. 有限生成右  $A$ -加群  $M$  が  $A$ -lattice であるとは,  $M$  が有限階数の自由  $\mathcal{O}$ -加群であるときをいう. 今の状況では,  $A$ -lattice とは, Cohen–Macaulay 加群のことである.  $\text{latt-}A$  を  $A$ -lattices を対象にもつような  $\text{mod-}A$  の充満部分加法圏とする.  $\mathcal{O}$  は完備離散付値環なので,  $M \in \text{latt-}A$  が直既約であることと,  $\text{End}_A(M)$  は局所的であることは同値である. 完備離散付値環上の代数は半完全代数となるので,  $M \in \text{latt-}A$  に対して  $M$  が直既約であることと  $\text{End}_A(M)$  の幂等元が  $0, 1$  のみであることは必要十分である. また, 任意の  $A$ -lattices は射影被覆をもつ.

以下, しばらく almost split sequence の定義を行う為の準備をする.  $f : M \rightarrow N$  in  $\text{latt-}A$  が既約写像とは次の 2 条件を満たしているときをいう.

- (1)  $f$  は分裂単射でも分裂全射でもない.
- (2)  $\text{latt-}A$  の可換図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow f_1 & \nearrow f_2 \\ & \mathcal{O} & \\ & \searrow & \nearrow \\ & W & \end{array}$$

があったとき,  $f_1$  が分裂単射でないか,  $f_2$  が分裂全射ではない.

定義から, 全ての  $\text{latt-}A$  の射は, 既約写像の合成の  $\mathcal{O}$  上の一次結合でかけるので, 既約写像は写像を構成する最小のピースである. 既約写像を用いて almost split sequence は定義される.

#### 3.1 Definition. $\text{latt-}A$ の短完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

が  $M$  を ending にもつ almost split sequence であるとは,  $f$  と  $g$  が既約であるときをいう.

$M$  を ending にもつ almost split sequence は完全列の同型を除いて一意に決まる. また,  $L$  を starting にもつ almost split sequence も完全列の同型を除いて一意に決まる. そこで  $M$  を ending にもつ almost split sequence が

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

であったとき, AR 転移を  $\tau(M) = L$ ,  $\tau^{-1}(L) = M$  と定めることができる. 直既約  $A$ -lattice  $M$  が与えられたとき, いつでも  $M$  を ending にする almost split sequence はいつでも存在するとは限らない.

**3.2 Theorem** ([RR], Theorem 6).  $A$ -lattice  $M$  が非射影的で直既約とする.  $M$  を ending (resp. starting) にもつような almost split sequence が存在するための必要十分条件は  $M \otimes \mathcal{K}$  が  $A \otimes \mathcal{K}$ -加群として射影的 (移入的) であることである.

この条件を満たすような lattice として Heller lattice がある. ここで Heller lattice とは, 直既約  $A \otimes \kappa$ -加群の  $A$ -加群としての射影被覆の核に現れる直既約因子である. 従って Heller lattices を ending にもつ almost split sequence が存在する.

さて、非射影的な直既約  $A$ -lattice  $M$  で  $M \otimes \mathcal{K}$  が射影的であるものをとったとき、これを ending にもつ almost split sequence を次のようにして構成することができる。まず、 $M$  の射影被覆  $p: P \rightarrow M$  に中山関手  $\nu := D(\text{Hom}_A(-, A)) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Hom}_A(-, A), \mathcal{O})$  を施すと

$$\nu(p): \nu(P) \longrightarrow \nu(M)$$

を得る。  $L$  を  $D(\text{Coker}(\text{Hom}_A(p, A)))$  とおけば、完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \nu(P) \longrightarrow \nu(M) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(\text{Coker}(\text{Hom}_A(p, A)), \mathcal{O})$$

を得るが、 $\text{Coker}(\text{Hom}_A(p, A))$  は  $A$ -lattice  $\text{Hom}_A(\text{Ker}(p), A)$  の部分  $A$ -加群とみれるので自由  $\mathcal{O}$  加群である。従って末項は  $0$  となり、短完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \nu(P) \longrightarrow \nu(M) \longrightarrow 0$$

を得る。この  $\varphi: M \rightarrow \nu(M)$  に関する引き戻しを考える。

**3.3 Proposition** ([AKM], Proposition 1.14).  $A$  を Gorenstein  $\mathcal{O}$ -order として、 $M$  は非射影的直既約  $A$ -lattice で  $M \otimes \mathcal{K}$  が射影的であるとする。

$$p: P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を  $M$  の射影被覆とし、 $\varphi \in \text{Hom}_A(M, \nu(M))$  をひとつとり、 $\varphi$  に関する引き戻しを考える。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \nu(P) & \xrightarrow{\nu(p)} & \nu(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

このとき次の 2 条件は同値である。

- (1) 引き戻しにより得られた短完全列は almost split sequence である。
- (2) 次の 3 条件を満たす。
  - (i)  $\varphi$  は  $\nu(p)$  を経由しない。
  - (ii)  $L$  は直既約  $A$ -lattices である。
  - (iii) 任意の  $f \in \text{radEnd}_A(M)$  に対して  $\varphi f$  は  $\nu(p)$  を経由する。

この定理は、almost split sequence の構成は  $M$  から  $\nu(M)$  への  $A$ -準同型をうまくとるとえ、その引き戻しを考えればよいというのが本質的なところである。

almost split sequence の情報によって、安定 Auslander–Reiten クイバーは記述される。

**3.4 Definition.**  $A$  の latt- $A$  に関する安定 Auslander–Reiten クイバー  $\Gamma_s(A)$  は次のルールで構成されるクイバーである。

- 頂点には非射影的直既約  $A$ -lattices であって、 $\mathcal{K}$  とテンソル積をとったものが射影的であるものの完全代表系をおく。
- 既約写像  $f: M \rightarrow N$  が存在するときに矢印  $M \rightarrow N$  を引く。
- valuation  $v(M \rightarrow N) = (a, b)$  を次のルールで与える。
  - (i)  $N$  を ending にもつ almost split sequence の中央項に  $M$  が  $a$  回現れる。
  - (ii)  $M$  を starting にもつ almost split sequence の中央項に  $N$  が  $b$  回現れる。

## 4 主結果

以下,  $A$  は  $\mathcal{O}$  上の Kronecker 代数とする. このとき,  $A$  の Heller lattices は AR 転移で周期的なものと同周期的なものが現れるが, 非周期的なものに関しては次が成り立つ.

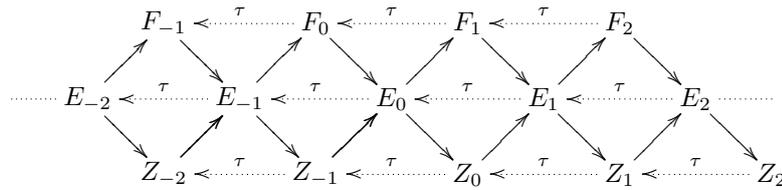
**4.1 Lemma.**  $\text{latt-}A$  の中には非周期的な直既約 Heller lattices の列

$$\cdots \xleftarrow{\tau} Z_n \xleftarrow{\tau} Z_{n+1} \xleftarrow{\tau} Z_{n+2} \xleftarrow{\tau} \cdots \quad (n \in \mathbb{Z})$$

がただひとつ存在する. 更に, すべての非周期的な直既約 Heller lattices はこの列の中に現れる.

この補題より, 非周期的な Heller lattices を含む安定 Auslander–Reiten クイバーの連結成分はただ一つであることがわかる. この連結成分を  $\mathcal{C}$  と置こう. 今回の主結果はこの  $\mathcal{C}$  の形状を完全に決定したというものである.

まず, 非周期的な直既約 Heller lattice  $Z_n$  を ending にもつ almost split sequences を定理 3.3 によって構成する. このとき, 得られた almost split sequences の中央項の非射影直既約成分は一つしかない. これを  $E_n$  とおく. 再び定理 3.3 によって  $E_n$  を ending にもつ almost split sequences を構成すれば, その中央項の非射影直既約は二つであって, 一つは  $Z_{n-1}$  となる. もう一方を  $F_n$  とかくことにする. すなわち现阶段で  $A$  の安定 Auslander–Reiten クイバーは以下の形状をしている.



almost split sequences の構成が有限回で終了する, あるいは統率的に出来てしまう場合には問題ないが, 実際にはそううまくいかない. そこで, ある程度までは almost split sequences を構成して, その後はクイバーの形状の決定に関する定理などを用いることで  $\mathcal{C}$  の形状の候補を絞っていくという手法をとる.

**4.2 Theorem** ([Z]).  $(Q, v, \tau)$  を非周期的な連結な付値安定な転移クイバーとし,  $Q$  上にゼロでない subadditive な関数  $d$  が存在するとする. このとき以下のうちいずれかが成り立つ.

- (i)  $Q$  の付値は自明で, 全ての頂点から出る矢印は丁度 2 本であって, 更に  $d$  は additive かつ有界である.
- (ii) ある付値クイバー  $\Delta$  が存在して  $Q = \mathbb{Z}\Delta$  である.

従って, もし  $\mathcal{C}$  が Auslander–Reiten クイバーで不変であるような subadditive な関数を持つかどうかひとつの指標になる. 今回の場合において,  $\mathcal{C}$  上の additive な関数を以下のように構成することに成功した.

$$\begin{aligned} d' : \mathcal{C}_0 &\longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \cup &\qquad \cup \\ M &\longmapsto \#\{M \otimes \kappa \text{ の非射影的な直既約直和因子} \} \end{aligned}$$

関数  $d'$  は  $\mathcal{C}$  上の AR 転移で不変であって, 更に additive という性質をもつ. よって,  $\mathcal{C}$  は  $\mathbb{Z}\Delta$  の形をしている. 更に,  $d'$  が additive という性質から  $\mathcal{C}$  はループを持たないことがわかる. そこで  $\Delta$  が決定されれば,  $\mathcal{C}$  が決定されるが, 主結果は以下の通りである.

**Main Result.**  $A = \mathcal{O}[X, Y]/(X^2, Y^2)$  において,  $A \otimes \kappa$  の非周期な直既約 Heller lattices を含む安定 Auslander-Reiten クイバーの連結成分  $\mathcal{C}$  について, 非周期な直既約 Heller lattices はその境界に現れて,  $\mathcal{C} \simeq \mathbb{Z}A_\infty$  である.

## 参考文献

- [AKM] S. Ariki, R. Kase and K. Miyamoto, On Components of stable Auslander-Reiten quivers that contains Heller lattices: the case of truncated polynomial rings', arXiv:1408.6452, 2014. to appear in Nagoya Math. J.
- [ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, London Mathematical Society Student Texts **65**, 2006.
- [RR] K. W. Roggenkamp and W. Rump, Orders in non-semisimple algebras, Communications in Algebra **27** Issue **11**, 5267-5301, 1981.
- [M] K. Miyamoto, Components of stable Auslander-Reiten quivers that contain non-periodic Heller lattices of string modules: the case of the Kronecker algebra  $\mathcal{O}[X, Y]/(X^2, Y^2)$  over a complete D.V.R., arXiv:1601.06256
- [Z] Y. Zhang, The structure of stable components, Canadian Journal of Mathematics vol. **43**(3), 1991, 652-672.

# 積分変換と $\mathcal{D}$ 加群

八尋耕平\*

東京大学大学院数理科学研究科, 2016 年 2 月

## 1 イントロダクション

この文書の前半では積分変換に関する古典的な結果について述べ、後半では  $\mathcal{D}$  加群の積分変換について説明する。前半部分は主に Helgason の本 [H] に従う。記号は気に入らないものが多いので Helgason とは違うものも使っている。主張の仮定も述べやすいように弱くしてある。 $\mathcal{D}$  加群の積分変換に関しては Goncharov (Adv. in Math., 1997) の論文が前半の内容との関連性が強いが、理解する余裕がなかったので D'Agnolo Schapira [DS] の結果を紹介する。

## 2 積分変換

$X$  をリーマン多様体とする。リーマン多様体  $S$  で添え字付けられた  $X$  の“連続的に変化”する部分多様体の族  $\{Z_s\}_{s \in S}$  が与えられているとする。“連続的に変化”するということは正確に定義できないが、以下で現れる例は等質空間で  $S$  はひとつの部分多様体を群の作用で動かしたものの全体の集合 (これも等質空間) になっているのでこの点は問題ない。

$\mathcal{C}_c(X)$  で  $X$  上の台がコンパクトな連続関数の空間を表す。次のように定義される写像を積分変換 (またはラドン変換) と呼ぶ。

$$\mathcal{C}_c(X) \ni f(x) \mapsto I(f)(s) := \hat{f}(s) := \int_{x \in Z_s} f(x) dx \in \mathcal{C}_c(S)$$

各  $x \in X$  に対して  $S$  の部分集合  $\check{x} := \{s \in S \mid x \in X_s\}$  が  $X$  の部分多様体であって、“連続的に変化”すれば、次のような線形写像も定義できる。

$$\mathcal{C}_c(S) \ni \phi(s) \mapsto \check{\phi}(x) := \int_{s \in \check{x}} \phi(s) ds \in \mathcal{C}_c(X)$$

これら二つの線形写像は次の意味で互いに随伴になっている。

$$\int \hat{f}(s) \phi(s) ds = \int f(x) \check{\phi}(x) dx$$

**Remark.** リーマン多様体の仮定は部分多様体に自然な測度を入れるためだけに課している。

このような  $X, S$  にはたとえば以下のようなものがある。

**例 2.1.**  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $S = \tilde{G}_{d,n} : \mathbb{R}^n$  の  $d$  次元アファイン部分空間全体の集合。

---

\*yahiro@ms.u-tokyo.ac.jp

**例 2.2.**  $K$  を  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  のいずれかとするとき、 $X = \mathbb{P}_K^n, S = G(d, n+1 : K) : K^{n+1}$  の  $d$  次元  $K$  部分空間 ( $=\mathbb{P}_K^n$  の  $d-1$  次元超平面の集合) 全体の集合

積分変換について、ここでは以下のような問題を考える。

Q1.  $f$  の性質と  $I(f)$  の性質の間にはどのような関係があるか?

Q2.  $I$  の像 (核) はどのようなものになるか?

Q3.  $I$  の核が 0 のとき、 $f$  を  $I(f)$  からどのように復元することができるか?

この節では  $X = \mathbb{R}^n, S$  が  $X$  内の超平面すべてからなる集合  $\tilde{G}_{n-1,n}$  のときにひとつの答を与える。

$\mathbb{R}^n$  内の超平面は単位法線ベクトル  $\omega \in S^{n-1}$  と実数  $p \in \mathbb{R}$  により  $\{x \in \mathbb{R}^n | (\omega, x) = p\}$  と表せる。 $(\omega, p)$  と  $(-\omega, -p)$  は同じ超平面を定めるので  $S^{n-1} \times \mathbb{R} / \{\pm\} \cong \tilde{G}_{n-1,n}, (\omega, p) \mapsto \{x \in \mathbb{R}^n | (\omega, x) = p\}$  という写像ができる。これは全単射である。以下ではこの全単射で  $\tilde{G}_{n-1,n}$  をリーマン多様体だと思ふことにする。

Q1. の  $f$  の性質と  $I(f)$  の性質の間関係としてはたとえば次のようなことが知られている。 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  で  $\mathbb{R}^n$  上の急減少関数の空間を表す。

**定理 2.3** ([H, Theorem. 2.6]).  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  に対し次が成立。

ある正の実数  $A$  が存在して任意の  $\omega, p$  で  $|p| > A$  を満たすものに対し  $\hat{f}(\omega, p) = 0$  であるとする。このとき任意の  $x \in \mathbb{R}^n$  で  $|x| > A$  を満たすものに対し  $f(x) = 0$  である。

Q2. この場合には  $I$  は単射である。 $I$  の像については次のことが知られている。

**定理 2.4** ([H, Theorem. 2.4]).  $I : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \cong \mathcal{S}_H(\tilde{G}(n-1, n))$

ただし  $\mathcal{S}_H(\tilde{G}(n-1, n)) := \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{G}(n-1, n)) | \phi$  を  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$  に引き戻すと  $\mathbb{R}$  の方向に急減少関数であり、かつ任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対し  $\int_{p \in \mathbb{R}} \phi(\omega, p) p^k dp$  は  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  上の関数として多項式で表される。 $\}$

$\mathcal{S}_H$  の定義に現れる条件は Cavalieri condition と呼ばれている。

Q3.  $f$  は  $I(f)$  から次のように復元される。

$L$  を  $\mathbb{R}^n$  上の Laplacian とする。

**定理 2.5** ([H, Theorem. 3.1]).  $n$  は奇数とする。このとき次が成立する。

$$(4\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(1/2)} f = (-L)^{\frac{n-1}{2}} \check{f}, f \in C^\infty$$

$n$  が偶数のときも  $(-L)^{\frac{n-1}{2}}$  を適切に定義すれば (Riesz distribution, [H, Chapter I, §3 および Chapter V, §5]) 同じ等式が成立する。

### 3 インターロード

D 加群の積分変換につなげるため、この節では §2 で定義した積分変換を関手的な言葉で言い換える。設定は §2 と同じとする。 $X \times S$  の部分集合  $C$  を  $C := \{(x, s) \in X \times S | x \in Z = s\}$  で定める (部分多様体であると仮定する)。写像  $p_1^* : \mathcal{C}_c(X) \rightarrow \mathcal{C}_c(C), p_{21} : \mathcal{C}_c(C) \rightarrow \mathcal{C}_c(S)$  を以下で定義する。

$$(p_1^* f)(x, s) = f(x), \quad (p_{21} F)(s) = \int_{x \in Z_s} F(x, s) dx$$

すると積分変換  $I$  は  $I = p_{2!} \circ p_1^*$  と書ける。このように書き直すと、積分変換  $I$  は順像と逆像の定義される各 “sheaf theory” に対して定義することができる。  $C$  上の関数  $K$  に対して、  $K$  を核とする積分変換  $I_K$  は  $I(f) = p_{2!}(p_1^*(f) \cdot K)$  と書ける。このような “sheaf theory” の例としては、局所コンパクト空間上の層 (Kashiwara Schapira '90)、代数多様体や複素多様体上の  $D$  加群や  $E$  加群 (D'Agnolo Schapira)、代数多様体上の  $l$  進層 (Laumon)、代数多様体上の接続層 (Mukai) がある。次の節では  $D$  加群の積分変換について説明する。

## 4 D 加群の積分変換

### 4.1 D 加群

この節では複素多様体上の  $D$  加群の積分変換を扱う。標数  $0$  の体上の代数多様体でも  $D$  加群を考えることはできるが、  $D$  加群の解の層に関係する部分は複素多様体を持ち出さないとうまく機能しない。実多様体上では特性多様体の部分などもうまくいかないようである。

複素多様体  $X$  に対し、  $\mathcal{O}_X$  で正則関数の層をあらわし、  $\mathcal{D}_X$  で正則関数係数の有限階の微分作用素のなす層をあらわす。  $D$  加群とは  $\mathcal{D}_X$  加群のことを指す。この文書では  $\mathcal{D}_X$  加群は左加群のみ考える。

$D$  加群は微分方程式系を抽象化 (一般化?) したものである。たとえば  $P_i, 1 \leq i \leq n$  を  $X$  上の微分作用素とし、  $\mathcal{M} := \mathcal{D}/(P_1, \dots, P_n)$  とおく。この  $\mathcal{D}_X$  加群に対し次のような同型がある。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)(U) \cong \{f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \mid P_1 f = \dots = P_n f = 0\}$$

この式は  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$  が、  $X$  の各開集合  $U$  に対し  $U$  上の  $P_1 f = \dots = P_n f = 0$  の解を与える層と同型であることを示している。とくに  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)(X)$  の元は微分方程式系  $P_1 f = \dots = P_n f = 0$  の  $X$  全体で定義される解と 1 対 1 に対応する。終域の層  $\mathcal{O}_X$  を  $\mathcal{C}_X^\infty$ ,  $\mathcal{D}b_X$  (シュワルツ超関数の層),  $\mathcal{B}$  (佐藤超関数の層) などに変えることにより、解のクラスを変えることができる。

後で定理を述べる際に必要となる  $D$  加群の特性多様体を定義しておく。環の層  $\mathcal{D}_X$  には微分作用素の次数によりフィルター (部分層の族) が定まる。これを  $F_i \mathcal{D}_X$  とする。接続  $\mathcal{D}_X$  加群  $\mathcal{M}$  に対し、  $X$  上局所的に  $F_i \mathcal{D}_X$  と整合的なフィルター  $F_i \mathcal{M}$  が存在する。それに付随する次数付き加群の零化イデアルの零点集合を  $\mathcal{M}$  の特性多様体とよぶ。ここでは  $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$  とかくことにする。構成から特性多様体は  $T^*X$  の解析的閉部分集合である。

特性多様体は  $T^*X$  の自然なシンプレクティック構造に関して包会的であることが知られている。

特性多様体は微分方程式系に対してはその解の特異性を表す。

**例 4.1** ( $D$  加群の例).  $X = \mathbb{C}$  の場合に簡単な例で解と特性多様体がどのようになるかを見る。  $\mathbb{C}$  の座標を  $x$  とし、対応する微分を  $\partial$  で表す。

(1)  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \partial \mathcal{D}_X$

このとき  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b) \cong \mathbb{C}_X$  となる ( $\mathbb{C}_X$  は定数層)。これは  $\partial f = 0$  を満たす正則関数  $f$  が定数関数のみであることに対応している。特性多様体は余接束の零切断である。

(2)  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / x \mathcal{D}_X$

このとき  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b) \cong \mathbb{C}_0$  となる ( $\mathbb{C}_0$  は  $0$  に台を持つ摩天楼層)。これは  $xf = 0$  を満たす超関数  $f$  がデルタ関数のみであることに対応している。

値域を正則関数の層にとると結果が少し変わる。 $\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}_0$  であり、ほかの次数の  $\text{Ext}$  はすべて消える。

特性多様体は余接束の原点におけるファイバーである。

(3)  $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / (x\partial - \lambda)\mathcal{D}_X$

このとき

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}b) \cong \begin{cases} \mathbb{C}_X & \lambda \in \mathbb{N} \\ j_! \mathbb{C}_U & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N} \end{cases} \quad (1)$$

ただし  $j : U := \mathbb{C} \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{C}$  である。

これは  $\lambda$  が整数のときは  $\mathbb{C}$  全体における解が存在することと、 $\lambda$  が整数でないときは原点を含まない単連結開集合上では解が  $x^\lambda$  であり原点を含む連結開集合上では解が存在しないことに対応している。

特性多様体は余接束の零切断と余接束の原点におけるファイバーの合併である。

ホロノミックで確定特異点型 (正則ともいう) であるときには解層から  $D$  加群を復元できることが知られている。もう少し精密に書くと、 $\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(-, \mathcal{O}_X)$  が反変圏同値  $\text{D}_{\text{rh}}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow \text{D}_c^b(X)$  を与える。 $\text{D}_{\text{rh}}^b(\mathcal{D}_X)$  は  $\mathcal{D}_X$  加群の圏の導来圏の、コホモロジーが確定特異点型でホロノミックな複体全体のなす部分圏であり、 $\text{D}_c^b(X)$  は  $X$  上の層の圏の導来圏の、コホモロジーが構成可能なものなす充満部分圏である。

ホロノミックではあるが確定特異点型でないときについても、D'Agnolo-柏原 (Publ. Math. IHES, 2016) によって拡張された (enhanced) 解関手が定義され、拡張された解から  $D$  加群の復元ができることが証明されている。柏原-Schapira (Sel. Math. New. Ser., 2016) では積分変換との関連も調べられている。

## 4.2 積分変換

以下では考える圏はすべて導来圏とし、関手もすべて導来関手とする。 $\text{D}^b(\mathcal{D}_X)$  で  $\mathcal{D}_X$  加群の圏の導来圏を表す

$f : X \rightarrow Y$  を正則写像とする。順像  $f_+ : \text{D}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow \text{D}^b(\mathcal{D}_Y)$  と逆像  $f^! : \text{D}^b(\mathcal{D}_Y) \rightarrow \text{D}^b(\mathcal{D}_X)$  を以下のように定義する。

$$f^!(\mathcal{N}) = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{N} \quad (2)$$

$$f_+(\mathcal{M}) = f_*(\mathcal{M} \otimes \omega_X) \otimes_{\mathcal{D}_X} f^!\mathcal{D}_Y \otimes \omega_Y^{-1} \quad (3)$$

$\omega_X, \omega_Y$  は  $X, Y$  の標準束。 $D$  加群の順像が逆像の定義に比べて複雑であることの一つの説明は、関数のなす層は左加群なので逆像は引き戻すだけでよい ( $f^!(\mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{O}_X$  は  $\mathcal{D}_X$  加群) のに対し、積分が自然に定義されるのは密度 (density,  $\omega$  の切断) に対してであり  $\omega$  は右加群なので順像を定義する際に  $\omega$  をテンソルして右加群にしてから押し出してそのあとに左加群に戻す必要がある、である。

ホロノミック加群に対しては双対を用いて  $f^*, f_!$  を定義することができる。

$X, Y, S$  を複素多様体とし、 $f : S \rightarrow X, g : S \rightarrow Y$  を正則写像とする。積分変換を  $\Phi_S := g_+ \circ f^! : \text{D}^b(\mathcal{D}_X) \rightarrow \text{D}^b(\mathcal{D}_Y)$ ,  $\Phi_{\tilde{S}} := f_+ \circ g^! : \text{D}^b(\mathcal{D}_Y) \rightarrow \text{D}^b(\mathcal{D}_X)$  で定める。

これらの関手も §2 と同様に随伴関手になっている。 ([DS, Proposition 2.6, (2.18)])

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Phi_{\tilde{S}}\mathcal{N}[\dim Y - \dim X]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\Phi_S\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

$\mathcal{D}_S$  加群  $\mathcal{K}$  に対し、 $\mathcal{K}$  を核とする積分変換  $\Phi_S^{\mathcal{K}}, \Phi_S^{\mathcal{K}}$  も次のように定義することができる。

$$\Phi_S^{\mathcal{K}}(\mathcal{M}) := g_+(f^!(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{K}) \quad (4)$$

$$\Phi_S^{\mathcal{K}}(\mathcal{N}) = f_+(g^!(\mathcal{N}) \otimes \mathcal{K}) \quad (5)$$

### 4.3 射影空間の場合

$X = \mathbb{P}^n, Y = \mathbb{P}^{n*}$  とする。ここでは  $\mathbb{P}^n = \{\mathbb{C}^{n+1} \text{内の直線}\} = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*, \mathbb{P}^{n*} = \{\mathbb{C}^{n+1} \text{内の原点を通る超平面}\} = ((\mathbb{C}^{n+1})^* \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$  と思う。

$S$  としては  $A := \{(z, \zeta) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*} \mid \langle z, \zeta \rangle = 0\}$  または  $U := \{(z, \zeta) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*} \mid \langle z, \zeta \rangle \neq 0\}$  を考える。射影空間の元はスカラー倍の作用での商なのでペアリングが  $= 0$  と  $\neq 0$  という条件はそれぞれ意味を持つ。

$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n*}$  の第一成分への射影、第二成分への射影の  $A, U$  への制限を  $p_1^A, p_2^A, p_1^U, p_2^U$  で表す。

**定理 4.2.** (1)(Brylinski)  $p_{1+}^A \circ p_2^{A!}$  は平坦接続の生成する部分圏による剰余圏の間の圏同値を誘導する。

(2)(Marastoni)

$$p_{1+}^U \circ p_2^{U!} : D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_X) \rightleftarrows D_{\text{hol}}^b(\mathcal{D}_Y) : p_{2!}^U \circ p_1^{U!}$$

は互いに逆な圏同値である

定理の (2) はグラスマン多様体の場合 (Marastoni, Ann. scient. ENS, 1998) や一般旗多様体の場合 (Marastoni, Math. Nachr., 2013, Y.) にも拡張できることがわかっている。

### 参考文献

- [DS] D'Agnolo, A.; Schapira, P., Radon-Penrose transform for  $\mathcal{D}$ -modules, J. Funct. Anal. 139 (1996), no. 2, 349–382.
- [H] Helgason, S., The Radon Transform, Second Edition, Springer, (1990). available at <http://www-math.mit.edu/~helgason/Radonbook.pdf>

# 2 元生成 Klein 群に関する Jørgensen の理論

山崎亮介 \*

東京大学数理科学研究科, 2016 年 2 月

この度は, 第 13 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました. 大変有意義な時間を過ごさせていただきました. このような機会を与えてくださった運営委員の皆様へ深く御礼申し上げます.

## 1 Introduction

$n$  次元双曲空間  $\mathbb{H}^n$  の向きを保つ等長変換からなる離散群を ( $n$  次元) Klein 群という. 完備双曲多様体の基本群は Klein 群として  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$  へ埋めこまれ, 逆に torsion free な Klein 群の作用による  $\mathbb{H}^n$  の商空間は完備双曲多様体の構造をもつので, 双曲幾何学において Klein 群は非常に重要な研究対象となっている.

以降, 3 次元 Klein 群を考える.  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  は, Poincaré 拡張により Möbius 変換群  $\text{Möb}(\hat{\mathbb{C}}) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  と同一視できるので, 3 次元 Klein 群論は  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の離散部分群の研究に完全に帰着できる. 初等的 Klein 群 ( $\mathbb{H}^3$  に有限な orbit をもつ Klein 群) は全て分類されているのに対し, 非初等的 Klein 群の分類は非常に困難な問題である. Jørgensen [J] は, Klein 群の分類を議論する上で貴重な判定条件となる, 次の不等式評価を与えた.

**Theorem 1.1** (Jørgensen [J]). 2 つの Möbius 変換  $f, g \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  について,  $\langle f, g \rangle$  が非初等的 Klein 群ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$J(f, g) := |\text{tr}^2(f) - 4| + |\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2| \geq 1.$$

右辺 1 は best possible である.

Jørgensen の不等式を用いると次の主張も得られる.

**Theorem 1.2** (Jørgensen [J]). 非初等的な群  $G < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  が Klein 群であることの必要十分条件は,  $G$  の任意の 2 元生成部分群が Klein 群であることである.

したがって, Möbius 変換の群の離散性に関する問題は, 2 元生成非初等的群に関する研究に帰着できるともいえる. 実際, 双曲幾何学の著しい性質をもつ 2 元生成 Klein 群が豊富に存在する.

Theorem 1.1 で等号が成立する生成系  $\{f, g\}$  をもつ非初等的 Klein 群を Jørgensen 群という. Jørgensen 群が Fuchs 群 (2 次元 Klein 群) の場合には  $(2, 3, q)$  型 ( $7 \leq q \leq +\infty$ ) の三角群になることが, Jørgensen-Kiikka [J-K] により証明され, 1 つ目の生成元  $f$  が放物型となる Jørgensen 群 (放物型 Jørgensen 群) については, 李-大市-佐藤 [L-O-S I], [L-O-S II], [L-O-S III] により完全な分類が与えられた. 佐藤 [Sato1], [Sato2] は, この議論を精密化して群の Jørgensen 数を定義した.

---

\* yamazaki@ms.u-tokyo.ac.jp

**Definition 1.1** ([Sato1], [Sato2]).  $G$  を  $PSL(2, \mathbb{C})$  の 2 元生成部分群とする .

$$J(G) := \inf\{J(f, g) \mid G = \langle f, g \rangle\}$$

を,  $G$  の Jørgensen 数という .

本研究の目的は, 2 元生成 Klein 群の Jørgensen 数について議論することにより, Klein 群および双曲多様体の分類にアプローチすることにある。城崎新人セミナーの講演では, Klein 群の Jørgensen 数の実現について得られている結果を中心に紹介した。この報告集では, 講演ではあまり触れることができなかった, 1 点穴空きトーラス群と Markov triple の関係から得られる Jørgensen 数の評価について述べる .

## 2 Kissing Schottky 群と 1 点穴空きトーラスの実現

1 点穴空きトーラス群に関する理論は [A-S-W-Y] が詳しいが, 本稿ではそれと異なる方法での特徴づけを与えることを目指す。まず, Kissing Schottky 群による 1 点穴空きトーラス群の実現について述べる。幾何学的有限な Klein 群 (有限個の面からなる基本多面体とれる Klein 群) の例として Schottky 群がよく知られているが (例えば [T-M] などを参照), Kissing Schottky 群は古典的 Schottky 群の図形的に最も近い拡張である .

**Definition 2.1** ([Indra]).  $g_1, g_2, \dots, g_n \in PSL(2, \mathbb{C})$  をそれぞれ斜航型変換とする .  $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$  が Kissing Schottky 群であるとは, 次の 2 条件を満たすことをいう .

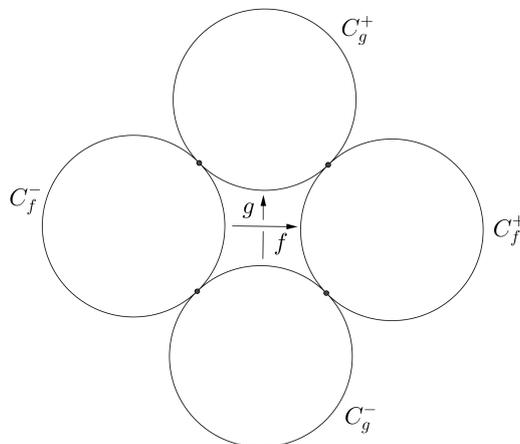
- (1) 各  $g_i$  に対応する 2 つの  $\hat{\mathbb{C}}$  の円  $C_i^+, C_i^-$  が存在して,  $C_i^+, C_i^-$  を境界にもつ円板  $D_i^+, D_i^-$  に対して,

$$g_i(C_i^-) = C_i^+, \quad g_i(\overset{\circ}{D}_i^-) = \overset{e}{D}_i^+$$

を満たす . ( $\overset{\circ}{A}, \overset{e}{A}$  はそれぞれ位相空間  $A$  の内部, 外部を表す .)

- (2)  $\{C_1^+, C_1^-, \dots, C_n^+, C_n^-\}$  に含まれる任意の円について, 自身と pair になっていない円で唯 1 点で接するものが  $\{C_1^+, C_1^-, \dots, C_n^+, C_n^-\}$  に 2 つ存在する .

今,  $\mathbb{H}^3$  の理想境界  $\hat{\mathbb{C}}$  への作用を考えていることに注意する . Kissing Schottky 群は,  $\mathbb{H}^3$  から  $\{C_1^+, C_1^-, \dots, C_n^+, C_n^-\}$  を大円 (赤道) にもつ  $2n$  個の半球体を除いた領域を基本領域として Klein 群となる . 例えば下図の 4 個の円は, 2 元生成 Kissing Schottky 群の作用を表したものである .



この図から, 2 元生成 Kissing Schottky 群  $G = \langle f, g \rangle$  を 4 つの円弧で囲まれた有界領域へ作用させて 1 点穴空きトーラスを得るための条件を求める, 円の各接点を  $C_f^+ \cap C_g^+ = P, C_g^+ \cap C_f^- = Q, C_f^- \cap C_g^- = R, C_g^- \cap C_f^+ = S$  とすると,

$$f(Q) = P, f(R) = S, g(R) = Q, g(S) = P$$

となればよいことがわかる. したがって, 4 つの接点は  $G$  の作用で全て同一視されるが, この 4 つの接点は  $G$  の極限点となるため, 1 つの puncture となる. これにより, Kissing Schottky 群の作用により 1 点穴空きトーラスが得られた. このとき, 円上の各点の  $G$ -orbit を見ると  $G$  の極限集合は単純閉曲線になるため,  $G$  は擬 Fuchs 群となっていることに注意する. 逆に, 任意の 1 点穴空きトーラス  $\Sigma_{1,1}$  について,  $\pi_1(\Sigma_{1,1}) = \langle X, Y \rangle$  ( $X$ : longitude,  $Y$ : meridian) とする. これに対し, faithful な離散表現

$$\rho: \pi_1(\Sigma_{1,1}) \longrightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

を,  $\rho(X), \rho(Y)$  が双曲型で  $\rho(XYX^{-1}Y^{-1})$  が放物型になるように取れば,  $\rho(\pi_1(\Sigma_{1,1}))$  は Kissing Schottky 群であり, 擬 Fuchs 群になる. ([K-S] の Appendix を参照.) 以上の理由から, 1 点穴空きトーラス群となる Kissing Schottky 群を擬フックス型穴空きトーラス群 (*quasi-fuchsian punctured torus group*) と呼ぶ.

さらに, 生成元の交換子  $fgf^{-1}g^{-1}$  の固定点  $z$  に近い点  $w$  を取ると, Kissing Schottky 群の性質から点列  $\{fgf^{-1}g^{-1}(w)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $z$  にのみ集積するので,  $fgf^{-1}g^{-1}$  は放物型となる. 一方, 次が知られている.

**Lemma 2.1** ([B]). 2 つの Möbius 変換  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  に対して,  $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) \neq \emptyset$  であることの必要十分条件は,  $\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = 2$  を満たすことである.

これより, まず Kissing Schottky 群を生成する  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  については,  $G = \langle f, g \rangle$  が擬フックス型穴空きトーラス群ならば  $\text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) = -2$  が成り立つ. さらに,  $G$  の生成系の取り替えについて議論することにより,  $G$  の全ての生成系の交換子のトレースが  $-2$  となっていることがわかる. つまり, 次が従う.

**Theorem 2.2** ([Indra]). 2 つの斜航型変換  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  について,  $\langle f, g \rangle$  が擬フックス型穴空きトーラス群ならば  $fgf^{-1}g^{-1}$  はトレースが  $-2$  の放物型変換である.

### 3 主結果

任意の  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  が, トレース恒等式

$$\text{tr}^2(f) + \text{tr}^2(g) + \text{tr}^2(fg) = \text{tr}(f)\text{tr}(g)\text{tr}(fg) + \text{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) + 2$$

を満たすことはよく知られている. したがって,  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  が擬フックス型穴空きトーラス群を生成すれば Theorem 2.2 より,

$$\text{tr}^2(f) + \text{tr}^2(g) + \text{tr}^2(fg) = \text{tr}(f)\text{tr}(g)\text{tr}(fg)$$

が成り立つ. これを用いて, ある特殊な条件下において擬フックス型穴空きトーラス群の Jørgensen 数が完全に決定できることを紹介する.

**Definition 3.1.** 正の整数の 3 つ組  $(x, y, z)$  が *Markov triple* であるとは,

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

を満たすことをいう.

Markov triple の定義から，次の主張が直ちに従う．

**Lemma 3.1.** 擬フックス型穴空きトーラス群  $\langle f, g \rangle < PSL(2, \mathbb{C})$  について，次の 2 条件は同値である．

- (1)  $(\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg))$  は Markov triple である．
- (2)  $\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg)$  はそれぞれ正の整数である．

$\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$  であって  $\operatorname{tr}^2(f) + \operatorname{tr}^2(g) + \operatorname{tr}^2(fg) = \operatorname{tr}(f)\operatorname{tr}(g)\operatorname{tr}(fg)$  ならば， $\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg)$  の中で負の整数は偶数個であり，2 つある場合は  $f, g$  の行列表現を取り替えることでそれらのトレースを正にできるので，Markov triple を考える際にはトレースの符号は本質的に問題にならない．以降， $\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg)$  はすべて 0 以上として議論する．Lemma 3.1 より，擬フックス型穴空きトーラス群  $\langle f, g \rangle$  が  $\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$  を満たせば， $(\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg))$  は必ず Markov triple となっている．

ここで，Markov triple の擬フックス型穴空きトーラス群の生成系としての実現可能性を考えるために，まず  $x = y = z$  となる Markov triple を求めると， $(x, y, z) = (3, 3, 3)$  のみであることが直ちに従う．今，

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$UV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, UVU^{-1}V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

より， $(\operatorname{tr}(U), \operatorname{tr}(V), \operatorname{tr}(UV))$  はこれを満たしている．

**Lemma 3.2.**  $G = \langle U, V \rangle$  は擬フックス型穴空きトーラス群である．

これは，生成系のトレースが基本となる Markov triple  $(x, y, z) = (3, 3, 3)$  に対応する擬フックス型穴空きトーラス群の存在を保証するものである．さらに，Markov triple について次が知られている．

**Theorem 3.3** ([Series]). 全ての Markov triple は， $(3, 3, 3)$  に 2 種類の変換

$$\begin{aligned} M_1: (x, y, z) &\mapsto (z, x, y) \\ M_2: (x, y, z) &\mapsto (x, xy - z, y) \end{aligned}$$

を有限回行ったもので得られる．

この  $M_1, M_2$  は生成系の取り替え

$$\begin{aligned} (f, g, fg) &\mapsto (fg, f^{-1}, fgf^{-1}) \\ (f, g, fg) &\mapsto (f, f^{-1}g, g) \end{aligned}$$

に対するトレースの変換と 1 対 1 に対応している．したがって，Theorem 3.3 より擬フックス型穴空きトーラス群  $G$  について，ある生成系  $\{f, g\}$  が  $\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$  を満たせば， $G$  の生成系を Markov triple  $(3, 3, 3)$  に対応する Möbius 変換に取り替えることができる．

逆に，次の主張も成り立つ．

**Lemma 3.4.**  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  を擬フックス型穴空きトーラス群とする．ある  $G$  の生成系  $\{f, g\}$  について  $\operatorname{tr}(f), \operatorname{tr}(g), \operatorname{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$  ならば， $G$  の任意の生成系  $\{X, Y\}$  は  $\operatorname{tr}(X), \operatorname{tr}(Y), \operatorname{tr}(XY) \in \mathbb{Z}$  を満たす．

したがって、擬フックス型穴空きトーラス群  $G$  に対し、 $\text{tr}(f), \text{tr}(g), \text{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$  となる生成系  $\{f, g\}$  が 1 つ存在すれば、 $G$  の全ての生成系が Markov triple に対応する。Markov triple に対応する Möbius 変換の順序対  $(f, g)$  に対して  $J(f, g)$  が最小となるのは、 $(\text{tr}(f), \text{tr}(g), \text{tr}(fg)) = (3, 3, 3)$  のときであり、これを満たす  $G$  の生成系は先述の通り必ず存在する。この  $U, V$  に対して  $J(U, V) = 9$  である。以上より、次を得る。

**Theorem 3.5 (Y.).** 擬フックス型穴空きトーラス群  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  について、 $\text{tr}(f), \text{tr}(g), \text{tr}(fg) \in \mathbb{Z}$  を満たす  $G$  の生成系  $f, g \in PSL(2, \mathbb{C})$  が存在するならば、 $J(G) = 9$ 。

Möbius 変換のトレースと、対応する双曲曲面上の測地線の長さには関係があることはよく知られている。したがって、生成系が Markov triple に対応するという条件も、1 点穴空きトーラスの測地線の情報を反映したものである。つまり、生成系に対応する 1 点穴空きトーラス上の測地線の長さがある条件を満たせば、対応する擬フックス群表現の Jørgensen 数を完全に決定できることがわかった。Jørgensen 数と 1 点穴空きトーラスの幾何学的性質の関係性について、さらに関連性を見つけることが今後の課題である。

## 参考文献

- [A-S-W-Y] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada and Y. Yamashita, Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I), Lecture Notes in Mathematics, 1909, Springer-Verlag 2007.
- [B] A. F. Beardon, The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlag, New York 1983.
- [J] T. Jørgensen, On discrete groups of Möbius transformations, Amer. J. Math. **98** (1976), 739–749.
- [J-K] T. Jørgensen and M. Kiiikka, Some extreme discrete groups, Ann. Acad. Sci. Fenn. **1** (1975), 245–248.
- [K-S] L. Keen and C. Series, Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori, Topology. **32** (1993), 719–749.
- [L-O-S I] C. Li, M. Oichi and H. Sato, Jørgensen groups of parabolic type I (Finite type), Comput. Methods Funct. Theory **5** (2005), 409–430.
- [L-O-S II] C. Li, M. Oichi and H. Sato, Jørgensen groups of parabolic type II (Countably infinite case), Osaka J. Math. **41** (2004), 491–506.
- [L-O-S III] C. Li, M. Oichi and H. Sato, Jørgensen groups of parabolic type III (Uncountably infinite case), Kodai Math. J. **28** (2005), 248–264.
- [Indra] D. Mumford, C. Series and D. Wright, Indra’s pearls. The vision of Felix Klein, Cambridge Univ. Press, New York, 2002.
- [O-S] M. Oichi and H. Sato, Jørgensen numbers of discrete groups, RIMS Koukyuroku **1518** (2006), 105–118.
- [Sato1] H. Sato, The Jørgensen number of the Whitehead link group, Bol. Soc. Mat. Mexicana(3) **10**, Special issue (2004), 495–502.
- [Sato2] H. Sato, One-parameter families of extreme groups for Jørgensen’s inequality, Contem. Math. **256** (The First Ahlfors - Bers Colloquium) edited by I. kra and B. Maskit, (2000), 271–287.
- [Series] C. Series, The Geometry of Markoff Numbers, The Mathematical Intelligencer **7**, (1994), 20–29.
- [T-M] 谷口雅彦, 松崎克彦, 双曲的多様体とクライン群, 日本評論社 1993.

# 非線形 Schrödinger 方程式系における 孤立波解のピッチフォーク分岐と線形安定性

山添 祥太郎 \*

京都大学 情報学研究科, 2016 年 2 月

## 1 導入

本研究は京都大学情報学研究科の矢ヶ崎一幸教授との共同研究である。  
次の空間 1 次元における非線形 Schrödinger 方程式系を考える。

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \partial_x^2 u + (\alpha|u|^2 + \beta|v|^2)u &= 0 \\ i\partial_t v + \partial_x^2 v + (\beta|u|^2 + \gamma|v|^2)v &= 0 \end{aligned} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+1}. \quad (\text{CNLS})$$

ここで,  $u, v : \mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{C}$  は未知関数,  $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$  は定数である。(CNLS) は非線形の媒質中を相互作用しながら伝播する二つの波を表す方程式として, 物理学の様々な場面でしばしば現れる。一例としては, 非線形光学において複屈折性をもつ光ファイバー中を伝播する 2 つのパルスの包絡線を記述する方程式として知られている。

我々は (CNLS) の解のうち次の形の解に注目する。

$$u(t, x) = e^{i(\omega t + cx - c^2 t)} U(x - 2ct), \quad v(t, x) = e^{i(st + cx - c^2 t)} V(x - 2ct). \quad (1.1)$$

ここで,  $\omega > 0, s > 0, c \in \mathbb{R}$  は定数,  $U, V$  は実数値関数で  $U(x), V(x) \rightarrow 0$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) をみたすものとする。このような解は孤立波解と呼ばれる。非線形光学の文脈では孤立波解は光のパルスに対応すると考えられ, その性質を調べることは数学的興味はもとより, 光通信などへの応用可能性から工学的にも重要な意味を持つ。

以下, 記述を簡単にするため  $\alpha = \omega = 1, c = 0$  とおく。(CNLS) が Galilei 変換

$$(u, v)(t, x) \mapsto e^{i(cx - c^2 t)} (u, v)(t, x - 2ct)$$

に対して不変であることに注意すると, このように仮定しても一般性を失わないことがわかる。

(CNLS) は任意の  $\beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}, s > 0$  に対して自明な孤立波解

$$(u, v)(t, x) = (e^{it} U^h(x), 0), \quad U^h(x) = \sqrt{2} \operatorname{sech}(x)$$

を持つ。固定した  $\gamma, s$  に対して,  $\beta$  をパラメータとして変化させたときに自明な孤立波解から新たな孤立波解が分岐する現象が起きる。本稿では, この分岐現象について概説し, さらに分岐した孤立波解の線形安定性について得られた結果を述べる。線形安定性の解析には Evans 関数と呼ばれ

\*yamazoe@amp.i.kyoto-u.ac.jp

ある解析関数が重要な役割を果たす．Evans 関数を用いた解析においては，(CNLS) の空間次元が 1 であることが本質的に用いられる．

関連する先行研究について言及しておく．本稿で孤立波解と読んでいるような空間的に局在した解は，反応拡散系や非線形波動を記述する方程式において頻りに現れるものであり，それらの安定性の研究は膨大な量の先行研究がある．まず，非線形 Schrödinger 方程式系の孤立波解の軌道安定性については Ohta[11]，Nguyen[10] などの結果がある．次に，Evans 関数を用いた線形安定性の解析に限定すると，その研究は Evans[3] が神経系の方程式のパルス解の安定性を調べるために今日 Evans 関数と呼ばれている関数を用いたことに端を発する．その後，この方法は様々な研究者によって拡張された [1][5][7][8]．我々の研究に特に関連が深い結果としては Li and Promislow[9] による ((CNLS) とは異なる非線形項を持つ) 非線形 Schrödinger 方程式系の孤立波解の不安定性の研究がある．彼らは摂動パラメータに対して persistent な孤立波解を考えている一方で，我々は分岐した孤立波解に注目しているところが大きく異なる．この違いは，以下に述べる主定理 3.1 において Evans 関数の摂動展開の 1 次の項が消えることに反映されている．

本稿の構成は以下のようになっている．まず，第 2 節では孤立波解の分岐現象について既知の結果を述べる．この節の内容は Blázquez-Sanz and Yagasaki[2] に従った．第 3 節では分岐した孤立波解の線形安定性について得られた結果の紹介と証明の概略を述べる．最後に第 4 節で今後の課題を述べる．

## 2 孤立波解のピッチフォーク分岐

Blázquez-Sanz and Yagasaki[2] に従って，ホモクリニック軌道のピッチフォーク分岐の理論を (CNLS) の孤立波解 (1.1) に適用する．(1.1) の  $U, V$  が満たす方程式は

$$U'' - U + (U^2 + \beta V^2)U = 0, \quad V'' - sV + (\beta U^2 + \gamma V^2)V = 0. \quad (2.2)$$

である．これを 1 階化してできる方程式

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_2, & \xi_2' &= \xi_1 - (\xi_1^2 + \beta\eta_1^2), \\ \eta_1' &= \eta_2, & \eta_2' &= s\eta_1 - (\beta\xi_1^2 + \gamma\eta_1^2) \end{aligned}$$

に対して，分岐パラメータを  $\beta$  として分岐理論を適用すると，任意の  $\gamma \in \mathbb{R}, s > 0$  に対して

$$\beta = \beta_\ell := \frac{(2\sqrt{s} + 2\ell + 1)^2 - 1}{8} \quad (\ell = 0, 1, \dots)$$

でピッチフォーク分岐が起きることがわかる．すなわち， $|\beta - \beta_\ell| \ll 1$  のとき

$$(u, v)(t, x) = \left( e^{it} U^h(x), \pm e^{ist} C \sqrt{|\beta - \beta_\ell|} \phi(x) \right) + \mathcal{O}(\beta - \beta_\ell), \quad C > 0 \quad (2.3)$$

の形の孤立波解が存在する．

## 3 孤立波解の線形安定性

この節ではピッチフォーク分岐した孤立波解の線形安定性，すなわち線形化作用素のスペクトルを決定する問題について考える．

(CNLS) とその複素共役を取った方程式の連立系を考え，これに対応する孤立波解

$$(e^{it}U(x), e^{-it}U(x), e^{ist}V(x), e^{-ist}V(x))$$

のまわりで線形化すると，線形化作用素  $\mathcal{L} : H^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4)$  は

$$\mathcal{L} = -i\Sigma_3 \left( -\partial_x^2 + \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & sI_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U^2(2I_2 + \sigma_1) + \beta V^2 I_2 & \beta_1 UV(I_2 + \sigma_1) \\ \beta UV(I_2 + \sigma_1) & \beta U^2 I_2 + \gamma V^2(2I_2 + \sigma_1) \end{pmatrix} \right)$$

と表される．ここで  $O_2$  は 2 次の零行列，

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 := \begin{pmatrix} \sigma_3 & O_2 \\ O_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

と置いた．(CNLS) 単独ではなく，その複素共役を取ったものとの連立系を考えた理由は，そうすることで  $\mathcal{L}$  の非線形項由来の項がかけ算作用素となるためである．

孤立波解  $(e^{it}U(x), e^{ist}V(x))$  が線形安定であるとは， $\mathcal{L}$  のスペクトル  $\sigma(\mathcal{L})$  が左半平面  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda \leq 0\}$  に含まれることを言うのだった． $\sigma(\mathcal{L})$  は点スペクトル  $\sigma_p(\mathcal{L})$  と本質的スペクトル  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$  の和集合で表される．また，本質的スペクトルが相対コンパクトな摂動に対して不変であること ([4], Theorem IV.5.35) から

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = i(-\infty, -\max\{1, s\}] \cup i[\max\{1, s\}, +\infty)$$

であることが確かめられる．従って， $\sigma_p(\mathcal{L})$ ，すなわち  $\mathcal{L}$  の固有値の位置を決定することが問題となる．この問題に対する有効なアプローチが Evans 関数を用いた解析である．

講演では次の結果を紹介した．

定理 3.1.  $\mathcal{L}$  のスペクトルの位置について，次が成り立つ．

1. ピッチフォーク分岐のまん中の枝  $(u, v)(t, x) = (e^{it}U^h(x), 0)$  について， $\mathcal{L}$  のすべての固有値は虚軸上にある．特に，孤立波解は線形安定である．
2. ピッチフォーク分岐の上下の枝 (2.3) について， $\mathcal{L}$  のすべての固有値は虚軸の  $\mathcal{O}(\beta - \beta_\ell)$  近傍にある．すなわち，固有値は摂動の *leading order*  $\mathcal{O}(|\beta - \beta_\ell|^{1/2})$  の範囲では変化しない．

証明の鍵となる Evans 関数の構成と基本的な性質について述べる．固有値問題  $\mathcal{L}\psi = \lambda\psi$  を次の 1 階の微分方程式系に書き直す．

$$Y' = A(x, \lambda)Y, \tag{3.4}$$

ここで， $Y = (\psi_1, \psi'_1, \dots, \psi_4, \psi'_4)^T$ ， $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_4)^T$  とした．

$$A_0(\lambda) := \lim_{|x| \rightarrow \infty} A(x, \lambda)$$

とおく．

次の補題は (3.4) の解の漸近挙動が  $Y' = A_0(\lambda)Y$  の解の漸近挙動によって特徴付けられることを示している．

補題 3.2.  $A(x)$  を各成分が  $x \in \mathbb{R}$  の連続関数であるような  $n \times n$  行列とする．対角化可能な行列  $A_0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} A(x)$  が存在して，さらに次を満たすと仮定する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|A(x) - A_0\| dx < \infty.$$

ここで,  $\|\cdot\|$  は行列の適当なノルムを表す.  $A_0$  の固有値, 固有ベクトルをそれぞれ  $\mu_1, \dots, \mu_n, v_1, \dots, v_n$  とする. このとき,  $j = 1, \dots, n$  に対して  $Y' = A(x)Y$  の解  $Y_j^u, Y_j^s$  が一意に存在して

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\mu_j x} Y_j^u(x) = v_j, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\mu_j x} Y_j^s(x) = v_j$$

が成り立つ.

我々の  $A_0(\lambda)$  に対しては, 固有値と固有ベクトルは次のように取れる.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{1 - i\lambda}, \quad \mu_2 = -\mu_1, \quad \mu_3 = \sqrt{1 + i\lambda}, \quad \mu_4 = -\mu_3, \\ \mu_5 &= \sqrt{s - i\lambda}, \quad \mu_6 = -\mu_5, \quad \mu_7 = \sqrt{s + i\lambda}, \quad \mu_8 = -\mu_7, \end{aligned}$$

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \mu_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_5 & \mu_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_7 & \mu_8 \end{pmatrix}.$$

補題 3.2 で存在が示された解  $Y_1^u, \dots, Y_8^s$  に対して,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$  のとき

- $Y_1^u, Y_3^u, Y_5^u, Y_7^u$  は  $x \rightarrow -\infty$  で減衰するような (3.4) の解空間の基底,
- $Y_2^s, Y_4^s, Y_6^s, Y_8^s$  は  $x \rightarrow +\infty$  で減衰するような (3.4) の解空間の基底

になっていることに注意する. このとき, これらの解  $Y_1^u, Y_2^s, \dots, Y_8^s$  の Wronskian を  $\mathcal{L}$  に付随する Evans 関数と呼び

$$E(\lambda) := \det(Y_1^u, Y_2^s, Y_3^u, Y_4^s, Y_5^u, Y_6^s, Y_7^u, Y_8^s)(x, \lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})) \quad (3.5)$$

と書く. なお,  $\text{tr} A(x, \lambda) = 0$  であることから (3.5) の右辺は  $x$  に依らない.

Evans 関数の基本的な性質を次の補題にまとめる.

補題 3.3. 次が成り立つ.

1.  $E(\lambda)$  は  $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$  上の正則関数である.
2.  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$  が  $\mathcal{L}$  の固有値であることと  $E(\lambda_0) = 0$  であることは同値である.
3.  $\mathcal{L}$  の固有値  $\lambda_0$  の代数的多重度は  $E(\lambda)$  の零点  $\lambda_0$  の位数と一致する.

$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$  に埋め込まれた固有値が摂動によってどのように動くかを決定するためには補題 3.3 では不十分である. この問題は Evans 関数を Riemann 面上の正則関数として見直すことにより解消される.

補題 3.3 によって,  $\mathcal{L}$  の固有値を求める問題は正則関数  $E(\lambda)$  の零点を求める問題に帰着される. ピッチフォーク分岐のまん中の枝については Evans 関数が具体的に計算できて, 次のようになる.

$$E(\lambda) = E_1(\lambda)E_2(\lambda)E_3(\lambda), \quad E_1(\lambda) = \frac{4\mu_1(\lambda)\mu_3(\lambda)(\mu_1(\lambda) - 1)^2(\mu_3(\lambda) - 1)^2}{(\mu_1(\lambda) + 1)^2(\mu_3(\lambda) + 1)^2},$$

$$E_2(\lambda) = -\frac{2\Gamma(\mu_5(\lambda) + 1)^2}{\Gamma(\mu_5(\lambda) - \sigma)\Gamma(\mu_5(\lambda) + \sigma + 1)}, \quad E_3(\lambda) = E_2(-\lambda), \quad \sigma = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\beta_1}}{2}.$$

ピッチフォーク分岐の上下の枝については Evans 関数は具体的には計算できないが，孤立波解 (2.3) の表示を基にして Evans 関数の摂動パラメータに関する導関数を計算することができ，それによって定理 3.1 が証明される．

## 4 今後の課題

今後の課題としては次のことが挙げられる．

- ピッチフォーク分岐の上下の枝についても線形安定性を決定する．そのためには Evans 関数の摂動展開をもう一つ高次の項まで行えばよい．具体的には，孤立波解 (2.3) の  $O(\beta - \beta_\ell)$  の項を決定することで，それを足がかりにして計算が実行できる．
- 孤立波解 (2.3) の軌道安定性や漸近安定性について調べる．もしこの孤立波解が線形安定であれば，そのことに加えて  $\mathcal{L}$  の固有値に付随して定まる Krein signature と呼ばれる数を計算することで，軌道安定性を判定できる可能性がある [6]．

## 参考文献

- [1] J. Alexander, R. Gardner and C.K.R.T. Jones, A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves, *J. reine angew. Math.* **410** (1990), 167–212.
- [2] D. Blázquez-Sanz and K. Yagasaki, Analytic and algebraic conditions for bifurcations of homoclinic orbits I: Saddle equilibria, *J. Differential Equations*, **253** (2012), 2916–2950.
- [3] J. Evans, Nerve axon equations, I: Linear approximations, *Indiana Univ. Math. J.* **21** (1972), 877–955.
- [4] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd. ed., Springer, Berlin, 1980.
- [5] T. Kapitula, The Evans function and generalized Melnikov integrals, *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1998), 273–297.
- [6] R. Kollár and P.D. Miller, Graphical Krein Signature Theory and Evans-Krein Functions, *SIAM Review* **56** (2014), 73–123.
- [7] T. Kapitula and B. Sandstede, Stability of bright solitary-wave solutions to perturbed nonlinear Schrödinger equations, *Physica D* **124** (1998), 58–103.
- [8] T. Kapitula and B. Sandstede, Edge bifurcation for near integrable systems via Evans function techniques, *SIAM J. Math. Anal.* **33** (2002), 1117–1143.
- [9] Y.A. Li and K. Promislow, The mechanism of the polarizational mode instability in birefringent fiber optics, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000), 1351–1373.
- [10] N.V. Nguyen, On the orbital stability of solitary waves for the 2-coupled nonlinear Schrödinger system, *Commun. Math. Sci.* **9** (2011), 997–1012.
- [11] M. Ohta, Stability of solitary waves for coupled nonlinear Schrödinger equations, *Nonlinear Anal.* **26** (1996), 933–939.

# トロピカル幾何学とモノドロミー変換

山本 悠登\*

東京大学大学院数理科学研究科, 2016年2月

## 1 概要

トロピカル幾何学は、通常の加法を2つの数の  $\max$  をとる操作に、乗法を通常の加法  $+$  に取り換えて得られる max-plus 代数上の代数幾何学である。この  $\max$  と plus の演算は、通常の演算  $+$ ,  $\times$  のある種の極限（トロピカル極限）として現れるが、複素代数多様体にその極限を施すと、その多様体の“骨格”が現れる。この“骨格”が、トロピカル幾何学の主な研究対象であるトロピカル多様体である。

トロピカル多様体は、極限を取る前の元の多様体に関する様々な情報を持っていることが知られている。例えば Itenberg, Khazarkov, Mikhalkin, Zharkov [1] によって導入されたトロピカルホモロジーを用いれば、トロピカル多様体の組み合わせ的なデータから、元の複素多様体の Hodge 数を回復できることが知られている。「トロピカル多様体から、元の多様体の情報をどこまで引き出せるか?」という問いが、トロピカル幾何学における中心的な課題の一つとなっている。

トロピカル多様体は（ある種のアフィン構造を持つ）多面体であり、基本的にトロピカル多様体が持つ情報は、組み合わせ的なものに限られる。また、トロピカル化によって得られるトロピカル多様体の次元は、実次元で元の多様体の次元の半分になる。そのため、トロピカル極限を取る過程でかなりの情報を捨ててしまっていることになる。しかし、逆にその構造が組み合わせ的で単純である故にトロピカル多様体の取り扱いが比較的簡単で、様々な量を具体的に計算することを可能にする。

本講演では、トロピカル多様体と元の多様体のトロピカル極限周りのモノドロミーとの関係について述べる。[5]において、トーリック超曲面の場合に、そのトロピカル化によって得られるトロピカル多様体を用いて、元の多様体の幾何学的モノドロミーの具体的な記述を与えた。特に、一次元の場合にはモノドロミーが多様体のコホモロジーにどのように作用するのかも計算可能である。具体例を扱いながらこの結果を紹介する。

## 2 トロピカル幾何学

max-plus 代数  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$  は次のように定義される。  $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  として、これに加法  $\oplus$ , 乗法  $\odot$  を

$$a \oplus b := \max\{a, b\}, \quad a \odot b := a + b \quad (a, b \in \mathbb{T}) \quad (2.1)$$

---

\*yuto@ms.u-tokyo.ac.jp

で与える.  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$  は結合法則や交換法則を満たすが, 加法  $\oplus$  に関して逆元が必ずしも存在しない. そのため, これは環にはならず半環と呼ばれる.

トロピカル幾何学における多項式は, 次の形の関数  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  として定義される.

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \bigoplus_{m \in A} a_m \odot X_1^{m_1} \odot \cdots \odot X_{n+1}^{m_{n+1}} \\ &= \max_{m \in A} \{a_m + m_1 X_1 + \cdots + m_{n+1} X_{n+1}\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで,  $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}$  で,  $A$  は  $\mathbb{Z}^{n+1}$  の有限部分集合とする. 各  $a_m \odot X_1^{m_1} \odot \cdots \odot X_{n+1}^{m_{n+1}}$  が単項式であり, それらはすべて  $\mathbb{R}^{n+1}$  上の一次関数である. そして, 全ての単項式の  $\max$  を取って得られる  $F$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  上の下に凸な区分線型関数を定める.

また, トロピカル多項式  $F$  が定める超曲面  $V(F) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  は, 次で定義される.

$$V(F) = \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists p \neq \exists q \in A, \text{ s.t. } F(X) = a_p + p \cdot X = a_q + q \cdot X\}. \quad (2.3)$$

ここで,  $p \cdot X$  は  $p_1 X_1 + \cdots + p_{n+1} X_{n+1}$  を表す.  $q \cdot X$  も同様である.

トロピカル幾何学と複素代数幾何学の間関係を考える上で用いる典型的な対象は, 収束 Puiseux 級数体や収束 Laurent 級数体上の多項式である. ここでは, 収束 Laurent 級数体  $K := \mathbb{C}\{t\}$  を用いる. これは次の標準的な非アルキメデス付値を持つ.

$$\text{val}: K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \quad k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j t^j \mapsto -\min \{j \in \mathbb{Z} \mid c_j \neq 0\}. \quad (2.4)$$

$K$  上の Laurent 多項式  $f = \sum_{m \in A} k_m x^m \in K[x_1^\pm, \dots, x_{n+1}^\pm]$  のトロピカル化とは, 次式で与えられるトロピカル多項式  $\text{trop}(f): \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  である.

$$\text{trop}(f)(X_1, \dots, X_{n+1}) := \max_{m \in A} \{\text{val}(k_m) + m_1 X_1 + \cdots + m_{n+1} X_{n+1}\}. \quad (2.5)$$

トロピカル化によって得られる超曲面と元の複素代数超曲面の間には, 次のような関係がある. まず, 十分大きい実数  $R \in \mathbb{R}^{>0}$  をとり固定する.  $f_R \in \mathbb{C}[x_1^\pm, \dots, x_{n+1}^\pm]$  を  $f$  の  $t$  に  $1/R$  を代入して得られる  $\mathbb{C}$  上の Laurent 多項式とする. さらに,  $\text{Log}_R: (\mathbb{C}^*)^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  を

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\log_R |x_1|, \dots, \log_R |x_{n+1}|) \quad (2.6)$$

とし,  $\mathcal{A}_R := \text{Log}_R(\{x \in (\mathbb{C}^*)^{n+1} \mid f_R(x) = 0\})$  とおく.

**Theorem 2.1.** ([3, 4])  $R \rightarrow \infty$  の極限の下で,  $\mathcal{A}_R$  は,  $V(\text{trop}(f))$  に Hausdorff 収束する.

ここで,  $\mathbb{R}^{n+1}$  の部分集合の Hausdorff 収束は, 次の Hausdorff 距離によって定義される.

$$d(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(X, y) \right\}, \quad (X, Y \subset \mathbb{R}^{n+1}) \quad (2.7)$$

**Example 2.2.**  $K$  上の多項式  $f$  が次で与えられる場合を考える.

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 + x_2 (x_1^3 + t^{-2} x_1^2 + t^{-2} x_1 + t^{-1}) + 1. \quad (2.8)$$

このとき  $f$  のトロピカル化は,

$$\text{trop}(f)(X_1, X_2) = \max \{2X_2, 3X_1 + X_2, 2X_1 + X_2 + 2, X_1 + X_2 + 2, X_2 + 1, 0\} \quad (2.9)$$

となる. 図 2.1 の太線部は,  $\text{trop}(f)$  によって定められるトロピカル超曲面  $V(\text{trop}(F))$  を示している. また,  $\mathcal{A}_R$  は図 2.2 の灰色の領域のようになる.

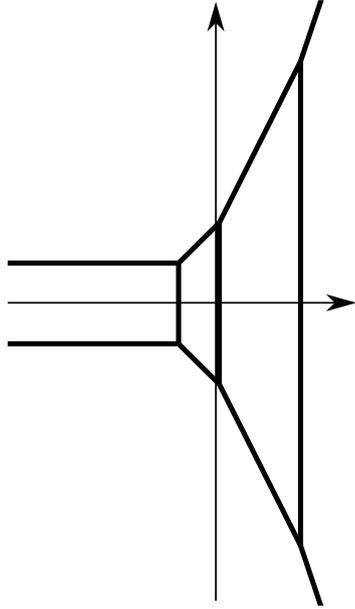


図 2.1: (2.8) の場合の  $V(\text{trop}(f))$

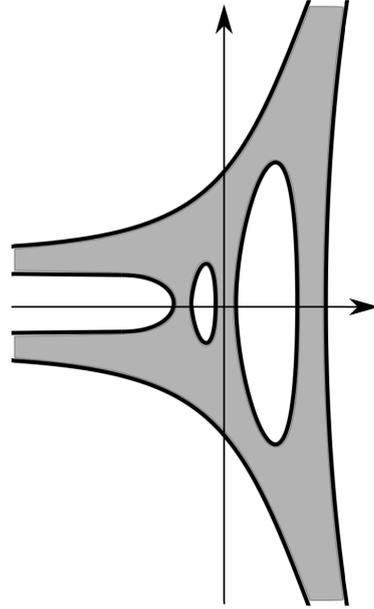


図 2.2: (2.8) の場合の  $\mathcal{A}_R$

### 3 設定

$K := \mathbb{C}\{t\}$  を収束 Laurent 級数体とする.  $n \in \mathbb{N}$  を自然数とし,  $M$  を階数  $n+1$  の自由  $\mathbb{Z}$ -加群とする. また,  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  とし,  $\Delta \subset M_{\mathbb{R}}$  を凸格子多面体とする.  $A := \Delta \cap M$  とおく. さらに,  $f = \sum_{m \in A} k_m x^m \in K[x_1^{\pm}, \dots, x_{n+1}^{\pm}]$  を  $K$  上の  $n+1$  変数 Laurent 多項式とする. ただし, 全ての  $m \in A$  に対して  $k_m \neq 0$  であると仮定する. 十分大きい実数  $R \in \mathbb{R}^{>0}$  をとり固定する.  $S_R^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$  とおく.  $q \in S_R^1$  に対して,  $f_q \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \dots, x_{n+1}^{\pm}]$  を  $f$  の  $t$  に  $1/q$  を代入して得られる  $\mathbb{C}$  上の多項式とする.  $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$  での  $f_q$  の零点集合を適当にコンパクト化したものを  $V_q$  とする.  $\{V_q\}_{q \in S_R^1}$  の  $q = \infty$  周りのモノドロミー変換について考える.

モノドロミーを考える上で本質的ではないが, ここでのコンパクト化について正確に述べると,  $\mathcal{F}$  を  $\Delta$  に対する正規扇とし, それのユニモジュラーな細分  $\mathcal{F}'$  をとる.  $X_{\mathcal{F}'}$  を  $\mathcal{F}'$  に関する  $\mathbb{C}$  上のトーリック多様体とする.  $V_q \subset X_{\mathcal{F}'}$  を  $f_q$  によって定められる  $X_{\mathcal{F}'}$  内のトーリック超曲面として考える.

### 4 一次元の場合のモノドロミー

超曲面が一次元の場合 ( $n = 1$ ) に限って主結果を紹介する. [5] では, 一般の次元  $n$  でのモノドロミー変換についても述べている.  $\{\rho_i\}_{i=1, \dots, d}$  を  $V(\text{trop}(f))$  の有界な辺全体の集合とする. 各辺  $\rho_i$  には, 次のようにしてその長さ  $L_i \in \mathbb{R}^{>0}$  を定義することができる.  $\nu_{i1}, \nu_{i2} \in \mathbb{R}^{n+1}$  を  $\rho_i$  の端点とし, 原始的なベクトル  $V_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$  を用いて  $\nu_{i1} - \nu_{i2} = l_i V_i (l_i \in \mathbb{R}^{>0})$  と書けるとする. このとき,  $\rho_i$  の長さを  $L_i := l_i$  と定義する. また,  $C_i (i = 1, \dots, d)$  を各  $\rho_i$  に対応する  $V_{q=R}$  上の単純閉曲線とし,  $T_i: V_{q=R} \rightarrow V_{q=R}$  を  $C_i$  に沿った Dehn 振りとする.

**Theorem 4.1.** ([5, Corollary 1.1.])  $n = 1$  の場合,  $\{V_q\}_{q \in S_R^1}$  のモノドロミー変換は,  $T_1^{L_1} \circ \dots \circ T_d^{L_d}$  によって与えられる.

これは, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会の岩尾氏による企画特別講演 [2] において, 予想として述べられている.

## 5 具体例

再び (2.8) の例を考える. このとき,

$$f_q(x_1, x_2) = x_2^2 + x_2(x_1^3 + q^2 x_1^2 + q^2 x_1 + q^1) + 1. \quad (5.1)$$

図 5 に示すように,  $\rho_i (i = 1 \dots 7)$  を  $V(\text{trop}(F))$  の辺とし,  $C_i$  を  $\rho_i$  に対応する  $V_{q=R}$  上の単純閉曲線とする. 左の図の背景にある格子は,  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  を示す.

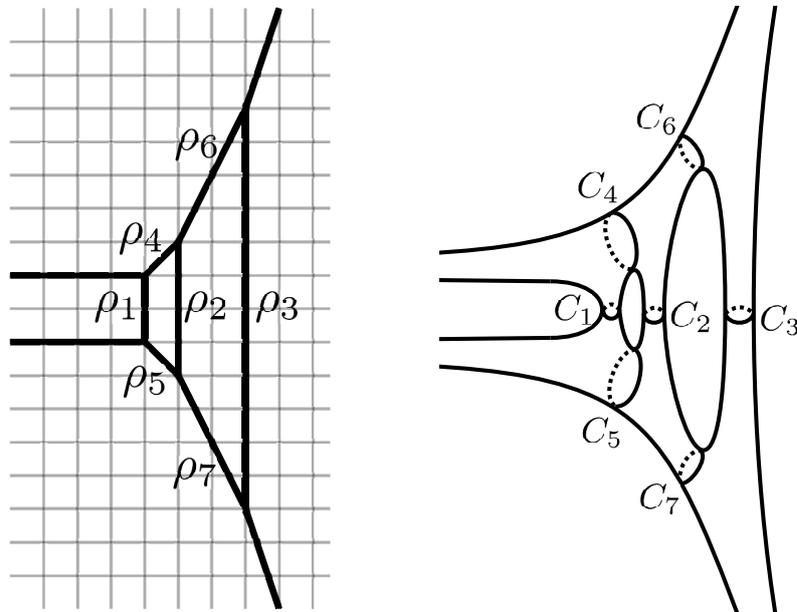


図 5.1: (2.8) の場合のトロピカル超曲面  $V(\text{trop}(f))$  とトーリック超曲面  $V_q$

各  $\rho_i$  の長さ  $L_i$  は, その辺の上にある格子の数を数えることで,

$$L_1 = 2, \quad L_2 = 4, \quad L_3 = 12, \quad L_4 = L_5 = 1, \quad L_6 = L_7 = 2 \quad (5.2)$$

とわかり, Theorem 4.1 から  $\{V\}_{q \in S_R^1}$  のモノドロミー変換が

$$T_1^2 \circ T_2^4 \circ T_3^{12} \circ T_4 \circ T_5 \circ T_6^2 \circ T_7^2 \quad (5.3)$$

によって与えられることが分かる.

## 参考文献

- [1] I. Itenberg, L. Khazarkov, G. Mikhalkin, and I. Zharkov. *Tropical homology*, In preparation.
- [2] 岩尾慎介, 複素積分 vs トロピカル積分, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会企画特別講演, <http://mathsoc.jp/videos/2010shuuki.html>, 2010.
- [3] Grigory Mikhalkin, *Decomposition into pairs-of-pants for complex algebraic hypersurfaces*, *Topology* **43** (2004), no. 5, 1035-1065.
- [4] Hans Rullgård, *Polynomial amoebas and convexity*, Preprint, Stockholm University, 2001.
- [5] Yuto Yamamoto, *Geometric monodromy around the tropical limit*, arXiv:1509.00175.