

第12回城崎新人セミナー

Kinosaki Freshman Seminar

報告集 編

城崎総合支所 2階 城崎市民センター大会議室

平成27年2月16日 - 2月20日

はじめに

城崎新人セミナーは、第1回から第10回までは京都大学 GCOE 「数学のトップリーダーの育成 — コア研究の深化と新領域の開拓」における事業の一環として、また今年度は第11回と同様に、先生方の科学研究費の援助を受け、第12回目を迎えることができました。本セミナーは、数学の様々な分野を専門としている大学院生および研究者が分野の垣根を越えて議論や交流を行うことにより視野を広げ、研究を発展させることを目的としてきました。

第12回目を迎えた本セミナーは、招待講演者5名の先生方を含め、計44名の参加のもと、2015年2月16日から2月20日までの期間に行われました。招待講演者の加藤毅先生（京都大学）、蒲谷祐一先生（京都大学）、岸本展先生（京都大学）、田中視英子先生（東京理科大学）、野坂武史先生（九州大学）には、それぞれの専門分野について、初歩的な所から最先端に至るまでを丁寧に説明して頂き、また参加者全員にも、自身の結果について、講演またはポスター発表をして頂きました。我々運営委員の配慮が至らない場面も多々ございましたが、分野の垣根を越えた交流という当セミナーの目的も概ね達成され、有意義なセミナーにすることができたと感じております。

また、本セミナーで例年お世話になっているつたや旅館さんにも色々とお助け頂きました。特に、つたや旅館の川口さんにはこの上ない程に協力して下さいました。川口さんの協力なしでは滞りなくセミナーを開催することはできなかつたと感じております。この場を借りて、深謝の意を表したいと思います。

当セミナーの参加者がこれを機に互いにより交流を深め、日本の数学の発展に寄与していくことを切に願っております。

第12回城崎新人セミナー運営委員長	宇田 智紀
同運営委員	跡部 発
	石川 勲
	佐野 めぐみ
	望月 厚志
	森 亜貴

目次

1 一般講演

3次元双曲幾何学について	4
蒲谷 祐一 (京都大学)	
Some topics on nonlinear dispersive equations on the torus	9
岸本 展 (京都大学)	
非線形固有値問題に関連した (p, q) -ラプラス方程式の正值解の存在と非存在について	14
田中 視英子 (東京理科大学)	
低次元トポロジーに現れる双線型形式	19
野坂 武史 (九州大学)	

2 一般講演

定磁場中の原子の Born-Oppenheimer 近似	29
蘆田 聡平	
合同関係で記述される算術代数系の分類	34
井澤 昇平	
絶対値べき乗型非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式の解のライフスパンについて	41
成亥 隆恭	
素数の彩色に向けて	46
植木 潤	
特性曲線有限要素法の理論と応用	51
内海 晋弥	
p 進数の分類について	56
大音 智弘	
Derived categories and generalized complexes	61
小川 泰朗	
Eisenstein 級数の定数項と合同加群について	66
小澤 友美	
1次元定常輸送方程式の解の正則性解析	71
川越 大輔	
Heavy subsets and non-contractible trajectories	76
川崎 盛通	
無限ブレイド群の交換子部分群上の共役不変ノルム	81
木村 満晃	
Euler- α 方程式における点渦力学とエンストロフィー変動	86
後藤田 剛	
Hardy inequality with remainder terms in a limiting case	91
佐野 めぐみ	
混合 Frobenius 多様体と混合 trTLEP 構造	96
社本 陽太	

Quasitoric でない toric manifold の例	101
須山 雄介	
有限多重ゼータ値と有限多重ポリログ	106
関 真一郎	
FHT 同型とその自然性	111
高田 土満	
主対角和モデルに関するトーリック環の性質について	116
武田 裕康	
Ehrhart 多項式の係数における best possible な下限	121
土谷 昭善	
曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式	125
成瀬 透	
遅延微分方程式とある超越方程式の根について	130
西口 純矢	
Universal covering space of the Hilbert scheme of n points of Enriques surface	135
Hayasi Taro	
On the descent of modular Calabi-Yau varieties arising from the Cynk-Hulek construction	140
平川 義之輔	
重複 Wiener-Itô 積分について	145
星野 浄生	
Critical cell から離散 Novikov 理論を捕える	150
八木 義宗	
曲面上の階数 1 の層の特性サイクル	156
谷田川 友里	
Moment-angle complex について	161
矢野 達哉	
シンプレクティック商特異点のクレパント解消と Cox 環	166
山岸 亮	
Brezis-Kato の正則性定理の拡張	171
山口 晋	
非線形シュレディンガー方程式の定在波解の漸近安定性	174
山添 祥太郎	
Noether problem for some groups	179
横田 真秀	

3次元双曲幾何学について

蒲谷 祐一*

京都大学大学院理学研究科, 2015年2月

1 序

城崎の講演では3次元双曲多様体が具体的に構成できる事を中心に解説した。続いて多くの3次元多様体に双曲構造が入る事の理論的な背景, 双曲化定理 (Hyperbolization Theorem) について話し, 最後に有限被覆に関する1次のホモロジーの振る舞いについて最近の話題を紹介した。この報告集ではあまり解説できなかった後者2つと関連した話題について述べる。

2 3次元双曲多様体

2.1 双曲幾何から

上半空間を $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) \mid t > 0\}$ で定義する。計量を $(dx^2 + dy^2 + dt^2)/t^2$ で定めると, これは完備かつ断面曲率が -1 で一定である事がわかる。単連結でこのような性質を満たすリーマン多様体は等長を除いて一意である事が知られている。また \mathbb{H}^3 の向きを保つ等長変換群は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$ と同型である事がわかる。

以下, 多様体は向き付け可能な物のみを考える。完備かつ断面曲率が -1 で一定であるリーマン多様体を**双曲多様体**という。 M を3次元の双曲多様体とすると, その普遍被覆は単連結なので \mathbb{H}^3 と等長になる。よって離散部分群 $\Gamma < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ を用いて $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ と表される。ここで基本群 $\pi_1(M)$ は Γ と同型になる。

本稿では計量から定まる体積が有限となる物のみを扱うことにする。3次元の場合, この条件から双曲多様体は閉多様体か境界がトーラス ($S^1 \times S^1$) からなるコンパクト多様体の内部に同相である事がわかる。(境界のトーラスに対応したエンドは**カスプ**と呼ばれる。)以降, 3次元多様体と言えば, 向き付け可能, コンパクト, 境界はあるとすれば各成分がトーラスである物とする。そのような多様体の内部に双曲計量が入るとき, それも単に双曲多様体と言う事にする。

定理 (Mostow 剛性). 3次元双曲多様体 M_1, M_2 は, $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ なら等長。

よって双曲計量は存在すれば位相構造から一意に決まる。

*kabaya@math.kyoto-u.ac.jp, 本稿の作成に関し科研費 (課題番号: 23244005) の援助を感謝する。

2.2 双曲化定理

M を3次元多様体とする． M に埋め込まれた球面が必ず3次元球体の境界となる時 M は既約であるという． $\pi_1(M)$ の \mathbb{Z}^2 に同型な部分群が、必ず境界の基本群の部分群に共役となるなら、 M はアトロイダル¹ であるという．但し M はソリッドトーラス ($D^2 \times S^1$)、トーラスまたはクラインボトル上の区間バンドルではないとする．双曲多様体は既約、アトロイダル、基本群が無限である事がわかる．驚くべき事にこの逆が成り立つ．

定理 (双曲化定理). 既約、アトロイダルかつ基本群が無限である3次元多様体は双曲多様体である．

この定理はハーケン多様体の場合 (例えば境界付きの場合) に Thurston により示された [Thu] . 証明の過程で開発された概念や手法はクライン群論、タイヒミュラー空間論、曲面のトポロジー、3次元多様体論、結び目理論といった分野に大きな影響を与えた．一般の場合は Perelman による．

3 結び目の判定

円周 S^1 の3次元球面 S^3 への埋め込みのアイソトピー類を**結び目**という． S^1 の近傍を S^3 から取り除く事で、トーラスを境界とする3次元多様体が得られる．これを**結び目の補空間**という．これは前節で出てきたハーケン多様体になっている．ハーケン多様体に関して次の事実がある．

定理 ([Hak], [Hem], [Mat]).² 2つのハーケン多様体と同相であるか判定するアルゴリズムがある．

とくに2つの結び目が同じかどうか判定する事ができる．しかし、このアルゴリズムは非常に時間がかかる物なので現実的には実行不可能である．一方でいつでも判定できる保証はないが、うまくいけば非常に速く厳密に結び目が同じかどうか判定してくれる方法がある．城崎で紹介した SnapPy [CDW] である．これは Epstein-Penner [EP] による標準分割 (canonical decomposition, Euclidean decomposition) の理論に基づく．

3.1 SnapPy による判定

M を境界付き (カスプ付き) の3次元双曲多様体とする．このとき、双曲構造から標準分割という多面体分割が一意に定まる．Mostow 剛性と標準分割の一意性から、

2つの3次元双曲多様体と同相 \Rightarrow それらは等長 \Rightarrow それらの標準分割が組み合わせ的に同じ

が従う．逆に標準分割が同じならそれは同相を与えるので、標準分割の情報はカスプ付き双曲3次元多様体の完全な位相不変量と言える．多面体の面の貼り合わせ方は有限通りしかない事から、標準分割が組み合わせ的に同じかどうかは厳密に判定できる．よって与えられた2つの双曲3次元多様体の標準分割が分かれば、それらが同相かそうでないかが完全に判定できる．

SnapPy は標準分割を求める際に tilt と呼ばれる量 [Wee] を用いる．この tilt は数値計算で求めるので誤差があり得る．よって SnapPy の求めた標準分割が本当に標準分割かどうかは注意を要する．しかしそれが本当の標準分割でないとしても (さらに考えている多様体が双曲多様体でな

¹Homotopically atoroidal と言われる．埋め込まれたトーラス T^2 で $\pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(M)$ が単射なら、それは境界にアイソトピックであるとする定義 (geometrically atoroidal) もある．この定義だといくつかのザイフェルト多様体が除けないので定理の記述が変わってくる．

² この定理や他の様々な結果と合わせて幾何化定理から “与えられた2つの閉3次元多様体と同相かどうか判定するアルゴリズムの存在” が従う事を注意しておく．[BB+, §1.4] と [AFW] を参照．

かったとしても), 与えられた2つの多様体がこの多面体分割に関して組み合わせ的に同じなら, それらは厳密に同相であることになる.

もう一度注意しておくとして SnapPy が与えられた2つの3次元多様体と同相と答えを出したなら, それは途中の数値計算に誤差があるとなかろうとそれは厳密に正しい. 一方で SnapPy が同相でないと言ったからといって, 必ずしもそれが正しいとは限らない. 実際 SnapPy で数え上げたカスプ付き双曲多様体のリストで重複が見つかっている [Bur].

このようにいつでも同相かどうか判定できる保証はないのだが, 大抵の場合 SnapPy による判定はうまくいく. 同相でない事も別の議論を援用すれば厳密に証明できる事が多い. 例えば16交点以下の素な結び目のリスト(1,701,936個)の作成に成功している [HTW]. そもそも結び目の補空間が双曲多様体でない話が始まらないのだが, 双曲化定理によりほとんどの場合双曲多様体であることになる. これは特筆すべき点であると思う.

3.2 自明な結び目の判定

結び目の判定の特別な場合として, 与えられた結び目が自明かどうか判定する問題が考えられる. これに関して近年面白い研究が続いている. Kuperberg [Kup] の generalized Riemann hypothesis を仮定した “Knottedness is in NP” と, Lackenby [Lac] による自明なダイアグラムまでに必要な Reidemeister 移動の回数の上界(交点数の多項式で与えられる)である.

一方 SnapPy は結び目の補空間の基本群の表示を計算してくれるが, 自明な結び目の(複雑な)ダイアグラムを入力すると大体 \mathbb{Z} の自明な表示を返す. Dehn の補題により結び目が自明である事と補空間の基本群が \mathbb{Z} である事は同値なので, これで自明な結び目の判定が出来てしまう. これもいつでもうまくいく理論的な保証はないが, 非常に速く自明な結び目を判定してくれる.

4 1次ホモロジーの増大度

最近の3次元多様体論の事件として virtual Haken 予想 ([Thu] の問題 15~18 を含む) の解決がある. 関連した予想の形で言うとな次のようになる. 多様体 M の1次ベッチ数を $b_1(M) = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(M; \mathbb{Q})$ で定義する.

定理 (Agol [Ago]). M を閉双曲3次元多様体とする. このとき $b_1(M') > 0$ となる有限被覆 $M' \rightarrow M$ が存在する. さらに $b_1(M')$ がいくらでも大きな数になるような M' がとれる.

この予想の解決に前後して有限被覆を取った時の $b_1(M)$ や, より一般に $H_1(M; \mathbb{Z})$ の振る舞いについて様々な研究があった. この節でいくつかを紹介する. 以下閉多様体のみを考える.

M を閉双曲3次元多様体とする. M は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の離散部分群 Γ を用いて $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ と表される. このとき部分群の列 $\Gamma > \Gamma_1 > \Gamma_2 > \dots$ で

$$(1) [\Gamma : \Gamma_n] < \infty, \quad (2) \bigcap_{n \geq 1} \Gamma_n = \{1\}$$

を満たす物が存在する.(このような性質を満たす群 Γ を residually finite であると言う.) ここで $M_n = \Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3$ とすれば $M_n \rightarrow M$ は写像度が $[\Gamma : \Gamma_n]$ の被覆写像となる. よって M_n も閉双曲3次元多様体となる. Agol の定理から b_1 がいくらでも大きい有限被覆がとれるのだが, 一方で次のような例がある.

定理 ([BE], [CD]). (1), (2) を満たす部分群の列で全ての n について $b_1(M_n) = 0$ となる物が存在.

(1)のみを満たす部分群の列で $b_1(M_n) = 0$ を満たす物は [BBW] で見つけられていた。 $H_1(M_n; \mathbb{Z})$ は $\pi_1(M_n)$ のアーベル化に同型なので、 $b_1(M_n) = 0$ は $\pi_1(M_n) \cong \Gamma_n$ のアーベル化が有限である事と同値である事を注意しておく。

この問題は次のように幾何学的に定式化できる。 M をリーマン多様体、 R を正の実数とする。

$$\text{inj}_x(M) = \sup\{r \mid x \text{ での } r\text{-ball が埋め込み}\}, \quad \text{inj}(M) = \inf_{x \in M} \{\text{inj}_x(M)\}$$

$$\text{thin}_R(M) = \{x \in M \mid \text{inj}_x(M) < R\}$$

$\text{inj}(M)$ は単射半径、 $\text{thin}_R(M)$ は thin part と呼ばれる。ここで $\text{inj}(M) > R$ なら $\text{thin}_R(M) = \emptyset$ である事がわかる。 M が閉双曲3次元多様体の場合、 R が十分小さければ $\text{thin}_R(M)$ は短い閉測地線の近傍からなる事が知られている (Margulis の補題)。

問題 (Cooper (Kirby's list 3.58)). $b_1(M_n) = 0$ となる閉双曲3次元多様体の列 $\{M_n\}$ で $\text{inj}(M_n)$ がいくらでも大きくなる物が存在するか？

ここで M_n はある多様体の被覆から得られると特に仮定していない事を注意しておく。部分群の列が上の (2) をみたせば、任意の $R > 0$ に対し十分大きな n を取れば $\text{inj}(M_n) > R$ とできるので、定理 ([BE], [CD]) はこの問題に肯定的な解答を与える。 $b_1(M_n) = 0$ の条件を $H_1(M_n; \mathbb{Z}) = 0$ に替えると未解決であるらしいが [BD]、次の事が示されている。

定理 (Brock-Dunfield [BD]). 任意の $R > 0$ に対し、 $H_1(M_n; \mathbb{Z}) = 0$ となる双曲3次元多様体の列 $\{M_n\}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\text{thin}_R(M_n))}{\text{vol}(M_n)} = 0$ となる物が存在。

逆に閉3次元双曲多様体の列 $\{M_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\text{thin}_R(M_n))}{\text{vol}(M_n)} = 0$ を満たす時、 $\{M_n\}$ は \mathbb{H}^3 に Benjamini-Schramm 収束すると言う [AB+]。

定理 (ABGNRS [AB+]). 閉双曲3次元多様体の列 $\{M_n\}$ が \mathbb{H}^3 に Benjamini-Schramm-収束するなら $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(M_n)}{\text{vol}(M_n)} = 0$.

これらをもっと一般の Lie 群の cocompact lattice に関する定理で、対応する対称空間の L^2 -ベッチ数に収束する事を示している。

一方で $|H_1(M_n; \mathbb{Z})_{\text{tor}}|$ の増大度に関する研究もある [Le]。また数論の方でも最近、数論的離散部分群のホモロジーのトーションに興味を持たれているようである (例えば [CV], 約 250 ページ)。最後に良く耳にする予想を挙げておく。

予想 (Bergeron-Venkatesh [BV]). $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ を数論的部分群とする。有限指数部分群の列 $\Gamma > \Gamma_1 > \dots$ で $\bigcap_{n \geq 1} \Gamma_n = \{1\}$ を満たすものとする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |H_1(\Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3; \mathbb{Z})_{\text{tor}}|}{\text{vol}(\Gamma_n \backslash \mathbb{H}^3)} = \frac{1}{6\pi}$ 。

参考文献

- [AB+] M.Abert, N.Bergeron, I.Biringer, T.Gelander, N.Nikolov, J.Raimbault, and I. Samet, *On the growth of L^2 -invariants for sequences of lattices in Lie groups*, arXiv:1210.2961
- [Ago] I. Agol, *The virtual Haken conjecture*, with an appendix by Agol, Groves, and Manning, Doc. Math. 18 (2013), 1045-1087. arXiv:1204.2810

- [AFW] M. Aschenbrenner, S. Friedl, and H. Wilton, *Decision problems for 3-manifolds and their fundamental groups*, arXiv:1405.6274
- [BBW] M. Baker, M. Boileau, and S. Wang, *Towers of covers of hyperbolic 3-manifolds*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 32 (2001) 35-43.
- [BV] N. Bergeron and A. Venkatesh, *The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups*, J. Inst. Math. Jussieu 12 (2013), no. 2, 391-447. arXiv:1004.1083
- [BB+] L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot, and J. Porti, *Geometrisation of 3-Manifolds*, Tracts in Mathematics 13, European Mathematical Society 2010.
- [BE] N. Boston and J. Ellenberg, *Pro- p groups and towers of rational homology spheres*, Geom. Topol. 10 (2006), 331334. arXiv:0902.4567
- [BD] J. Brock and N. Dunfield, *Injectivity radii of hyperbolic integer homology 3-spheres*, Geometry & Topology 19 (2015), 497-523. arXiv:1304.0391
- [Bur] B. Burton, *A duplicate pair in the SnapPea census*, arXiv:1311.7615
- [CD] F. Calegari and N. Dunfield, *Automorphic forms and rational homology 3-spheres*, Geom. Topol. 10 (2006), 295-329. arXiv:math/0508271
- [CDW] M. Culler, N. Dunfield, and J. Weeks, *SnapPy*, <http://snappy.computop.org>
- [CV] F. Calegari and A. Venkatesh, *A torsion Jacquet-Langlands correspondence*, arXiv:1212.3847
- [EP] D. Epstein and R. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Differential Geom. 27 (1988), 67-80.
- [Hak] W. Haken, *Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten*, I. Math. Z. 80 (1962) 89-120.
- [Hem] G. Hemion, *On the classification of homeomorphisms of 2-manifolds and the classification of 3-manifolds*, Acta Math. 142 (1979), no. 1-2, 123-155.
- [HTW] J. Hoste, M. Thistlethwaite, and J. Weeks. *The first 1,701,936 knots*, The Mathematical Intelligencer 20(4) (1998), 33-48.
- [Kup] G. Kuperberg, *Knottedness is in NP, modulo GRH*, arXiv:1112.0845
- [Lac] M. Lackenby, *A polynomial upper bound on Reidemeister moves*, arXiv:1302.0180.
- [Le] T. Le, *Growth of homology torsion in finite coverings and hyperbolic volume*, arXiv:1412.7758
- [Mat] S. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, Springer, 2003.
- [Thu] W. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6-3 (1982), 357-381.
- [Wee] J. Weeks, *Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic 3-manifolds*, Topology Appl. 52-2 (1993), 127-149.

Some topics on nonlinear dispersive equations on the torus

岸本 展* (京都大学数理解析研究所, 2015年2月)

1. イントロ

本稿では時間発展を伴う非線形な偏微分方程式のなかで分散型と呼ばれるクラスのものに焦点を当て、初期値問題の一意可解性などについて考える。非線形分散型方程式の代表的なものとしては、量子力学や非線形光学等で現れる非線形 Schrödinger 方程式(略して NLS):

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u + |u|^2 u, & u = u(t, x) : [0, T] \times X^d \rightarrow \mathbb{C}, \\ u(0, \cdot) = \phi(\cdot), & \phi = \phi(x) : X^d \rightarrow \mathbb{C} \end{cases}$$

や、水深の浅い場所での波の伝播のモデルとされる KdV 方程式が挙げられる。ここで d は空間次元、 X^d は空間変数の動く領域を表し、本稿では X^d として Euclid 空間 \mathbb{R}^d または d 次元トーラス $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ を主に考える。矩形領域 $[0, a_1] \times [0, a_2] \times \cdots \times [0, a_d]$ で各変数について周期境界条件を課した初期値・境界値問題は、適当にスケール変換することによりトーラス上の初期値問題とみなせる。 $\Delta := \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$ は d 次元 Laplace 作用素を表し、 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_{x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}$ 等と略記する。

このような設定では Fourier 解析により具体的な計算ができるので多くの研究がなされている。とりわけトーラス上の問題は数値シミュレーションの観点からも重要な意味を持つだけでなく、Fourier 変換すると離散変数 (Fourier 級数) となり計算がしやすい。その反面、トーラスのようにコンパクトな空間では分散型方程式の特性である“分散性による平滑化効果”が制限されるため、一般に全空間 \mathbb{R}^d 上の問題とは異なる様相を呈する。特に、その解析において(初等)整数論あるいは組合せ論分野の事実を援用する必要が自然に生じる点は全空間の場合と大きく異なる。

本稿では、著者が今までに出会った偏微分方程式の解析における数論的な側面についていくつか紹介したい。数論といっても著者が理解できる程度の初等的なものであり、使う事実のほとんどは [11] に載っている。保型形式や数論幾何など現代的な難しい理論は全く用いないが、これらが偏微分方程式の研究に役立つのであればそれはまた非常に興味深い。

さて、 $\mathbb{R}^d, \mathbb{T}^d$ 上の問題は関数解析的手法によりある程度統一的に扱うことができる。例として NLS: $\partial_t u = i\Delta u + |u|^2 u$ で空間領域が 1 次元トーラス (円周) の場合を考える。 $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n(t) e^{inx}$, $\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}_n e^{inx}$ と Fourier 級数展開して代入し、 e^{inx} の係数を比較すると、

$$\partial_t \hat{u}_n(t) = -in^2 \hat{u}_n(t) + \sum_{n=k-l+m} \hat{u}_k(t) \overline{\hat{u}_l(t)} \hat{u}_m(t), \quad \hat{u}_n(0) = \hat{\phi}_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

という常微分方程式となる。なお、右辺の和は $k, l, m \in \mathbb{Z}$ で $n = k - l + m$ をみたすもの全体についての和を意味する。右辺第 2 項を外力項と見てこれを解くと、

$$\hat{u}_n(t) = e^{-in^2 t} \hat{\phi}_n + e^{-in^2 t} \int_0^t e^{in^2 t'} \sum_{n=k-l+m} \hat{u}_k(t') \overline{\hat{u}_l(t')} \hat{u}_m(t') dt' \quad (n \in \mathbb{Z})$$

という \hat{u} に関する積分方程式が得られる。これだけでは右辺にも未知関数 \hat{u} が含まれるが、右辺第 2 項を $N(\hat{u}, \hat{u}, \hat{u})_n(t)$ と書き、 $\hat{u}_n^{(1)}(t) := e^{-in^2 t} \hat{\phi}_n$,

$$\hat{u}_n^{(m)}(t) := \sum_{m_1+m_2+m_3=m} N(\hat{u}^{(m_1)}, \hat{u}^{(m_2)}, \hat{u}^{(m_3)})_n(t) \quad (m = 3, 5, 7, \dots)$$

*nobu@kurims.kyoto-u.ac.jp

とおくと，形式的には $\hat{u}(t) := \sum_m \hat{u}^{(m)}(t)$ が解となる (Picard の逐次近似法) .

あとはこの和が収束することを示せばよい . そのためには , $N(\hat{u}, \hat{u}, \hat{u})$ による非線形効果がそれほど大きくないことを確かめる必要があるから , 関数の大きさを測る枠組 (関数空間) を適切に設定し , それを用いて非線形項を制御するための評価式を示すことになる . なお , この論法による副産物として解の一意性・初期値に対する滑らかな依存性も得られることが多い . 解の一意存在及び初期値への連続依存性 ($+\alpha$) といった性質をまとめて初期値問題の適切性という .

関数空間としては以下のノルムで定義される Lebesgue 空間 L^p ($1 \leq p \leq \infty$) や Sobolev 空間 H^s ($s \in \mathbb{R}$) が典型例である . 周期関数 $u : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}_n e^{in \cdot x}$ の場合の定義を述べると ,

$$\|u\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}^d} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{if } p \neq \infty, \\ \text{ess. sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |u(x)| & \text{if } p = \infty, \end{cases} \quad \|u\|_{H^s} := \left(2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (1+|n|^2)^s |\hat{u}_n|^2 \right)^{1/2}.$$

ここで , Parseval の等式 $\|u\|_{L^2} = (2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\hat{u}_n|^2)^{1/2}$ より $L^2 = H^0$ である . また H^s において指数 s は関数の滑らかさを表しており , s が大きいほど H^s ノルムの値は大きく空間としては狭くなる .

これらのノルムを用いた非線形評価式は , 考える空間領域が全空間 \mathbb{R}^d の場合には , 分散型方程式の特性 (いわゆる分散評価式や局所平滑化評価式など) を用いて純粋に解析的手法で示されることが多い . これに対し , トーラス \mathbb{T}^d などのコンパクトな領域の場合は一般に分散性による平滑化が不十分で , 別のアイデアが必要となる . 特にトーラスの場合は数論的考察を用いた直接的な計算がしばしば有効となるのである . 以下の2つの節で NLS を例にとって説明する .

2. 非線形 Schrödinger 方程式と Strichartz 評価式

まず全空間 \mathbb{R}^d の場合を考える . $v(t, x)$ を線形 Schrödinger 方程式 $\partial_t v = i\Delta v$ の解とすると , Fourier 空間・物理空間における解の表示式から次の重要な L^2 保存則および分散評価式が従う :

$$\|v(t)\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} = \|v(0)\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \|v(t)\|_{L_x^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C|t|^{-d/2} \|v(0)\|_{L_x^1(\mathbb{R}^d)}.$$

この2つの式より , 解の全体量 (L^2 ノルム) は一定であるのに対しピークの高さ (L^∞ ノルム) は時間とともに低くなることからわかる . これは , 解の空間分布が時間とともに遠方へ分散して平らになっていくことを意味し , 分散型 (dispersive) という名前の由来となっている . 一方 , これらの (不) 等式から関数解析・実解析の手法を用いて次の Strichartz 評価式が示される : $w(t, x)$ を非斉次線形方程式 $\partial_t w = i\Delta w + F$ の解とすると , ある条件をみたす指数の組 (q, r) (admissible pair と呼ばれる) に対して

$$\|w\|_{L_t^q(\mathbb{R}; L_x^r(\mathbb{R}^d))} \leq C (\|w(0)\|_{L_x^2(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_t^{q/(q-1)}(\mathbb{R}; L_x^{r/(r-1)}(\mathbb{R}^d))}).$$

Strichartz 評価式は分散型方程式を特徴づける重要な帰結の一つであり , 現在も盛んに研究されている . 上記の \mathbb{R}^d 上の Schrödinger 方程式に対する評価は Strichartz[18], Ginibre-Velo[10], Yajima[21], Cazenave-Weissler[5], Keel-Tao[14] らによる .

Strichartz 評価式を用いて非線形方程式の初期値問題を解くことができる . 例えば \mathbb{R}^2 上の場合には $(q, r) = (4, 4)$ が admissible pair となり , 対応する L^4 -Strichartz 評価式と Hölder の不等式を組み合わせることで方程式の非線形効果を制御できて , 初期値 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対する適切性が示せる (Tsutsumi[20], Cazenave-Weissler[6]) . 一方で $s < 0$ に対して $H^s(\mathbb{R}^2)$ の初期値を考えると , NLS の初期値問題は連続な解写像をもたず , 従って非適切であることがわかっている (Christ et al.[7], Iwabuchi-Ogawa[13]) . つまり , 初期値空間として Sobolev 空間 H^s を考えた場合 , どれだけ小さい s に対して

適切性が成り立つか」という Low regularity problem の観点からは、 L^2 ($s = 0$) における結果が最良となる。

次に、NLS の初期値問題をトーラスのようなコンパクトな空間上で考えてみる。このとき、 L^2 保存則は同様に成立するものの、定数関数は常に線形方程式の L^1 に属する解となるから、 \mathbb{R}^d の場合のような分散評価式は成り立たないことがわかる。従って Strichartz 評価式を全空間の場合と同じように証明することはできず、実際 2 次元トーラス上の線形解に対する L^4 -Strichartz 評価式には反例が知られている (Takaoka-Tzvetkov[19])。

そこで、以下のような微分の損失がある 2 次元 L^4 -Strichartz 評価式を考える：

$$\|v\|_{L_t^4([0,1];L_x^4(M))} \leq C \|v(0)\|_{H^\sigma(M)} \quad (\dagger)$$

ここでは M は一般に、境界をもたないコンパクトな 2 次元 Riemann 多様体としておく。 v は M 上の線形 Schrödinger 方程式の解で、一般に $\sigma > 0$ である。微分の損失がない (右辺が L^2 の) 場合と区別してこれを「Strichartz 型評価式」と呼ぶことにする。

M が \mathbb{T}^2 の場合に $\sigma \leq 0$ では (\dagger) が成立しないことを述べたが、実は $\sigma > 0$ では成立する (Bourgain[1]) (証明の概略を次節で述べる。) 一般の M についても $\sigma > \frac{1}{4}$ で成立することがわかっており、また $\sigma < 0$ では反例があるが、与えられた多様体 M に対して (\dagger) が成り立つ σ の範囲を完全に決定することは非常に難しい。例えば球面 S^2 の場合でも、 (\dagger) は $\sigma > \frac{1}{8}$ で成立、 $\sigma < \frac{1}{8}$ で反例が知られているが、 $\sigma = \frac{1}{8}$ ではよくわかっていない。 S^2 や一般の M の場合については Burq-Gérard-Tzvetkov[3, 4] 等を参照。

一方、一般論により (\dagger) ($+\alpha$) から $H^{2\sigma}(M)$ における NLS の初期値問題の適切性が示せる ([4])。例えば \mathbb{T}^2 の場合には任意の $s > 0$ に対して初期値問題は $H^s(\mathbb{T}^2)$ で適切となる。 $s < 0$ では全空間と同じく非適切性を示せる ([8])。しかし $L^2(\mathbb{T}^2)$ における適切性は、 L^4 -Strichartz 評価式の破綻だけでは否定することもできず、肯定的な解決もまた非常に難しいように思える。この問題について、次の部分的結果を得た：

定理 1 (K.[15]) NLS on \mathbb{T}^2 に対して、十分滑らかな初期値 u_0 から (一意な) 解 u への写像は、 $L^2(\mathbb{T}^2)$ から $C([0, T]; L^2(\mathbb{T}^2))$ への、原点近傍で C^3 級であるような写像に連続に拡張することができない。

定理 1 の系として、「逐次近似法では $L^2(\mathbb{T}^2)$ における適切性を示せない」ことがわかる (全空間 \mathbb{R}^2 の場合には逐次近似で解けて、解写像 $L^2 \ni u_0 \mapsto u \in C(L^2)$ は原点近傍で C^∞ 級であった。) しかしながら、実際 $L^2(\mathbb{T}^2)$ で適切かどうかは全く未解決である。

3. \mathbb{T}^2 上の Strichartz 型評価式と格子点の数え上げ

\mathbb{T}^2 上の L^4 -Strichartz 型評価式: $\partial_t v = i\Delta v$, $\sigma > 0 \Rightarrow \|v\|_{L_{t,x}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{T}^2)} \leq C \|v(0)\|_{H^\sigma(\mathbb{T}^2)}$ の証明を概観する (詳細は [15] 参照)。実際には、ある $\tau \in (0, \sigma)$ があって、 $N = 1, 2, 4, 8, \dots$ に対し波数を $\mathbb{Z}_N^2 := \mathbb{Z}^2 \cap [-N, N]^2$ に制限した初期値 $v(0)$ をもつ線形解 $v(t)$ が $\|v\|_{L_{t,x}^4(\mathbb{T} \times \mathbb{T}^2)} \leq CN^\tau \|v(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$ をみたすことを示せば十分である。一方、初期値 $v(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N^2} a_n e^{in \cdot x}$ に対する線形解の具体的な表示 $v(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_N^2} a_n e^{in \cdot x - i|n|^2 t}$ に注意すれば、Parseval の等式と Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\|v\|_{L^4(\mathbb{T} \times \mathbb{T}^2)}^2 \leq C \|v(0)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}_{4N^2} \times \mathbb{Z}_{2N}^2} \#A(m,n)^{1/2},$$

$$A(m,n) := \{ (n', n'') \in (\mathbb{Z}_N^2)^2 \mid n' + n'' = n, -|n'|^2 - |n''|^2 = m \}$$

と評価でき、Strichartz 型評価式は $\#A(m,n)$ の評価に帰着される。さらに簡単な考察で

$$\begin{aligned} \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}_{4N^2} \times \mathbb{Z}_{2N}^2} \#A(m,n) &\leq \sup_{(m,n) \in \mathbb{Z}_{4N^2} \times \mathbb{Z}_{2N}^2} \#\{l \in \mathbb{Z}_{2N}^2 \mid |l - n|^2 = -2m - |n|^2\} \\ &\leq \sup_{0 \leq R \leq 16N^2} \#\{l \in \mathbb{Z}^2 \mid |l|^2 = R\} \end{aligned}$$

がわかり、この右辺を $CN^{4\tau}$ で評価できればよい。

このように、トーラス上の評価式の証明は、いくつかの(不)等式をみたく波数(格子点)の組がどのくらいあるかを評価するという組合せ論の問題にしばしば帰着される。今の場合、Strichartz 型評価式の証明は次の初等整数論の結果を適用して完結する：

$$\#\{l \in \mathbb{Z}^2 \mid |l|^2 = R\} = O(R^{1/\log \log R}) = O(R^\varepsilon) \text{ as } R \rightarrow \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

4. Irrational torus の場合

\mathbb{T}^2 のかわりに $\mathbb{T}_\gamma^2 := \mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\gamma\mathbb{Z})$, $0 < \gamma \notin \mathbb{Q}$ を考えると問題は一気に複雑化する。このような irrational torus を扱った研究は Bourgain[2] に始まり、最近になっている。いろいろな方程式を題材に増えつつある。前節とほぼ同様にして、この場合の L^4 -Strichartz 型評価式 (†) は次の不等式に帰着される：

$$\sup_{0 < R \leq cN^2} \#\{l \in \mathbb{Z}_\gamma^2 \mid R \leq |l|^2 < R+1\} \leq CN^{4\tau} \text{ for some } \tau < \sigma.$$

ここで $\mathbb{Z}_\gamma^2 := \mathbb{Z} \times \frac{1}{\gamma}\mathbb{Z}$ は \mathbb{T}_γ^2 に対応する波数格子である。 $\gamma = 1$ あるいは $\gamma \in \mathbb{Q}$ ならこの評価は $\tau > 0$ で正しいが、一般の無理数 γ では、上式が成り立つ τ の範囲として現在知られている最良のものは $\tau > \frac{131}{832}$ である (Huxley[12])。特に、 \mathbb{T}_γ^2 上の NLS の初期値問題は H^s , $s > \frac{131}{416}$ で成り立つ (Demirbas[9])。

しかし、 $s > \frac{131}{416}$ という下限が最良のものとはとても思えない。実際、これらの結果はすべての γ について等しく成り立つものであるが、 γ に応じて下限が変わる、特に無理数 γ がある意味で「有理数に近ければ」、下限も有理数の場合の $s > 0$ に近づくと考えるのは自然であろう。無理数の有理数からの「近さ」を測る尺度の一つとして Diophantus 条件があり、KdV 方程式のシステムに対する Oh[17] の結果のように実際にこの条件によって指数 s の下限が規定される例もあるので、Schrödinger 方程式の L^4 -Strichartz 型評価式についても関係しているのではないかと予想される。

今度は逆に、 L^4 -Strichartz 型評価式 (†) に反例があるかどうかを考えてみる。 $\sigma < 0$ の場合の反例は簡単であるが、 γ が無理数の場合には $\sigma \in [0, \frac{131}{832}]$ で成り立つかどうか未解決であった。これに対し、 γ がある程度「有理数に近ければ」有理数の場合と同様に $\sigma = 0$ で反例が存在することを示すことができた：

定理 2 (K.[15]) γ が次の条件 (*) をみたくとき、(†) は $\sigma = 0$ で成り立たない。また、定理 1 と同様の主張が成り立つ。

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p, q \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |p^2 - \gamma^2 q^2| < \varepsilon. \quad (*)$$

定理に現れる条件 (*) は無理数 γ の連分数展開と関係している。実際、無理数 γ の(分子が1の)連分数展開の分母に現れる自然数列を $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ とすると、(*) が成り立つことと $\{a_j\}$ が非有界であることは同値である。この特徴づけを用いると次が言える：(i) Lebesgue 測度に関してほとんどすべての $\gamma > 0$ は (*) をみたく。(ii) $\sqrt{2}$ や $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 等の2次の代数的無理数は $\{a_j\}$ のある部分より先が周期的になることが知られており、従って (*) をみたさない。(iii) 与えられた無理数 γ が (*) をみたくかどうか判定するのは一般には困難。例えば π の連分数展開では分母に 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, ... が現れ、この数列が有界かどうかはわかっていない。

5. 回転流体の方程式における非線形共鳴

最後に流体の運動の方程式で現れる問題を紹介する。本節の内容は T. Yoneda 氏との共同研究 [16] に基づいており、詳細は Yamada-Yoneda[22] および [16] を参照。

惑星の大気など、回転する3次元球体にはりついた非圧縮性流体(簡単のため非粘性とする)を考え、Coriolis 力を緯度の1次関数と仮定して接平面上の2次元流で近似(β -平面近似)し、さらに流れ関数を導入して渦度 $\omega(t)$ の時間発展を考えると、その Fourier 係数 $\hat{\omega}_n(t)$ のみたく方程式は

$$\partial_t \hat{\omega}_n(t) = i\beta \frac{n_1}{|n|^2} \hat{\omega}_n(t) + c \sum_{n=k+l} \frac{k_1 l_2 - k_2 l_1}{|l|^2} \hat{\omega}_k(t) \hat{\omega}_l(t)$$

となり，Coriolis 力に起因する右辺第 1 項により分散性が生じる．一般に分散型方程式の非線形相互作用においては，非線形部分の振動の波数が線形解の波数と一致する共鳴状態にある波数間の相互作用の寄与が大きいと考えられている．そこで，対応する線形方程式の平面波解 $\omega(t, x, y) = c \exp(i\beta \frac{n_1}{|n|^2} t) e^{i(n_1 x + n_2 y)}$ (Rossby 波) を考えると，波数 $k, l \in \mathbb{Z}^2$ に対する Rossby 波が共鳴状態となるための条件は以下で与えられる：

$$n = k + l, \quad \frac{n_1}{|n|^2} = \frac{k_1}{|k|^2} + \frac{l_1}{|l|^2}. \quad (b)$$

ところで，この方程式を数値的に解くと木星の表面の縞のような Zonal flow に似たパターンが現れることが知られている．このような解は東西方向には定数に近いことから，そのエネルギーの大部分が波数空間で縦軸の近く $n \sim (0, n_2)$ に集中していると考えられる．一方，共鳴状態 (b) となる波数 k, l が存在するような波数 n を再び数値計算によりプロットすると確かに横軸より縦軸の近くに多く分布しており，Rossby 波の非線形相互作用が Zonal flow を引き起こす要因の一つであることが示唆される．

そこで，このような「共鳴波数分布の非等方性」を理論的に証明することが意味を持つ．これは条件式 (b) が定める代数曲面上の格子点の分布を調べる問題であり，一般には非常に困難であろう．[16] では関係式が退化した特別な場合を考え，次を示した：

定理 3 $n_2 = 0$ となる (「非自明」な) 共鳴波数 $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ は存在しない．

References

- [1] J. Bourgain; *Geom. Funct. Anal.* **3** (1993), no. 2, 107–156.
- [2] J. Bourgain; *Ann. of Math. Stud.* **163** “Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations” (2007), 1–20.
- [3] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov; *Amer. J. Math.* **126** (2004), no. 3, 569–605.
- [4] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov; *Invent. Math.* **159** (2005), no. 1, 187–223.
- [5] T. Cazenave, F.B. Weissler; *Manuscripta Math.* **61** (1988), no. 4, 477–494.
- [6] T. Cazenave, F.B. Weissler; *Nonlinear Anal.* **14** (1990), no. 10, 807–836.
- [7] M. Christ, J. Colliander, T. Tao; preprint (2003). (arXiv:math/0311048)
- [8] M. Christ, J. Colliander, T. Tao; preprint (2003). (arXiv:math/0311227)
- [9] S. Demirbas; preprint (2013). (arXiv:1307.0051)
- [10] J. Ginibre, G. Velo; *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **2** (1985), no. 4, 309–327.
- [11] G.H. Hardy, E.M. Wright; *An introduction to the theory of numbers. Sixth edition*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [12] M.N. Huxley; *Proc. London Math. Soc.* (3) **87** (2003), no. 3, 591–609.
- [13] T. Iwabuchi, T. Ogawa; *Trans. Amer. Math. Soc.* **367** (2015), no. 4, 2613–2630.
- [14] M. Keel, T. Tao; *Amer. J. Math.* **120** (1998), no. 5, 955–980.
- [15] N. Kishimoto; *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), no. 8, 2649–2660.
- [16] N. Kishimoto, T. Yoneda; preprint (2014). (arXiv:1409.1031)
- [17] T. Oh; *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2009**, no. 18, 3516–3556.
- [18] M. Strichartz; *Duke Math. J.* **44** (1977), no. 3, 705–714.
- [19] H. Takaoka, N. Tzvetkov; *J. Funct. Anal.* **182** (2001), no. 2, 427–442.
- [20] Y. Tsutsumi; *Funkcial. Ekvac.* **30** (1987), no. 1, 115–125.
- [21] K. Yajima; *Comm. Math. Phys.* **110** (1987), no. 3, 415–426.
- [22] M. Yamada, T. Yoneda; *Phys. D* **245** (2013), 1–7.

非線形固有値問題に関連した (p, q) -ラプラス方程式の正値解の存在と非存在について

田中 視英子*

東京理科大学理学部第一部数学科, 2015年2月

1 序

本講演では (p, q) -Laplacian の固有値問題に付随した (正値) 解の存在と非存在について最近得られた結果について紹介する. 具体的には, 以下のような (p, q) -Laplace 方程式を考える:

$$(GEV; \alpha, \beta) \quad \begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \alpha|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで, $\Delta_r u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{r-2}\nabla u)$, $1 < q < p < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, Ω は \mathbb{R}^N 内の有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は C^2 級とする.

定義 1. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が $(GEV; \alpha, \beta)$ の解であるとは, 任意の $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ に対して

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^{q-2}\nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} (\alpha|u|^{p-2}u + \beta|u|^{q-2}u) \varphi \, dx$$

が成り立つこととする.

まず, $-\Delta_r$ ($1 < r < \infty$) の第一固有値について簡単に紹介する. 方程式

$$(WEV; r, \lambda) \quad \begin{cases} -\Delta_r u = \lambda m_r(x)|u|^{r-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

が非自明解 u (固有関数) をもつとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ は $-\Delta_r$ の重み m_r 付きの固有値であるという. また重みが付かないとき ($m_r \equiv 1$), すなわち, 方程式

$$(EV; r, \lambda) \quad \begin{cases} -\Delta_r u = \lambda|u|^{r-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

が非自明解 u (固有関数) をもつとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ は $-\Delta_r$ の固有値であると呼ばれる.

ここで $A_r(t) := |t|^{r-2}$ とおくと, $(EV; r, \lambda)$ は

$$-\operatorname{div}(A_r(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda A_r(u)u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

*tanaka@ma.kagu.tus.ac.jp

と書き換えることができる. さらに $A_{p,q}(t) := A_p(t) + A_q(t) = |t|^{p-2} + |t|^{q-2}$ とおくと, $\lambda = \alpha = \beta$ という特別の場合に方程式 $(GEV; \lambda, \lambda)$ は

$$-\operatorname{div}(A_{p,q}(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda A_{p,q}(u)u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega,$$

と書き換えることができ, 通常の固有値問題に現れる方程式と同じ形式を持つことがわかる. この意味で $(GEV; \alpha, \alpha)$ の非自明解を探すことは $-\Delta_p - \Delta_q$ の一般化された固有値を求めることと考えられる. また, 通常の $-\Delta_r$ の固有値は第一固有値 (最小の固有値) 以外には符号一定の固有関数を持たないことが知られている. この意味で $(GEV; \alpha, \alpha)$ の正値解を調べることは $-\Delta_p - \Delta_q$ の第一固有値のようなものを考察することに対応していると思われる.

最近, (p, q) -Laplace 方程式についての研究が活発に行われているが, 固有値問題に関する結果は少ない. Motreanu 氏との共同研究 ([3]) において以下の方程式の正値解の存在と非存在について扱った:

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \lambda(m_p(x)|u|^{p-2}u + m_q(x)|u|^{q-2}u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで $m_p, m_q \in L^\infty(\Omega)$ は $\{x \in \Omega : m_r(x) > 0\}$ ($r = p, q$) のルベーグ測度がゼロでない重みである. $m_p \equiv 0$ または $m_q \equiv 0$ の場合には [4] や [5] にて符号変化解についても考察されている. さらに, [2] では一次元で重み無しの場合に対して p, q と区間の長さ (の半分) L に応じて以下の方程式について, 少なくとも 5 種類の正値解の分岐図が現れることを示した:

$$\begin{cases} (|u'|^{p-2}u')' + (|u'|^{q-2}u')' + \lambda(|u|^{p-2}u + |u|^{q-2}u) = 0 & \text{in } (-L, L), \\ u(-L) = u(L) = 0. \end{cases}$$

2 レイリー商

よく知られているように, $-\Delta_r$ ($1 < r < \infty$) の第一固有値 $\lambda_1(r, m_r)$ (重み m_r 付き), $\lambda_1(r)$ (重みなし) は以下のレイリー商の下限 (最小値) として得られる.

$$\begin{aligned} \lambda_1(r, m_r) &:= \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^r dx}{\int_\Omega m_r |u|^r dx}; u \in W_0^{1,r}(\Omega), \int_\Omega m_r |u|^r dx > 0 \right\}, \\ \lambda_1(r) &:= \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^r dx}{\int_\Omega |u|^r dx}; u \in W_0^{1,r}(\Omega) \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

また, 上 の下限は正値解 $\varphi_r(m_r) \in C_0^1(\bar{\Omega})$ (重み付き), $\varphi_r \in C_0^1(\bar{\Omega})$ (重みなし) によって達成され, 定数倍を除いては一意的である (すなわち, 第一固有値は単純である).

一方, $-\Delta_p - \Delta_q$ のレイリー商の最小化については以下のような結果が得られている.

命題 2 ([3]).

$$\Phi(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |\nabla u|^q dx, \quad \Psi(u) := \frac{1}{p} \int_\Omega m_p |u|^p dx + \frac{1}{q} \int_\Omega m_q |u|^q dx$$

に対して

$$\underline{\lambda} := \inf \left\{ \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \Psi(u) > 0 \right\} \quad (3)$$

とおく. このとき,

$$\underline{\lambda} = \min\{\lambda_1(p, m_p), \lambda_1(q, m_q)\}$$

が成り立つ. さらに以下の (i) または (ii) が成り立つならば, (3) の下限は達成されない:

$$(i) \lambda_1(p, m_p) \neq \lambda_1(q, m_q); \quad (ii) \varphi_p(m_p) \neq t\varphi_q(m_q) \text{ for all } t > 0.$$

注意 3. 上の (i) と (ii) が共に成り立たない場合, すなわち

$$\lambda_1(p, m_p) = \lambda_1(q, m_q) \quad \text{かつ} \quad \exists t > 0 : \varphi_p(m_p) = t\varphi_q(m_q)$$

が成り立つことと, (3) の下限が達成されることは同値であることが分かる.

注意 4. 次元 $(N = 1)$ で重みなしの第一固有関数 φ_p, φ_q については [2] で $p \neq q$ ならば φ_p と φ_q は一次独立であることが示されている. 一方, 次元の場合でも重みが付いた場合を考えると第一固有関数 $\varphi_p(m_p)$ と $\varphi_q(m_q)$ が一次従属になるような場合がある ([1] を参照).

3 主結果

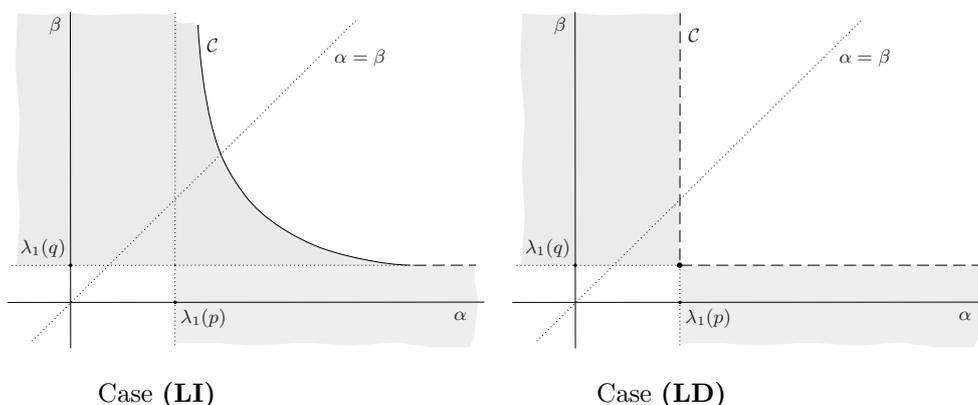
主結果を述べるために, 場合分けをする:

$$(i) \lambda_1(p) \text{ と } \lambda_1(q) \text{ は異なる固有空間を持つ, すなわち (LI) } \quad \forall k \neq 0 : \varphi_p \neq k\varphi_q;$$

$$(ii) \lambda_1(p) \text{ と } \lambda_1(q) \text{ は同じ固有空間を持つ, すなわち (LD) } \quad \exists k \in \mathbb{R} : \varphi_p = k\varphi_q.$$

ここでは, 主結果を簡単に述べるだけにする (詳しくは [1] を参照).

主結果 連続な曲線 C が存在して, 斜線部に (α, β) が存在すれば $(GEV; \alpha, \beta)$ は正値解を持つが, それ以外の場合には正値解を持たない.



4 曲線 C の構成

曲線の構成は簡単に述べると, 傾き 1 の直線を固定することにより 1 パラメータ化し, 最後に直線を動かすことにより行われる. そこで, 傾き 1, α 切片が s の直線上で方程式 $(GEV; \lambda + s, \lambda)$ が正値解を持つような高さ λ の上限を $\lambda^*(s)$ とする. すなわち,

$$\lambda^*(s) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : (GEV; \lambda + s, \lambda) \text{ が正値解を持つ}\} \quad \text{for } s \in \mathbb{R}$$

と定義し, この $\lambda^*(s)$ を用いて曲線 \mathcal{C} を以下のように定義する:

$$\mathcal{C} := \{(\lambda^*(s) + s, \lambda^*(s)); s \in \mathbb{R}\}.$$

曲線 \mathcal{C} の特徴付けを行うために,

$$s^* := \lambda_1(p) - \lambda_1(q) \quad \text{and} \quad s_+^* := \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi_q|^p dx}{\int_{\Omega} |\varphi_q|^p dx} - \lambda_1(q)$$

と定義する. ここで, s^* は点 $(\lambda_1(p), \lambda_1(q))$ を通る直線の α 切片を表していることに注意する. また $s^* \leq s_+^*$ が常に成立して

$$s^* = s_+^* \iff (\mathbf{LD}) \text{ is satisfied}$$

という関係にあることもわかる ((2) と第一固有値の単純性).

命題 5 ([1]). $\lambda^*(s)$ は以下の性質を満たす:

- (i) $\lambda^*(s) < +\infty$ for all $s \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\lambda^*(s) + s \geq \lambda_1(p)$ and $\lambda^*(s) \geq \lambda_1(q)$ for all $s \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\lambda^*(s) = \lambda_1(q)$ for all $s \geq s_+^*$;
- (iv) $\lambda^*(s^*) + s^* > \lambda_1(p)$ and $\lambda^*(s^*) > \lambda_1(q) \iff (\mathbf{LI})$ is satisfied;
- (v) $\lambda^*(s)$ is continuous on \mathbb{R} ;
- (vi) $\lambda^*(s)$ is non-increasing and $\lambda^*(s) + s$ is non-decreasing on \mathbb{R} .

注意 6. (iii) と (vi) により, 曲線 \mathcal{C} (の右側) は少なくとも $s = s_+^*$ からは直線 $\beta = \lambda_1(q)$ と一致していることがわかる. 一方, 上の命題からは 曲線 \mathcal{C} (の左側) は直線 $\alpha = \lambda_1(p)$ とどこかで触れているかいないか分かっていないが, 次元のときの [2] の結果から, 直線 $\alpha = \lambda_1(p)$ と左側も触れている場合があることがわかる.

5 主結果の証明について

証明のポイントは

- 第一固有値の基本性質を使う
- 対応する汎関数の minimizer の存在を示す ($\alpha < \lambda_1(p)$, $\beta > \lambda_1(q)$ のとき)
- 対応する汎関数に峠の補題を適用する ($\alpha > \lambda_1(p)$, $\beta < \lambda_1(q)$ のとき)
- $-\Delta_p - \Delta_q$ に対する (generalized) Picone's type 不等式を作る
- **(LI)** の場合に $\lambda^*(s^*)$ が well-defined であることを示すために汎関数を Nehari 多様体に制限したものの minimizer の存在を示す (α 切片が s^* のときには, global minimizer の存在や mountain pass value の存在を示す方法ではうまくいかないため)

ことなどにより行われるが, 一番のポイントは super-, sub-solution method を用いて示される次の補題である.

補題 7. $\beta > \lambda_1(q)$ とし, $w \in C_0^1(\bar{\Omega})$ は $\partial w / \partial \nu < 0$ on $\partial\Omega$ (ν は外向き法線ベクトル) を満たし,

$$-\Delta_p w - \Delta_q w \geq \alpha |w|^{p-2} w + \beta |w|^{q-2} w \quad \text{in } \Omega \quad (\text{超関数の意味で})$$

が成り立つとする. このとき, $(GEV; \alpha, \beta)$ は正値解をもつ.

この補題 7 と $\lambda^*(s)$ の定義により, 各直線上で高さ λ が $\lambda_1(q) < \lambda < \lambda^*(s)$ である場合には, 方程式 $(GEV; \lambda + s, \lambda)$ は正値解を持つことがわかる. また, $\lambda^*(s) + s$ や $\lambda^*(s)$ の単調性についての証明もこの補題 7 を使えば簡単に示すことができる.

注意 8. 補題 7 は符号変化しない重みが付いた場合にも同様の結果が得られるので, [1] の結果は

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = \alpha m_p |u|^{p-2} u + \beta m_q |u|^{q-2} u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

で符号変化しない重み $m_p, m_q \geq 0$ の場合にも拡張できることがわかる.

参考文献

- [1] BOBKOV, V., AND TANAKA, M. On positive solutions for (p, q) -Laplace equations with two parameters. *to appear in Calc. Var. PDE.*
- [2] KAJIKIYA, R., TANAKA, M., AND TANAKA, S. Bifurcation of positive solutions for the one dimensional (p, q) -Laplace equation. *submitted.*
- [3] MOTREANU, D., AND TANAKA, M. On a positive solution for (p, q) -Laplace equation with indefinite weight. *To appear in Minimax Theory and its Applications.*
- [4] TANAKA, M. Generalized eigenvalue problems for (p, q) -Laplacian with indefinite weight. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 419, 2 (2014), 1181 – 1192.
- [5] TANAKA, M. Uniqueness of a positive solution and existence of a sign-changing solution for (p, q) -Laplace equation. *J. Nonlinear Funct. Anal.* 2014 (2014), 1–15.

低次元トポロジーに現れる双線型形式

野坂 武史 (Takefumi Nosaka)*

九州大学 数理学研究院, 2015 年 2 月

本稿では, 多様体論の研究において, 位相幾何学によるアプローチを紹介したい. とくに, (相対) カップ積に焦点をあて, そこから見える双線型形式について, 紹介する. また筆者の研究を紹介したい.

本論の前に, 用語を確定しておく. 多様体 X とは (実) 可微分多様体を指し, コンパクトで向付きとし, 境界はあってもいいとする. また n は多様体の次元とする. なお, 誠に恐縮であるが紙幅の都合のため, 幾何やトポロジーの (修士生的な) 基礎用語は参考文献 ([Bro, 服部, 田村] 等参照) に回した. なお本稿の記述は, 幾何や代数 (数論) 幾何分野の院生でも読めるように目指した.

1 復習: 多様体論での交叉形式とカップ積

本節では多様体論の分類問題の基本事項をざっと復習し (幾何専門の方は次節へ転読してよい), さらに「局所系のカップ積を何故に考えるか」を説明したい (下記の二つの問 (I)(II) 参照). ただし基礎概念として, 多様体や, (整数係数の) ホモロジー群などは仮定する ([Die, 服部, 田村] 参照).

手始めに, 交叉やカップ積のよく知られた歴史をざっと復習する. デュドネの歴史書 [Die, I 部 1 章] によれば, 100 年前にポアンカレが交叉形式を導入した理由は, 次式のポアンカレ双対を示す為にあったという: $\dim H_i(X; \mathbb{R}) = \dim H_{n-i}(X; \mathbb{R})$. つまりホモロジー上に 2 次形式を構成し, その非退化性から次元の一致を見出そうとした. しかし「交叉」の定義が曖昧なうえ, (Heegaard の指摘により) 証明が間違っていた. しかし証明方針を変更し, ポアンカレ自身は次の双対定理を示した (とされる):

$$\text{同型射 P.D.} : H_i(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(X, \partial X; \mathbb{Z}), \quad H_n(X, \partial X; \mathbb{Z}) \cong H^n(X, \partial X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

[Die, I 部 3 章] にある様に, その後数十年の歳月で, ホモロジー論は整備されていく. 交叉に関しては, コホモロジー環とカップ積 \smile の導入によって整理される (Čech や Whitney の仕事). 実際, 交叉形式とは, 次で定義される:

$$H_i(X; \mathbb{Z}) \times H_{n-i}(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad (x, y) \longmapsto \text{P.D.}^{-1}(\text{P.D.}(x) \smile \text{P.D.}(y)).$$

これはイメージ通りの交叉を体現し, 念願の非退化性も示された (この際, \mathbb{Z} の性質が大切. cf 定理 3.3).

多様体の同相類を調べるうえで, 交叉形式が何故大事かを以下 2 段落で大まかに述べよう. まず基本となる方針は, “モーリス関数による双対胞体分割” である ([田村, 5 章] 参照). それはおおよそ「(有向) 多様体を, 上からと下からとで双対的に分解する研究手法」と譬えられる事が出来る. する

*nosaka@math.kyushu-u.ac.jp

と上下がぶつかる中間地点に、本質的な情報が集中する。これを定量的に捉える為、双線型形式や“Whitehead 群”等を用いるという訳である。以上の方針は 70 年代で華々しく成功を収め (特に“ h -ボルディズム定理”や高次元 Poincaré 予想の証明; [田村, 7 章] 参照), そしてその後の (代数的) 手術理論の基本ともなっている。

この手術理論は, X の基本群がない場合 (つまり $\pi_1(X) = 0$) に, 至極満足いく解答を与えた. というのも, 交叉形式が多様体のクラスをよく分類し, 要するに「定数層のコホモロジーと特性類ぐらいを考えればよい」事となったからである. 大まかになるが, 有名な事実を列挙しておこう.

- $n \geq 5$ の時, Browder, Sullivan, Novikov, Wall らによる手術理論. 微分同相類 (或る有限個を除き) は交叉形式と特性類とトーションで決まる.
- $n = 4$ の場合 [Freedman-Quinn の仕事]. X の位相同相類は交叉形式と “Kirby-Seibenmann 類” によって決まる (基本道具は Casson ハンドルを用いる). 逆に, 任意の unimodular な \mathbb{Z} 上の対称双線型形式に対し, それを交叉形式をもつような 4 次元多様体を構成できる.¹
- $n = 3$ または 2 の場合. いわゆるポアンカレ予想の事で, 微分同相 $X \cong S^n$ となる.

しかし他方, X が $\pi_1(X) = 0$ でない場合は多くの困難があり極端に難解になる. まず h -ボルディズム定理は成立せず, Whitehead 群内のトーションを考えないといけない (所謂, s -ボルディズム定理). さらに, 局所系コホモロジー環構造がある場合, その双線型形式が \mathbb{L} -群 (\cong Whitehead 群の高次版) に障碍類として現れる. この様にホモトピー論が大変大切なのだが, いわんや有理ホモトピー型についても, Sullivan 極小モデルを研究する事は難しい ($\pi_1(X)$ が有限群の場合ですら). 研究しやすそうな高次元結び目に関しても (Ranicki の本 [R] 等を参照), 「分類」という完璧主義的な目標設定に混沌を垣間見てしまう.

混沌状態の場合, 研究方針や問いを弱めるのが妥当である. 幾らか方針はあると思うが, 自分の力量と現状数学の土俵へと誘い込むのが常套手段である. そこで本稿は次の自然な問題に注目したい:

- (I) どの様な局所系を取ると, 多様体の構造を反映したり, 面白い理論が出来るか?
- (II) どの多様体や設定ならば, 双線型形式を計算できるだろうか?

私見では, この問題意識は, 主題の (非安定に見えそうな) 3 次元多様体論にも有効だと考えている. 実際, 幾何化予想の解決から基本群の情報でいたい X の構造が解ってしまうのだが, やはり, $\pi_1(X)$ から何か情報や定量的な数を取り出さないといけない. それも, 既存の量 (複素体積や l^2 -ホモロジーなど) は一見ホモトピカルに感じる. 例えば, 局所係数の (コ) ホモロジー (業界用語で振れアレクサンダー加群という) がこの 10 年近く研究され, 3 次元多様体の性質をいくらか反映する事が解ってきた (概要 [FV, Hil] 等参照). この背後には, 課題「高次元の安定的な議論がどこまで低次元で有効か」が問われているのだろう (cf. [COT]). もちろん導来圏のように, 複体全体を up to 弱ホモトピー同値に調べる研究もあり, それはそれで三角構造的な方向は王道的でカッコよさそうだと思う. しかしそうはいつでも, 一つの対象を真剣に観察することも大切だろう.

そこで筆者は上記の問題意識に基づき, 研究を進めた. 局所系カップ積の汎用性を示す試みともいえる. ただ, 話が込み入るので, 以上を本稿の前置きにし, 次節に進めよう.

¹なお微分構造はエキゾチックな現象が多く, 謎も多い. 例えば, 或る位相多様体に加算無限個の微分構造が入ることが知られる. ゲージ理論からのアプローチが多い.

2 局所系の相対カップ積と、定理の紹介

前節ではカップ積の歴史を概説し、問題意識を二つ (I)(II) 述べた。本節から数式を交えながら、「局所系の相対カップ積」を解説し、筆者の定理を紹介する。なお、局所系の (コ) ホモロジー群については説明しないが (詳細は [服部, §6.1] にある)、「加群への右作用 $M \curvearrowright \pi_1(X)$ から定義される (コ) ホモロジー群」とだけ了承すればよい。

まず相対カップ積を説明する。定義自体は簡単で、その入出力は次の様にまとめられる。

相対カップ積の定義。群準同型 $f : \pi_1(X) \rightarrow G$ の不変量として。

入力 $M : A$ 上の右 G -加群, (ここで A は involution⁻ 付き可換環)
 $\psi : M^2 \rightarrow A$, A -双線型関数 s.t. $\psi(x \cdot g, y \cdot g) = \psi(x, y) \quad \forall g \in G, \forall x, y \in M$
 $\mu : 2k$ -サイクル. (これは $H_{2k}(X, \partial X; \mathbb{Z})$ の class と思える)。

出力 局所係数コホモロジー $H^1(X, \partial X; M)$ 上の双線型形式。厳密な定義は、次の合成射

$$\smile_{\psi} : H^k(X, \partial X; M)^{\otimes 2} \xrightarrow{\smile} H^{2k}(X, \partial X; M^{\otimes 2}) \xrightarrow{\bullet \cap \mu} M \otimes M \xrightarrow{\langle \psi, \bullet \rangle} A. \quad (1)$$

ここで (1) 内の 1 と 2 番目の射は、それぞれカップ積とキャップ積である (詳細は [服部] 参照)。この様に位相幾何の基本事項から定義される。非常に一般的な設定だが、実 2 次元の場合、次の様に重要なクラスを含む。

例 2.1 (Goldman リー代数 [Go]). X を種数 g の閉曲面 Σ_g とし、 $\mu \in H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ を基本類とする。また G を半単純な簡約 Lie 群とし、 M をそのリー環 \mathfrak{g} とすれば G が作用する (随伴表現という)。加えて $\psi : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ を Killing form とする (半単純性より非退化)。すると、上記の設定より、 \smile_{ψ} を得る。

今えた \smile_{ψ} は以下の様な幾何的解釈がある (詳細は [Go] を参照)。まず $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)$ を、平坦 G -束の同型類と同一視し、variety 構造を入れる。もし f が滑らかな点とすると、コホモロジー $H^1(\Sigma_g; \mathfrak{g})$ は、 f の接空間と同一視することが出来る。すると \smile_{ψ} はその variety の滑らかな開集合上にシンプレクティック構造を与える。これは、次をモーメント写像としたシンプレクティック商 $\mu^{-1}(0)//G$ とも譬えられる (細かい難点は省く):

$$\mu : \{ G\text{-束 } \Sigma_g \times G \rightarrow \Sigma_g \text{ の接続. } \} / \{ E \text{ の自己同型 } \} \rightarrow \Gamma^0(\Sigma_g, \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}), \quad A \mapsto A \text{ の曲率 } F_A.$$

さらに論文 [Go] では、この代数構造の普遍物が (ホモロジー的に交叉形式で) 構成されている。それは **Goldman リー代数** というもので、今でも色々な研究があり謎も多い。今後の理解の進展が求められるだろう。

だがそもそも、局所系相対コホモロジー上のカップ積は、定義からしてすこぶる思弁的で、定量的に計算不可能に思える。簡単そうな実 2 次元でも、上例の様に難しく造詣が深い。だから 3 次元対象物のカップ積は、しごく煩瑣になると思われ、今迄の研究や考察はほぼ皆無だった様である。

しかし筆者は次の定理の様に、計算法を与えた:

定理 2.2 (曖昧な陳述。詳細は [N2]). L を絡み目² とし、 $k=1$ で $X = S^3 \setminus L$ とする。上設定の入力物を任意にとってきたとき、その相対カップ積が “結び目の関式” から比較的簡単に計算できる。

²用語の復習。絡み目とは、有限非交和の円周から 3 次元球面 S^3 への滑らかな埋込である。つまり、 $L : S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \hookrightarrow S^3$ の事である。 S^1 の連結成分が 1 個の時、 L を結び目という。なお、 $S^3 \setminus L$ と書いたら、埋込んだ後に管状近傍をとった補空間を指す。また関式とは、或る射影 $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を通じて、横断的なはめ込み $p \circ L : S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ と、交差の上下情報をいう。

手前味増になるが、定理 2.2 の意義を 4 つ述べたい。まず、思弁的で等閑視されがちな相対カップ積が図式から計算可能になった点は刷新といえる。第二に、非常に一般的な入力設定であり、計算式が比較的鮮明なので、色々な方にでも使い易い(と思う)。第三に、境界 ∂X がトーラスであるため、相対コホモロジーが煩雑そうだが、その点きにしないでよい。第四に、この計算法を与える際、筆者の専門 “quandle” の議論を経由しているため、quandle の意義や評価を一新させるインパクトを持つ(と期待している)。

要するに、相対カップ積を単走的な研究を将来しても、この定理が実体的な具体性と安心感を保障してくれる訳である。筆者個人の期待として、定理 2.2 が相対カップ積に市民権を与える魁(さきがけ)になってほしいものである。

3 古典的 Blanchfield ペアリング VS カップ積.

定理 2.2 を思い返すと、非常に一般的な入力設定である。だがアブストラクト砂漠に陥らない為にも、何か興味深い既存物を抽出しなければならない。そこで、本節では、最も簡単そうな $G = \mathbb{Z}$ の場合でも、古典版 Blanchfield 双対 [Bla] を復元する事を見る。この帰結的な示唆として、将来もし G や M に他の具体例を代入すれば、何か良い結果や展開を期待できるだろう。

さて本節は以下のように進めたい。目標は主定理 3.1 と 3.2 の陳述である。その為、節 3.1 でざっと復習し、節 3.2 でカップ積の関連を見る。

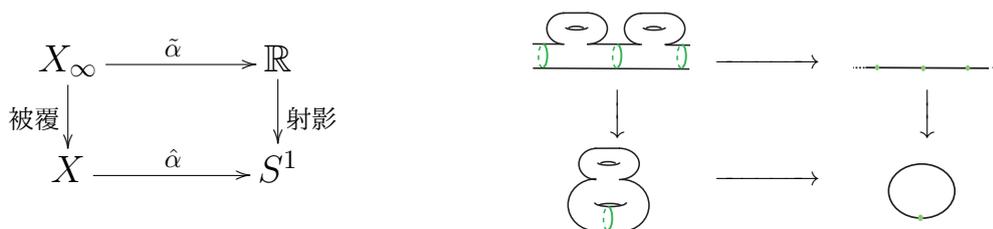
3.1 巡回被覆のミルナー双対定理と、局所系版への換言.

まず古典版 Blanchfield 双対をざっとのべる。それは、全射 $\alpha : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z} = \langle t^{\pm n} \rangle$ が与えられた時の双対定理であり、それも、3 つのバージョンがある [Ka]。3 つ存在する大雑把な理由は、係数 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ がクルル次元 2 なので、 $i \in \{0, 1, 2\}$ に対し Tor^i に値を持つよう出来るからである。但し、その定式化とアイデアの説明は [河内 2] 付録 B にある通り難儀である。そこで、本節は Tor^1 -版のみを位相的考察から説明する。

まず $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ より上記 α を、あるセル写像 $\hat{\alpha} : X \rightarrow S^1$ で代表させる。 M がコンパクトなので、 $\hat{\alpha}$ は(摂動して)モース関数としてよい。正則値 $x_0 \in S^1$ に対し、逆像 $\hat{\alpha}^{-1}(x_0) \subset X$ を Σ とおこう。超曲面 Σ も向付くので、 $\Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \subset X$ と管状近傍をとる。 $m \in \mathbb{Z}$ で添え字づけたコピーを考え、その添え字を右下につける。すると α に付随する巡回被覆空間 X_∞ は次の様に構成される:

$$X_\infty := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (X_m \setminus (\Sigma \times (-\epsilon_m, \epsilon_m))) / \sim, \quad \text{where } (x, -\epsilon_m) \sim (x, \epsilon_{m+1}), \quad \forall x \in \Sigma.$$

従って、 $\hat{\alpha}$ は $\tilde{\alpha} : X_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ に持ち上がり、次の可換図式を満たす。



すると双対定理は次の様に与えられる:

定理 3.1. 全ての i に対し, $H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})$ が有限次元と仮定する³. この時, 線形同型

$$\delta_c^* : H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \cong H_{\text{compact}}^{i+1}(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}),$$

があって, カップ積に関し等式 $\delta_c^*(x \smile y) = \delta_c^*(x) \smile y$ を満たす.

特に, (コンパクト台の Poincaré 双対定理より) 次の双線形写像は非退化である.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha : H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \times H^{n-1-i}(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{n-1}(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\bullet \cap [\Sigma]} \mathbb{Q}.$$

注. 有限次元の仮定について言及しておこう. まず被覆変換 $\tau : X_\infty \rightarrow X_\infty$ を考えると, $H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})$ を $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -加群とみなせる. すると, 有限次元性より単因子論から $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]/e_s$ に同型である, 但し $e_i \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. これは「Tor¹-版」とよばれる所以である. なお, **Alexander** 多項式 Δ とは, e_1, \dots, e_s の最小多項式として定義される. なおこの定理は \mathbb{Z} 係数への拡張は正しくなく, 特に X のファイバー性に関わる ([M, 節 3-4] 参照).

奇数次元のとき, \smile_ψ の形に換言できることをみる⁴. 遂行するにあたり, まずは [Neu, §11] の用語を復習する. $\mathbb{F}[[t]]_+$ を, 形式的 Laurent 冪級数 $\sum_{i \geq n} a_i t^i$ with some $a_i \in \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{Z}$ で構成される環とする. すると非零元 $x \in \mathbb{F}[[t]]_+ \setminus \{0\}$ は, その環 $\mathbb{F}[[t]]_+$ の中で可逆元である. だから, 商体からの自然な入射 $i_+ : \mathbb{F}(t) \hookrightarrow \mathbb{F}[[t]]_+$ を得る. そこで, $x \in \mathbb{F}(t)$ に対して, $\text{tr}(x)$ を $i_+(x)|_{t=0} - i_+(\bar{x})|_{t=0}$ によって定めよう, 但し, 記号 $|_{t=0}$ は t^0 -の係数を表す. すると, このトレース写像は well-defined な \mathbb{F} -線型写像を次のように誘導する:

$$\text{Tr} : \mathbb{F}[[t^{\pm 1}]]/(\Delta) \hookrightarrow \mathbb{F}(t)/\mathbb{F}[[t^{\pm 1}]] \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{F}; \quad x \mapsto [x/\Delta] \mapsto \text{tr}([x/\Delta]).$$

なお特別な場合として, Δ が既約多項式ならば, Tr は拡大体のトレースに一致する.

定理 3.2 ([Neu] が自明係数ホモロジー版, [N2] は局所系版).⁵ $H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})$ が有限次元と仮定する. さらに $A = M = \mathbb{Q}[[t^{\pm 1}]]/(\Delta)$ とし, $\psi_0 : M \otimes M \rightarrow \mathbb{Q}[[t^{\pm 1}]]/(\Delta_K)$ を $\psi_0(x, y) = \bar{x}y$ と定義する. このとき, 或る同型写像 Υ_Δ^* があって, 次の可換図式をみたと:

$$\begin{array}{ccc} H^k(X, \partial X; M)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\smile_\psi} & \mathbb{Q}[[t^{\pm 1}]]/\Delta \\ (\Upsilon_\Delta^*)^{\otimes 2} \downarrow \cong & & \downarrow \text{Tr} \\ H^k(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q})^{\otimes 2} & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha} & \mathbb{Q}. \end{array}$$

注. 逆に, [Neu, §11 の注] の様に, \smile_ψ は $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ から復元できる. 実際, $[a] = [i_+^{-1}(\sum_{j \geq 0} \text{Tr}(t^{-j}a) \cdot t^j)]$ が任意の $[a] \in \mathbb{F}(t)/\mathbb{F}[[t^{\pm 1}]]$ に対し成立する; よって, $[\mathcal{Q}_\psi(x, y)/\Delta] = [i_+^{-1}(\sum_{j \geq 0} \Upsilon_\Delta^*(\tau_*^{-j}x) \smile_{KL} \Upsilon_\Delta^*(y) \cdot t^j)]$ となる. 要するに, 我々の公式 \smile_ψ とミルナーのカップ積 \smile_{KL} は等価である.

³仮定を満たす典型例として, 結び目の補空間がある. 実際, 一般に, ホモロジーが S^1 のと同型, つまり $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H^*(S^1; \mathbb{Q})$ の場合には, この仮定を満たす (この証明は $X_\infty \rightarrow X$ の Wang 完全列を考えればよい). なお, 実はこの仮定は必要ではないが, [Neu] にある通り, 主張が複雑になる.

⁴Chern 類などの (1 次) 特性類を用いる方法は, 偶数次元の多様体に有用である (指数定理を思いおこそう). 他方で, 奇数次元の不変量を構成するには, 一段階上で考える必要がある. 二次特性類などがあげられる.

⁵講演中に「この定理はどこまで一般化できるか?」と質問を頂きました. 私の答え [N2] として, 閉三次元多様体で, 標数 0 上の線型表現の局所系への拡張があります.

3.2 カップ積から古典版 Blanchfield ペアリングへ

本節では古典版 Blanchfield ペアリング [Bla] を紹介したい. 前節ではミルナー双対定理は体上であったが, 本節は整数係数上への拡張と思えようになる (定理 3.3). 本稿では, 結び目 $K : S^{2k-1} \hookrightarrow S^{2k+1}$ に関し $X = S^{2k+1} \setminus K$ とおき, f をアーベル化 $\pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \mathbb{Z} =: G$ とした場合を考察する (というのも, この場合, 3つの双対定理のうち, Tor^1 -以外は 0 となり自明な事が知られているため).

古典版ペアリングとは, 巡回被覆空間 X_∞ のホモロジー群に入る非退化な双線型形式であった. その定義を手早く復習する. X_∞ の構成から $H_k(X_\infty; \mathbb{Z})$ は局所系ホモロジー群 $H_k(X; \Lambda)$ と同一視できる (所謂 “Shapiro の補題”). すると $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong H_1(X; \mathbb{Z})$ より, $H_k(X_\infty; \mathbb{Z})$ は振れ Λ -加群となる. その annihilate する最小多項式を $\Delta_K \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ とかき, **Alexander 多項式** と呼ぶ. すると, 定数層の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\Delta_K\text{-倍}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K \longrightarrow 0$$

が誘導する境界準同型 δ_* は, 同型 $H_{k+1}(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K) \cong H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を誘導する. そこで, 次の同型射たちの合成をえる:

$$H_k(X; \Lambda) \xrightarrow{\delta_*^{-1}} H_{k+1}(X; \Lambda/\Delta_K) \xrightarrow{\text{P.D.}} H^k(X, \partial X; \Lambda/\Delta_K) \longrightarrow H^k(X; \Lambda/\Delta_K) \rightarrow \text{Hom}(H_k(X; \Lambda), \Lambda/\Delta_K).$$

最後の写像は普遍係数定理に現れる同型射であり, 4番目ののは, 自然な写像の引き戻しである. まとめると, (古典的)**Blanchfield** ペアリングとは, この写像に随伴する, 双線型形式として定義される:

$$\text{Bl}_K : H_k(X_\infty; \mathbb{Z})^{\otimes 2} = H_k(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K.$$

この Bl_K は定義から非退化である. 特に, 対称性 $\overline{\Delta_K} = \Delta_K$ がわかる.

このペアリング Bl_K の性質を言及しよう. まず高次元結び目では強力な不変量であることが半世紀ほど前に示されている (詳細は [Hil, R] を参照).

- “Seifert 行列” という或る交差形式が解った場合, Bl_K は行列表示可能である.
- $k \geq 2$ に対し, 二つの結び目 K_1 と K_2 が単純とする (i.e., $\pi_2(X) \cong \cdots \cong \pi_{k-1}(X) \cong 0$). このとき, K_1 と K_2 がイソトピーで移りあう事と, Bl_{K_1} と Bl_{K_2} が同型である事は同値である.
- $k \geq 2$ に対し, 結び目のコボルディズム群が或る “Witt 群” に同型で, $\bigoplus^{\infty} \mathbb{Z} \oplus (\bigoplus^{\infty} \mathbb{Z}/2) \oplus (\bigoplus^{\infty} \mathbb{Z}/4)$ と同型である. これは Blanchfield ペアリングらで生成される.
- $k = 1$ に対し, Bl_{K_1} と Bl_{K_2} が同型である必要十分条件は, 二つの 1次元結び目 K_1, K_2 が “ダブル Δ 移動” で移りあう事である [NS].

しかしながら, 定義中に δ_*^{-1} を用いた為, いまいち腑に落ちない定義である. 計算公式はある程度あるものの, 計算例は少なかった. しかし, カップ積との関連や, 具体的な計算法は今まで成功していなかった (様である). そこで筆者は次の定理の様に, 綺麗な形でカップ積から復元することに成功した. 即ち

定理 3.3 ([N2]). $k = 1$ とし, Alexander 多項式を Δ_K とかく. さらに $M = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ とし, $\psi_0 : M \otimes M \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ を $\psi_0(x, y) = \bar{x}y$ と定義する.

この時, 同型 $H_1(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \cong H^1(X, \partial X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/\Delta_K)$ があって, 双線型形式として次式が成立:

$$a \smile_{\psi} b = \frac{1+t}{1-t} \cdot \text{Bl}_K(a \otimes b) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K),$$

帰結を二つ述べる. 第一に, この定理を \mathbb{Q} でテンソルする事で, 定理 3.1 内の δ_c^* は, 短完全系列の誘導した上記の δ_* で解釈できたことになった (ミルナーの論文 [M] にも示唆があったが, 非常に曖昧だった). 加えて, 図的計算法を与えた定理 2.2 を思い出すと $k=1$ の場合の定理 3.3 は Bl_K の計算法を与えたことになる.

3.3 定理 3.1 と 3.2 の証明概略.

定理 3.1 と 3.2 は, 主張自体が一見不思議に感じる. そのため証明を概略する (但し読み飛ばしてよい). 証明は Mayer-Vietoris の議論を基本とした初等的なものである.

証明 (定理 3.1 の証明. Milnor[M]): まず $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ に対し, 次のふたつのフィルターを定義する:

$$N_p^+ := \tilde{\alpha}^{-1}((-\infty, p + x_0)), \quad \text{and} \quad N_q^- := \tilde{\alpha}^{-1}((-q + x_0, \infty)).$$

そして, みつ組 $(X_\infty, \partial X_\infty \cup N_p^+, \partial X_\infty \cup N_q^-)$ による \mathbb{Q} -係数 Mayer-Vietoris 列を考えよう:

$$\rightarrow H^i(X_\infty, \partial X_\infty) \xrightarrow{\delta_c^*} H^{i+1}(X_\infty, \partial X_\infty \cup N_p^+ \cup N_q^-) \rightarrow \bigoplus_{\pm} H^{i+1}(X_\infty, \partial X_\infty \cup N_q^\pm) \rightarrow \quad (2)$$

定義より, $X_\infty \setminus (N_p^+ \cup N_q^-)$ はコンパクトで, $\cap_{p \in \mathbb{Z}} N_p^+ = \cap_{q \in \mathbb{Z}} N_q^- = \emptyset$ となる事に気づこう. すると $q \rightarrow -\infty$ で逆極限をとると, 完全列 (2) の中央は, 定義からして X_∞ のコンパクト台コホモロジーになる. ここで注意すべき事に, 境界準同型 δ_c^* を chain レベルでみれば, 次の合成と一致する:

$$H^i(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(\Sigma, \partial \Sigma; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{compact}}^{i+1}(X_\infty, \partial X_\infty; \mathbb{Q}), \quad (3)$$

ここで一番目の写像は入射の誘導射であり, 二番目のは Gysin 写像 (\cong 高次順像の一種) である. 従って, いわゆる射影公式は, 等式 $\delta_c^*(x \smile y) = \delta_c^*(x) \smile y$ を意味する.

最後に目標の δ_c^* の同型性を示そう. それには (2) の三項目に対応する $H_i(X_\infty, \partial X_\infty \cup N_q^\pm; \mathbb{Q})$ が 0 に収束する事を示せばよい. $H_i(X_\infty)$ は有限次元だから, その基底となる i -サイクルを選んでおく. すると十分小さな q に対して, そのサイクルは N_q^\pm に入る. 従って, 目標の 0 収束を示せた. \square

証明のスケッチ (定理 3.2): まず下記の可換図式を準備する. $\mathbb{F}[\mathbb{Z}]$ を, 形式的級数 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i$ with $a_i \in \mathbb{F}$ の成す $\mathbb{F}[t^{\pm 1}]$ -加群とする. さらに \pm に対し, $\mathbb{F}[\mathbb{Z}]_\pm := \{\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i \in \mathbb{F}[\mathbb{Z}] \mid a_{\pm k} = 0 \text{ for } k \text{ sufficiently small.}\}$ とし, 埋込み $\iota_\pm: \mathbb{F}((t)) \rightarrow \mathbb{F}[\mathbb{Z}]_\pm$ を $i_+(x)$ と $i_-(x)$ で定義する. すると差分 $\iota_+ - \iota_-$ は $q: \mathbb{F}((t))/\mathbb{F}[t^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{F}[\mathbb{Z}]$ を誘導する. ここで $\mathbb{F}[\mathbb{Z}]_+ \cap \mathbb{F}[\mathbb{Z}]_- = \mathbb{F}[t^{\pm 1}]$ に気づくと,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}[t^{\pm 1}] & \longrightarrow & \mathbb{F}((t)) & \longrightarrow & \mathbb{F}((t))/\mathbb{F}[t^{\pm 1}] \longrightarrow 0 & \text{(exact)} & (4) \\ & & \parallel & & \downarrow \iota_+ \oplus \iota_- & & \downarrow q & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}[t^{\pm 1}] & \xrightarrow{\mathfrak{s}} & \mathbb{F}[\mathbb{Z}]_+ \oplus \mathbb{F}[\mathbb{Z}]_- & \xrightarrow{\mathfrak{t}} & \mathbb{F}[\mathbb{Z}] & \longrightarrow & 0 & \text{(exact),} \end{array}$$

という定数層の可換図式を得る. ここで \mathfrak{s} と \mathfrak{t} は写像 $x \mapsto (x, -x)$ と $(x, y) \mapsto x + y$ で夫々定めた.

次に, 上記の δ_c^* を代数的に考察する. まず X の CW-複体構造を固定し, X_∞ にその持上げで CW-複体と思う. 特に, 被覆 $X_\infty \rightarrow X$ の各セル上での制限が同相である. するとセル複体 $C_*(X; \mathbb{Z})$ は, $C_*(X; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ と同一視される. 同様に, $C_*(\lim N_q^\pm; \mathbb{Z})$ は $C_*(X; \mathbb{F}[\mathbb{Z}]_\pm)$ に, コンパクト台の複体 $C_*^{\text{compact}}(X; \mathbb{Z})$ は $C_*(X; \mathbb{F}[\mathbb{Z}]_\pm)$ に同一視できる. そこで上記の底辺にある連結準同型を考えてみよう. 後は, 「その準同型の t^0 -係数が, 上記の δ_c^* と一致する」事を見ればよい. だが詳しい証明は少々面倒なので, 関心ある方は [Neu, §12] か [N2] を御覧下さい.

4 高次 Blanchfield ペアリングのお話

古典版のペアリングを前節で説明したが、本節では高次版を紹介したい。筆者の研究方針・戦略を先に述べておくと、「先程の定理らにより古典版をやりきったので、将来は、高次版もカップ積に換言し止揚したい」と目論見に基づいている。

高次 Blanchfield ペアリングとは、おおよそ「 $S^3 \setminus K$ の可解被覆空間上での Seifert 膜による交差形式」の事である。その高次版ペアリングは、Cochran-Orr-Teichner[COT] による次の有名な (有理的) 可解フィルターに役立った:

$$\cdots \subset \mathcal{F}_{(n.5)} \subset \mathcal{F}_{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{(1.5)} \subset \mathcal{F}_{(1)} \subset \mathcal{C}$$

ここで、 \mathcal{C} とは、大雑把には結び目のコボルディズム群で、位相的コンコルダンス群と呼ばれる (詳細は [河内 2] 参照)。このフィルターは \mathcal{C} に階層的な研究指針を提示した。但し、彼らの議論は具体的計算に程遠く、定量的な数に落とすには困難が伴う。未解明な事項が多く難しい。

高次版ペアリングを説明したいため、非可換環論の用語を準備する。 $\pi^{(0)} := \pi_1(S^3 \setminus K)$ とし、後は帰納的に $\pi^{(i+1)}$ を交換子群 $[\pi^{(0)}, \pi^{(i)}]$ で定義する。そして、群環 $\mathbb{Z}[\pi^{(0)}/\pi^{(n)}]$ を考える。可解性から、この非可換環は “Orr-domain” というものになる。特に商体が取れる。ここで、この群環を $\pi^{(1)}/\pi^{(n)} \setminus \{0\}$ で局所化した環を R_n とかこう。ここで、群環 $\mathbb{Z}[\pi^{(1)}/\pi^{(n)}]$ の商 (斜) 体を \mathbb{K}_n と書くとする、 R_n は (skew) 多項式環 $\mathbb{K}_n[\tau^{\pm 1}]$ に環同型である。特に R_n は PID (単項イデアル整域) になる。すると、可解商を通じて $\pi_1(S^3 \setminus K)$ が R_n に作用するので、 R_n を局所系と思える。すると、可解性 (もっと一般に PTFA 性) から、 Tor^i を評価する事ができ、次が示された:

命題 4.1 ([COT]). 局所系のホモロジー群 $H_*(S^3 \setminus K; R_n)$ は有限生成かつ捩れ加群である。

この最小の annihilator を $\Delta \in R_n$ とかき、 n -次 Alexander 多項式と呼ぶ。要点は Δ が非零な点である。すると、古典版と同様に次の同型が構成される:

定理 4.2 ([COT]). 次のエルミートな、右 R_n -加群同型が存在する

$$\text{Hom}(H_*(S^3 \setminus K; R_n), R_n/\Delta) \cong H_*(S^3 \setminus K; R_n).$$

ちなみに、この高次ペアリングは非可換環論の単因子論を用いて、研究できる ([Co] 参照)。

ただし、非可換の議論なので、このペアリングから良い数を取り出すには困難が伴い、工夫を要する (可解性の難しさ)。さらに、このペアリングからボルディズム不変量を上記 filter に沿って抽出するには、色々用語や条件を課さないといけなく難しい。例えば、ボルディズム不変量からの計算可能な量は、可解商の群環を完備化したフォンノイマン環による符号数 \mathbb{R} ぐらいである。そのため、この符号数も解析的で計算例はほぼ皆無であった。なお、上記の途中で局所化をとったが、商体を取らないで交差形式を記述しようとする、さらに内容が難しくなる ([COT] の後半を参照)。

そこで筆者は、高次 Blanchfield ペアリングを結び目図式から計算可能にするよう試んでいる。その基本方針は、相対カップ積への帰着である。実際、もしこの帰着が成功すれば、定理 2.2 から計算可能になる。研究の現段階では、上記のフィルター順に敢行し、 $n = 2$ における結果の一部をえた。[COT] の最終章で「 $n = 2$ の時、Casson-Gordon 符号数 [CG] という古典的量が高次ペアリングに含まれる」事が示されている。これに対し、

定理 4.3 (N.). “Casson-Gordon 符号数の差分” に関して、計算機にかけられる線形代数的で図的計算法を与えた。

しかし当符号数の定義が長い為、この結果も短くない (途中、Atiyah-Singer G -符号数定理や符号数の差分 [Neu] も使う)。近々論文が出る筈なので、詳細を知りたい方はそちらを御覧下さい。

A 定理 2.2 や本研究の応用例

講演後の質疑応答で「応用は？」とのご質問を受けたので、幾らか例示しようと思います。

例 A.1 (実 3 次元多様体における振れアレクサンダー多項式). まずは, X が閉 3 次元多様体で, 局所系が線形表現となる研究について言及する. 記号でかけば, G が $GL_n(\mathbb{F}[t^{\pm 1}])$ となり, M は $(\mathbb{F}[t^{\pm 1}])^n$ となる. この時, 局所系ホモロジー $H_1(X, \partial X; M)$ の order $\Delta \in \mathbb{F}[t^{\pm 1}]$ がよく研究され, 振れアレクサンダー多項式という. 詳細は, 概説 [FV, Hil] を参照の事. 例えば, X のファイバー性を detect したり, $S^1 \times X$ にシンプレクティック構造が入ることの必要十分条件も与えられている.

こういった業績とは一方で, そのホモロジー上への双線型形式を誰もうまく定式化してなかったようだ (水面下で問題であったようだが...). しかし, 筆者 [N2] は, X が絡み目補空間の場合に初めて成功した. ポイントは, ホモロジーからカップ積の帰着であったが, 詳細は省く.

例 A.2 (球面上 4 次元 Lefschetz 束の不変量). 球面上 4 次元 Lefschetz 束とは, 大まかに球面上の有限個の “Lefschetz 型特異点” を許した, ファイバー束の事である (松本幸夫氏により導入. 詳細は [Mat]). それは, 閉 4 次元多様体から 2 次元球面の写像で表される ($E \rightarrow S^2$ みたいに). この概念は楕円曲面のある種の一般化であって, $4=2+2$ 次元の調子で研究できる. 微分多様体やシンプレクティック多様体の例を作るのに役立ったりする.

しかし, 不変量は足りなかったようである. そこで論文 [N3] では, 次のような感じで不変量を作ってみた. まず Hopf 束 $p: S^3 \rightarrow S^2$ をおく. すると, p で Lefschetz 束を S^3 にひき戻すと, 特異点が S^3 内の絡み目 L に見える. なので「 $S^3 \setminus L$ のモノドロミーの不変量を, Lefschetz 束の不変量とみなそう」とした. 非常にナイーブな考えだけれども, 新しかったようである (学部の基本的内容なのに, 着目されていない現状は時にある. ですので, 学部の基礎学習と復習は大切と思います). 実際, 話がうまくいって, 新しく可算的に分類できた例を与えたりした.

例 A.3 (古典 Blanchfield ペアリングの計算). 定理 3.3 の成果を示す例として, トーラス結び目

$$X = S^3 \setminus T_{m,n} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1, z^m + w^n \neq 1\}$$

の Bl_K を, 筆者は 初めて 決定できた. ここで事実として, 等式 $\Delta_K = (t^{nm} - 1)(t - 1)/((t^n - 1)(t^m - 1))$ と Alexander 加群の形 $\mathbb{Z}[t]/(\Delta_K)$ を認めておこう⁶. ここで示したことは以下の様:

定理 A.4. $an + bm = 1$ となる整数 $(n, m, a, b) \in \mathbb{Z}^4$ を固定し, $K = T_{m,n}$ とする. この時, 等式

$$\text{Bl}_K(y_1, y_2) = \frac{nm}{(1+t^{-1})(1-t^{bm})(1-t^{an})} \cdot \bar{y}_1 y_2 \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K),$$

が成立する. ここで $y_1, y_2 \in H_1(S^3 \setminus T_{m,n}; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]) \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]/(\Delta_K)$ とした.

なお既存の計算法 ([Hil] 参照) で何故計算できなかったのか言及しておこう. その方法は “Seifert 曲面” に依拠したものだった為, 種数が高い ($K = T_{m,n}$ の場合 $(n-1)(m-1)/2$ が必要) と計算が難しかったと思われる. しかし定理 3.3 では Seifert 曲面が全く必要ないため, 定理 A.4 の証明は 1 頁内で納まるほど簡潔になった.

⁶計算法は [河内 2] を参照. なおトーラス結び目は簡単そうに見えて意外と難しい対象である. 例えば, 種数に関する有名なミルナー予想. 他に, 「 $\Delta_K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t^i \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ と展開すると, $a_i \in \{0, 1, -1\}$ となる」という数論的な定理は, Heegard Floer ホモロジーを用いた証明しかない.

参考文献

- [Bla] R. Blanchfield, *Intersection theory of manifolds with operators with applications to knot theory*, Ann. of Math. **65**: (1957) 340–356.
- [Bro] K. S. Brown, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **87**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [CG] A. J. Casson, C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots*, mimeographed notes (1975)
- [CJKLS] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [Co] T. D. Cochran, *Noncommutative knot theory*, Algebr. Geom. Topol. **4** (2004), 347–398.
- [CG] A. J. Casson, C. McA. Gordon, *Cobordism of classical knots*, mimeographed notes (1975)
- [COT] T. D. Cochran, K. Orr, P. Teichner, *Knot concordance, whitney towers and L_2 -signatures*, Ann. of Math. **157** (2003) 433–519.
- [Die] J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900–1960*, Birkhäuser Boston, 1988.
- [FV] S. Friedl, S. Vidussi, *A survey of twisted Alexander polynomials*, The mathematics of knots, 45–94, Contrib. Math. Comput. Sci., **1**, Springer, Heidelberg, 2011.
- [Go] W. Goldman, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. math. **85** (1986) 263–302.
- [Gu] S. Gukov, *Three-Dimensional Quantum Gravity, Chern-Simons Theory, and the A-Polynomial*, Commun. Math. Phys. **255** (2005), 577–627.
- [田村] 田村一郎, 微分位相幾何学, 岩波講座 基礎数学
- [服部] 服部晶夫, 位相幾何学, 岩波講座 基礎数学
- [Hil] J. Hillman, *Algebraic invariants of links*, 2-nd ed. Series on Knots and everything. **32** World Scientific (2002).
- [河内 1] 河内明夫 (編集), 結び目理論, シュプリンガー・フェアラーク東京.
- [河内 2] 河内明夫, 線形代数からホモロジーへ, 倍風館
- [Ka] A. Kawachi, *Three dualities on the integral homology of infinite cyclic coverings of manifolds*, Osaka J. Math. **23** (1986), 633–651.
- [Mat] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two – a topological approach*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces, ed. Sadayoshi Kojima et al., World Scientific (1996), 123–148.
- [NS] S. Naik, T. Stanford, *A move on diagrams that generates S -equivalence of knots*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003) 717–724.
- [Neu] W. Neumann, *Signature related invariants of manifolds-I. Monodromy and γ -invariants*, Topology **18** (1979), 147–172.
- [N1] T. Nosaka, *Quandle cocycles from invariant theory*, Advances in Mathematics, **245** (2013) 423–438.
- [N2] ———, *Relative cup products and twisted Blanchfield pairings of knots*, preprint
- [N3] ———, *Bilinear-form invariants of Lefschetz fibrations over the 2-sphere*, preprint
- [M] J. W. Milnor, *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Mass., (1968) 115–133.
- [R] A.A. Ranicki, *High-dimensional Knot Theory: Algebraic Surgery in Codimension 2*

定磁場中の原子の Born-Oppenheimer 近似

蘆田 聡平*

京都大学理学研究科, 2015 年 2 月

1 イントロダクション

定磁場中の N 個の電子と 1 つの原子核のハミルトニアンは次のように書ける。

$$\hat{P} = \frac{1}{2m}(D_{x_1} - e_1 A(x_1))^2 + \sum_{i=2}^{N+1} \frac{1}{2m_e}(D_{x_i} - eA(x_i))^2 + \sum_{i < j} V_{ij}(x_i - x_j) + \sum_{i=1}^{N+1} V_i(x_i). \quad (1.1)$$

ここで $x_1 \in \mathbb{R}^3$ と m はそれぞれ原子核の位置と質量を表し、 $x_j, j \geq 2$ と m_e はそれぞれ電子の位置と質量を表す。 V_{ij} と V_i は相互作用のポテンシャルと外部のポテンシャルを表す。 e_1 と e はそれぞれ原子核と電子の電荷を表す。 A はベクトルポテンシャルを表す。

Born-Oppenheimer 近似とは電子が原子核より軽いので原子核がゆっくり動く間に電子が素早く動き、断熱的に状態を変えていくというように基づく近似である。数学的には電子と原子核の質量の比を h^2 とおいて、 h を小さいパラメータとみなす。簡単のため、まず磁場のない場合を考える。この場合、いくつかの原子核と電子のハミルトニアンは

$$P(h) = -h^2 \Delta_x - \Delta_y + V(x, y),$$

のように書かれる。ここで x と y はそれぞれ原子核と電子の座標である。目的はシュレーディンガー方程式 $ih\partial_t \varphi = P(h)\varphi$ の解の $h \rightarrow 0$ での漸近的な挙動を調べることである。Born-Oppenheimer 近似の直観的な説明から電子が初期時刻において固定された原子核の配置に対して束縛状態にあれば、すなわち電子のハミルトニアン $P_e := -\Delta_y + V(x, y)$ の束縛状態にあれば、時間がたっても電子は P_e の束縛状態にあると考えられる。このことは電子の束縛状態に近い almost invariant subspace が存在することを示している。

almost invariant subspace は正射影を用いて表現される。もしある正射影 Π が $[P(h), \Pi] = \mathcal{O}(h^\infty)$ を満たしていれば、 $e^{-itP}\Pi = \Pi e^{-itP} + \mathcal{O}(h^\infty|t|)$ が成り立ち、 $\text{Ran}\Pi$ がほとんど不変であることがわかる。したがって、 P_e の離散スペクトルの部分集合に対応する正射影 Π_0 に対して、 $\Pi - \Pi_0 = \mathcal{O}(h)$ をみたすような Π が存在することが期待される。Nenciu [7] では帰納的公式により almost invariant subspace が構成された。Helffer-Sjöstrand [4] や Sjöstrand [8] は擬微分作用素を用いて almost invariant subspace を構成した。Born-Oppenheimer 近似ではエネルギーが大きくなると断熱的な分離が弱くなるので almost invariant subspace は存在しないように思われるが、Sordani [9] は任意のコンパクトな台を持つ cutoff function χ に対して、ある正射影 Π で $[P(h), \Pi]\chi(P) = \mathcal{O}(h^\infty)$ を満たすものを構成した。この正射影 Π を使って分子の時間発展 $e^{-itP/h}$ は原子核のみに関する

*ashida@math.kyoto-u.ac.jp

時間発展 $e^{-itG/\hbar}$ に帰着される。ここで G は原子核の座標に関する擬微分作用素の自己共役な行列である (Martinez-Sordoni [5, 6])。

f を原子核の一般化された coherent state として、 ψ を電子の束縛状態とすると、 $f(x)\psi(x, y) + \mathcal{O}(\hbar)$ という形の初期状態は Hagedorn によって扱われた (Hagedorn [3])。半古典極限において一般化された coherent state の時間発展は古典力学の軌道によって到達される点を中心とする一般化された coherent state に漸近展開される (Combescure-Robert [1])。[6] において Martinez と Sordoni はこの展開を適用して Hagedorn のような展開を得た。

電荷をもった粒子が定磁場中に存在するとき、磁場に垂直な方向の座標は古典力学のときと同様に有界な領域にとどまる。N 個の粒子が存在するとき、その質量中心を分離することができないので、粒子の運動を内部の運動と外部の運動に分離できない。それにもかかわらず $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ の部分空間 \mathcal{H}_{bound} が存在して、 \mathcal{H}_{bound} の状態は内部座標が有界領域にとどまり、粒子全体としては磁場を横切って無限遠へ移動していくことが知られている (Gérard-Laba [2])。これは古典力学的には反対の電荷をもつ粒子に働くローレンツ力は反対向きであり、粒子同士は相互作用しあっていることで起きていると考えられる。このことから一つの原子がある時、原子核の周りの電子が磁場の影響を打ち消すことが期待される。したがって G の中に原子核のベクトルポテンシャルは存在しないように思われる。磁場中での Born-Oppenheimer 近似は Martinez-Sordoni [6] によって取り扱われたが、その G の構成では $\hbar^2(D_x - eA(x))^2$ の項が残っていた。われわれの目的は \hat{P} をベクトルポテンシャルを持たない G に帰着させることである。

2 準備と主定理

磁場は第三軸に平行であると仮定する。したがってベクトルポテンシャルは次のように書ける。

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

ここで $b > 0$ は定数である。電子の質量を 1 として新しい座標系 $(x, y_2, \dots, y_{N+1}) = (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3N}$ を次のように定める。

$$x = \frac{1}{M} \left(mx_1 + \sum_{i=2}^{N+1} x_i \right), \quad M = m + N$$

$$y_i = x_i - x_1, \quad 2 \leq i \leq N + 1.$$

ここで M は全質量 x は質量中心の座標 y_i は電子の原子核に対する相対的な座標である。この座標系でハミルトニアンは

$$\tilde{P} = \hbar^2 D_x^2 - 2\hbar^2 e \sum_{i=2}^{N+1} A(y_i) D_x + \sum_{i=2}^{N+1} \tilde{L}_i(x)^2 + \hbar^2 \tilde{Q} + V(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 h^2 &= \frac{1}{M}, \\
 V(x, y) &= \sum_{i=2}^{N+1} V_{1i}(y_i) + \sum_{2 \leq i < j} V_{ij}(y_i - y_j) + V_1(x - h^2 f) + \sum_{i=2}^{N+1} V_i(x + y_i - h^2 f), \\
 \tilde{L}_i(x) &= D_{y_i} - eA(y_i + x), \\
 \tilde{Q} &= \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2, \\
 \tilde{Q}_1 &= \frac{1}{1 - Nh^2} \left(\sum_{i=2}^{N+1} \tilde{L}_i(x) \right)^2, \\
 \tilde{Q}_2 &= \frac{1}{1 - Nh^2} \left[2 \sum_{i=2}^{N+1} \tilde{L}_i(x) \left(\sum_{i=2}^{N+1} eA(y_i + h^2 f) \right) + \left(\sum_{i=2}^{N+1} eA(y_i + h^2 f) \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2 \sum_{i=2}^{N+1} e\tilde{L}_i(x)A(f) + h^2 e^2 A(f)^2.
 \end{aligned}$$

のようになる。さらにユニタリ変換 $\mathcal{V} := \exp\left(-ieA(x) \sum_{i=2}^{N+1} y_i\right)$ を適用して

$$\begin{aligned}
 P &= \mathcal{V} \tilde{P} \mathcal{V}^* \\
 &= h^2 D_x^2 - 4h^2 e \sum_{i=2}^{N+1} A(y_i) D_x + \sum_{i=2}^{N+1} L_i^2 + h^2 Q + V(x, y),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_i &= D_{y_i} - eA(y_i), \\
 Q &= Q_1 + Q_2, \\
 Q_1 &= \frac{1}{1 - Nh^2} \left(\sum_{i=2}^{N+1} L_i \right)^2, \\
 Q_2 &= \frac{1}{1 - Nh^2} \left[2 \sum_{i=2}^{N+1} L_i \left(\sum_{i=2}^{N+1} eA(y_i + h^2 f) \right) + \left(\sum_{i=2}^{N+1} eA(y_i + h^2 f) \right)^2 \right] \\
 &\quad + 2 \sum_{i=2}^{N+1} eL_i A(f) + 2h^2 e^2 A(f)^2.
 \end{aligned}$$

のようになる。

$$V_0(x, y) = \sum_{i=2}^{N+1} V_{1i}(y_i) + \sum_{2 \leq i < j} V_{ij}(y_i - y_j) + V_1(x) + \sum_{i=2}^{N+1} V_i(x + y_i).$$

のように書く。 $V_0(x, y)$ は h に関するポテンシャル $V(x, y)$ のテイラー展開の 0 次の項である。 $P_e(x) = \sum_{i=2}^{N+1} L_i^2 + V_0(x, y)$ を電子のハミルトニアンとする。次のような仮定を置く。

(H1) (i) V_{ij} は実数値関数で Δ -bounded で relative bound 1 である。

(ii) $V_i \in C^\infty$ は実数値関数であり、すべての $\alpha \in \mathbb{N}^3$ に対し定数 C_α が存在して

$$|\partial^\alpha V_i(r)| \leq C_\alpha$$

が成り立つ。

さらに次を仮定する。

(H2) スペクトル $\sigma(P_e(x))$ は交わりを持たない 2 つの部分 $\sigma_j(x)$, $j = 0, 1$ の和であり、 $\sigma_0(x)$ は $P_e(x)$ の離散スペクトルの部分集合で対応する $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ の部分空間は有限次元である定数 $d > 0$ が存在して、

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^3} \text{dist}(\sigma_0(x), \sigma_1(x)) \geq d$$

が成り立つ。

$\Pi_0(x)$ で $P_e(x)$ の σ_0 に対応するスペクトル射影を表す。以下も仮定する。

(H3) $\text{Ran}\Pi_0(x)$ は正規直行基底 $(u_1(x, y), \dots, u_k(x, y)) \in C^\infty(\mathbb{R}^3; L^2_y)$ で張られ、以下が成り立つ。

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}} |u_i(x, y)|^2 e^{2\alpha|y|} dy < C$$

ここで $C > 0$ と α は x に依存しない定数である。

以下が主定理である。

定理 2.1. (H1)-(H3) が成り立つと仮定する。そのとき、任意の $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対してある $L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)})$ の上の正射影 $\Pi(h)$ が存在して以下が成り立つ。

$$\|\Pi - \Pi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)})} = \mathcal{O}(h)$$

またすべての $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で $\chi\phi = \chi$ となるものに対して

$$\|\chi(P)[\Pi, P]\|_{L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)})} + \|[\Pi, P]\chi(P)\|_{L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)})} = \mathcal{O}(h^\infty)$$

が成り立つ。

定理 2.2. φ_0 は $\chi(P)\varphi_0 = \varphi_0$ をある $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ で $\chi\phi = \chi$ となるものに対して満たすとする。 φ を $ih\partial_t\varphi = P\varphi$ の初期値 φ_0 の解とする。そのとき

$$\varphi = e^{-itP_1/h}\Pi\varphi_0 + e^{-itP_2/h}(1 - \Pi)\varphi_0 + \mathcal{O}(|t|h^\infty\|\varphi_0\|), \quad (2.1)$$

が成り立つ。ここで $P_1 := \Pi P \Pi$ と $P_2 = (1 - \Pi)P(1 - \Pi)$ は定義域に $D(P)$ を含む自己共役作用素である。

定理 2.3. ある h -admissible operator

$$W : L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)}) \rightarrow (L^2(\mathbb{R}_x^3))^{\oplus k}$$

と k 行 k 列の $L^2(\mathbb{R}_x^3)$ の上の h -admissible operators の自己共役な行列 G が存在して以下が成り立つ。 W の $\text{Ran}\Pi$ への制限

$$U : \text{Ran}\Pi \rightarrow (L^2(\mathbb{R}_x^3))^{\oplus k}$$

はユニタリ作用素であり、

$$UP_1\Pi = GU\Pi,$$

を満たす。さらに $e^{-itP_1/h}\Pi = U^*e^{-itG/h}U\Pi$ が成り立つ。 G の表象 $g(x, \xi)$ は次のように書ける。

$$g(x, \xi) = \xi^2 I_k + \mu(x) + \sum_{i \geq 1} h^i g_i(x, \xi),$$

ここで $\mu(x)$ は $\Pi_0(x)P_e(x)$ の $(u_1(x), \dots, u_k(x))$ による行列である。 $g(x, \xi)$ はベクトルポテンシャルの項を含まない。

定理 2.4. $k = 1$ とする。 $\tilde{\varphi}_0 \in L^2(\mathbb{R}^{3(N+1)})$ を以下のようなものとする。

$$\tilde{\varphi}_0 = (\pi h)^{-3/4} \tilde{\Pi} \chi(\tilde{P}) (e^{ix\xi_0/h - (x-x_0)^2/2h} \tilde{u}_1(x)),$$

ここで $\tilde{\Pi} = \mathcal{V}^* \Pi \mathcal{V}$ であり、 $\chi = 1$ が $\xi_0^2 + \mu(x_0)$ の近傍で成り立つとする。このとき、ある $C > 0$ が存在して、任意の $J \geq 1$ に対して

$$e^{-it\tilde{P}/h} \tilde{\varphi}_0 = e^{i\delta_t/h} \sum_{\mu=0}^{3(J-1)} c_\mu(t; h) \phi_{\mu,t} \tilde{v}_\mu(x) + \mathcal{O}(h^{J/4}), \quad (2.2)$$

が成り立つ。ここで、

$$c_\mu(t; h) = \sum_{j=0}^{J_\mu} h^{j/2} c_{\mu,j}(t),$$

で $c_{\mu,j}$ はハミルトニアン of 古典軌道から定まる定数である。 $\delta_t := \int_0^t (\dot{x}_s \xi_s - g(x_s, \xi_s)) ds + (x_0 \xi_0 - x_t \xi_t)/2$, $\tilde{v}_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^3; L_y^2(\mathbb{R}^{3N}))$ 。この評価は $h > 0$ が十分小さく $t < C^{-1} \ln \frac{1}{h}$ が成り立つとき (t, h) に関して一様である。さらに h に関して最低次の項は $(\pi h)^{-3/4} (e^{ix\xi_t/h - (x-x_t)^2/2h} \tilde{u}_1(x))$ である。

参考文献

- [1] Combes, M., Robert, D.: Semiclassical spreading of quantum wave packets and applications near unstable fixed points of the classical flow. *Asymptotic Analysis* **14**, 377-404 (1997)
- [2] Gérard, C., Léautaud, I.: Multiparticle quantum scattering in constant magnetic fields. *Math. Surveys and Monographs* **90**, AMS, Providence, RI (2002)
- [3] Hagedorn, G.A.: High order corrections to the time-dependent Born-Oppenheimer approximation II: Coulomb systems. *Commun. Math. Phys.* **117**, 387-403 (1988)
- [4] Helffer, B., Sjöstrand, J.: Analyse semi-classique pour l'équation de Harper II. *Mem. Soc. Math. Fr.* **40**, 1-139 (1990)
- [5] Martinez, A., Sordani, V.: A general reduction scheme for the time-dependent Born-Oppenheimer approximation. *C. R. Acad. Sci. Paris.* **334**, 185-188 (2002)
- [6] Martinez, A., Sordani, V.: Twisted pseudodifferential calculus and application to the quantum evolution of molecules. *Memoirs of the AMS.* **936** (2009)
- [7] Nenciu, G.: Linear adiabatic theory. Exponential estimates. *Commun. Math. Phys.* **152**, 479-496 (1993)
- [8] Sjöstrand, J.: Projecteurs adiabatiques du point de vue pseudodifférentiel *C. R. Acad. Sci. Paris.* **317**, 217-220 (1993)
- [9] Sordani, V.: Reduction scheme for semiclassical operator-valued Schrödinger type equation and application to scattering. *Commun. Partial Differ. Equations.* **28**, 1221-1236 (2003)

合同関係で記述される算術代数系の分類

井澤 昇平*

東北大学大学院理学研究科数学専攻, 2015年2月

1 主結果

Universal Algebra (普遍代数学、一般代数系などと訳される) は代数系の一般的な性質を研究する数学の一分野である。本稿で言う代数系のもとになるイメージは、台集合と呼ばれる一つの集合にいくつかの演算を付加した構造のことである。

群や環、束といった(背景に何らかの動機があつて着目した)個々の代数系を考察する上では、集合と演算の対というとらえ方は極めて自然である。しかし代数系の構造についての一般的な研究を行なうという立場からすると、ちょっとした修正を行なった方が自然な場合がある。

例 1.1. $(B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ をブール束とする。このとき

$$\begin{aligned} a + b &:= (a \wedge b) \vee a \vee b \\ a \cdot b &:= a \wedge b \\ \neg a &:= a \end{aligned}$$

とおくと $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ は $x^2 = x$ をみたす可換環(ブール環)になる。逆に $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ をブール環とするとき、

$$\begin{aligned} a \vee b &:= a + b + (a \cdot b) \\ a \wedge b &:= a \cdot b \\ \neg a &:= 1 + a \end{aligned}$$

とおくと $(R, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$ はブール束となる。

よく知られたこの事実から、(代数構造としては)ブール束とブール環は本質的に同じものであると感じる人が多いであろう。

このような同一視を統一的行なおうとするのなら、その代表系としては“演算の合成”に閉じたものをとるのが自然なように思われる。そのような考えに基づき本稿では「代数系」を次のように定義する。

定義 1.2. 集合 A と A 上の演算の集合 $\text{Clo}(A)$ の対 $(A, \text{Clo}(A))$ で、次の条件をみたすものを 代数系 という。

1. 射影演算 $\pi_{n,i} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ は $\text{Clo}(A)$ に属する。
2. 合成に閉じている、すなわち $f, g_1, \dots, g_n \in \text{Clo}(A)$, $f : A^n \rightarrow A, g_i : A^m \rightarrow A$ なら $[(x_j) \mapsto f(g_i(x_j)_i)] \in \text{Clo}(A)$ となる。

*sa9m02@math.tohoku.ac.jp

以下では特に必要がない場合には簡単のため台集合を表す文字のみで代数系を表し、 $\text{Clo}_n(A)$ で代数系 A の n 項演算全体の集合を、 $\text{Clo}(A)$ で A の全ての項数の演算の全体の集合を表すことにする。また、このような場合 $\text{Clo}(A)$ に属するものを A の演算と言うことがある。

他の数学の諸分野と同様に、一般代数系でも研究対象である代数系を「何らかの良い形に分類を行なう」ということは重要な目標の一つである。分類の良さの基準の一つに、構造の似たものが一つのグループにまとまっていることが挙げられると思う。

被覆理論と呼ばれる一般代数系の下位分野は、構造の類似性を比較的良く反映する分類を目指すものの一つである。今回、第12回城崎新人セミナーでは被覆理論の概要と、その応用例としてタイトルにある代数系たちの分類結果について紹介した。

2 代数系の圏構造

与えられた二つの代数系に対し、それらの構造の類似の度合いを測る基準の一つに、それぞれの「生成する代数系のクラスの（演算を保存する写像を射とする）圏」が圏同値になるといふ条件を考えることができる。

圏構造の情報に加えて、各代数系に台集合を与える関手の情報を付加すると、代数系のクラスとしての構造を完全に決めることができることが知られている。その意味で圏構造は“代数系に依存しない情報を全て含んでいる”と標語敵にいうことができるのである。

このことを正確に述べると次のようになる。

定義 2.1. $(A, \text{Clo}(A))$ を代数系、 X を集合とする。 $\text{Clo}(A)$ の X への作用とは $\tau = (\tau_n : \text{Clo}_n(A) \rightarrow X^{X^n})_n$ で以下をみたすものをいう。

1. $\tau(\pi_{n,i}) = [(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i]$.
2. $\tau(f \circ (g_i)) = [(x_j)_{j \leq m} \mapsto \tau(f)(\tau(g_i)(x_j))]$.

(X, τ) を $\text{Clo}(A)$ 代数系（または誤解がない場合 A 代数系）という。 $\text{Clo}(A)$ 代数系の全体を $\mathcal{V}(A)$ と書く。また $\mathcal{V}(A)$ に属する代数系を対象とし、その間の演算を保存する写像を射とする圏を $\text{Cat}(\mathcal{V}(A))$ と書く。

定理 2.2. A, B を代数系とする。このとき次は同値である。

1. A と B は同型である、すなわち

$$\forall \mathbb{Z}_{\geq 0} \forall f \in \text{Clo}_n(A); [(b_1, \dots, b_n) \mapsto \varphi(f(\varphi^{-1}(b_1), \dots, \varphi^{-1}(b_n)))] \in \text{Clo}_n(B)$$

となる全単射 $\varphi : A \rightarrow B$ が存在する。

2. 次を可換にし、 $\varphi(A) = B$ となる圏同値 $\varphi : \text{Cat}(\mathcal{V}(A)) \rightarrow \text{Cat}(\mathcal{V}(B))$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} \text{Cat}(\mathcal{V}(A)) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Cat}(\mathcal{V}(B)) \\ & \searrow F & \swarrow F' \\ & \text{Set} & \end{array}$$

ここで $F : \mathcal{V}(A) \rightarrow \text{Set}$, $F' : \mathcal{V}(B) \rightarrow \text{Set}$ は台集合を対応させる忘却関手である。

3 被覆理論の概要

被覆理論の枠組みに関しては第9回の城崎新人セミナーにおける報告集において、既に解説を行なった [5] が、本稿のみでもある程度内容が分かるよう、最低限の解説を以下に述べる。

被覆理論とは

- べき等演算により代数系 A をより小さな代数系 U_1, \dots, U_n に“分解”する
- 代数系の族 $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ が与えられたときに、分解が \mathcal{U} に一致する代数系の分類を与える

という分解と合成を通じて代数系の性質を調べる手法である。この合成はさらに

- 行列積構成：与えられた代数系の族の直積集合に、各成分への“制限”が持つ演算はもとの代数系の演算に一致するような代数系の構成
- 圏同値変形：与えられた代数系と“生成する”代数系のクラスの圏構造を変えない代数系の構成

の二つの段階に分けることができる。そのため代数系の圏構造を壊さず、様々な代数的性質を捉えることができるのである。

以下、後に必要な定義と性質を天下りの的に列挙する。

定義 3.1. A を代数系とする。

1. $e \in \text{Clo}_1(A)$ が べき等的 であるとは $e(e(x)) = e(x)$ が全ての $x \in A$ に対して成り立つことをいう。
2. e が A のべき等演算のとき $e(A)$ を e による べき等縮約 という。ただし

$$\text{Clo}_m(e(A)) := \{f \mid f \in \text{Clo}_m(A), f(A^m) \subset e(A)\}$$

とする。

3. A のべき等縮約の集合 $\{U_1, \dots, U_n\}$ が A を 被覆する とは $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $t \in \text{Clo}_l(A)$, $s_1, \dots, s_l \in \text{Clo}_1(A)$, $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$ で

$$t(e_{i_1} s_1(x), \dots, e_{i_l} s_l(x)) = x \quad (\forall x \in A)$$

をみたすものが存在することをいう。

4. A のべき等縮約 U_1, \dots, U_l に対し、以下で定義される代数系を 行列積 と言い、 $U_1 \boxtimes \dots \boxtimes U_l$ と書く。
 - 台集合は直積集合 $\prod_{j \leq l} U_j$.
 - m 項演算は l 個の A の lm 項演算 t_k によって $((x_{ij})_{j \leq l})_{i \leq m} \mapsto (t_k(x_{ij})_{i,j})_k$ と書けるもの全体。

5. どんな A の被覆も A を含むとき、 A は 既約 であるという。
6. U_1 と U_2 を A の被覆とする。 U_1 が U_2 の細分であるとは任意の $U_1 \in U_1$ に対し $U_2 \supset U_1$ となる $U_2 \in U_2$ が存在することをいう。
7. A の被覆 \mathcal{U} が極小であるとは、 \mathcal{U} の真部分集合は A を被覆せず、 \mathcal{U} の任意の細分 \mathcal{U}' に対し、 \mathcal{U} が \mathcal{U}' の細分になっていることをいう。

台集合が有限な代数系に関しては最小な被覆の存在が保証される。

定理 3.2. A を有限代数系とする。このとき次が成り立つ。

1. A の極小被覆は存在し、そこに属する全てのべき等縮約は既約である。
2. $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ および $\mathcal{U}' = \{U'_1, \dots, U'_m\}$ を A の極小被覆とすると $n = m$ であり、 $\{1, \dots, n\}$ 上の置換 σ を適当にとると $U_i \simeq U'_{\sigma(i)}$ が全ての i について成り立つ。さらに $U_1 \boxtimes \dots \boxtimes U_n \simeq U'_1 \boxtimes \dots \boxtimes U'_n$ が成り立つ。

さらに有限代数系 A の極小被覆 $\{U_1, \dots, U_n\}$ の行列積 $U_1 \boxtimes \dots \boxtimes U_n$ の構造を A の標準化と言ひ、 $\text{Ess}(A)$ と書くことにする。このとき次が成り立つ。

定理 3.3. A を有限代数系とする。このとき $\text{Ess}(B) \simeq A$ となる有限代数系 B が存在するならば $A \simeq \text{Ess}(A)$ が成り立つ。特に全ての有限代数系に対して $\text{Ess}(\text{Ess}(A)) \simeq \text{Ess}(A)$ が成り立つ。

これらの事実に基づき、有限代数系の分類を次の3つの段階に分けることができる。

1. 既約代数系の分類をする。
2. 与えられた既約代数系の族に対し、その行列積として得られる標準代数系の分類をする。
3. 与えられた標準代数系に対し、標準化がそれと一致する代数系の分類をする。

また最後の段階に関しては該当する代数系を探す範囲を限定する基本的事実として次のことが知られている。

命題 3.4. 有限代数系 A に対し、十分大きな $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ をとれば $(\text{Ess}(A))^{\boxtimes n}$ には A と同型なべき等縮約が存在する。

また上で導入された諸概念と代数系の圏の構造との関連を示す基本的事実として次のことが挙げられる。次の事実はべき等縮約やその行列積を取る操作が関手になることを意味する。

命題 3.5. $(A, \text{Clo}(A))$ を代数系とし $e_1, \dots, e_n \in \text{Clo}_1(A)$ をべき等演算、 $X \in \mathcal{V}(A)$ とする。このとき次が成り立つ。

- e_i の X への作用はべき等の、すなわち $e_i(e_i(x)) = e_i(x)$ が全ての $x \in X$ に対して成り立つ。
- 直積集合 $e_1(X) \times \dots \times e_n(X)$ には自然に $e_1(A) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(A)$ 代数系の構造が入る。(これを $e_1(X) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(X)$ と書き $e_i(X)$ たちの行列積ということにする。)
- $\varphi: X \rightarrow Y$ が A 代数系の射のとき、次の写像写像 $\varphi': e_1(X) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(X) \rightarrow e_1(Y) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(Y)$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$$

は $e_1(A) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(A)$ 代数系の射となる。

- 上述の対応 $X \mapsto e_1(X) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(X)$ と $\varphi \mapsto \varphi'$ は $\text{Cat}(\mathcal{V}(A))$ から $\text{Cat}(\mathcal{V}(e_1(A) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(A)))$ への関手となる。

命題 3.6. A を代数系、 e_1, \dots, e_n を A のべき等演算とする。このとき $\{e_1(A), \dots, e_n(A)\}$ が A の被覆である必要十分条件は上述の関手 $\mathcal{V}(A) \rightarrow \mathcal{V}(e_1(A) \boxtimes \dots \boxtimes e_n(A))$ が圏同値であることである。

以上が被覆理論の枠組みの概要である。

台集合が有限な代数系に限ればべき等縮約の族への分解は具体的な記述が可能である（べき等縮約が有限個しかないため、個々の有限代数系に対しては原理的には極小被覆が求められる）。そのため、（特に）有限代数系の記述や性質の研究に有用であることが期待されるのである。

4 合同関係で記述される算術代数系の分類

発表の後半では既約な代数系の族が、全ての演算を持つ代数系（感覚的には生成する代数系のクラスが“最も単純な”構造をしている、ということと同値である）のみからなる場合についての考察結果を紹介した。そのような代数系は被覆理論の言葉とは独立な条件によっても特徴付けることができ、被覆理論とは独立な結果を導かれる。その結果を述べて本稿を終わりにしたいと思う。

4.1 Primal 代数系で被覆される代数系の代数的特徴付け

この小節では、分類を行なう代数系について、被覆理論の用語を用いない定式化と、被覆理論を用いた特徴付けを述べる。

定義 4.1. A を代数系とする。 $\alpha \subset A^2$ が次の条件をみたす A の同値関係であるとき、 α は A の合同関係であるという：任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $f \in \text{Clo}_n(A)$ および $a_i, b_i \in A$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) に対し

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \alpha \implies (f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)) \in \alpha.$$

(以下この条件を f は α と整合的であるという。)

A の合同関係の全体を $\text{Con}(A)$ と書く。

定義 4.2. 代数系 A が Arithmetical であるとは次の2条件が成り立つことをいう：

- $\text{Con}(A)$ は包含関係に関して分配束をなす。
- 任意の $\alpha, \beta \in \text{Con}(A)$ に対し、

$$\alpha \circ \beta := \{(a, c) \in A^2 \mid \exists b \in A; (a, b) \in \alpha, (b, c) \in \beta\}$$

は α と β の $\text{Con}(A)$ における上限 $\alpha \vee \beta$ と一致する。

定義 4.3. 有限代数系 A は

$$\text{Clo}_n(A) = \{f : A^n \rightarrow A \mid f \text{ は全ての } \text{Con}(A) \text{ の元と整合的}\}$$

となるとき congruence primal であるという。特に $\text{Con}(A) = \{\Delta_A, A^2\}$, $|A| \geq 2$ なる congruence primal 代数系を primal 代数系という。

定理 4.4. 有限代数系が arithmetical かつ congruence primal であるための必要十分条件は、極小被覆に属する全ての代数系が primal であることである。

4.2 Primal 代数系の行列積の分類

前節で述べたように、代数系の分類は標準代数系を分類する、それぞれの標準代数系に対して標準化がそれになる代数系を分類する、という手順を踏めばよい。本小節では Primal 代数系で被覆される標準代数系の分類を行なう。与えられた標準化を持つ代数系の記述は次節にて述べる。

記号 4.5. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

1. 次の条件をみたす $\{0, 1\}^n$ 上の clone C の全体を E_n と書く：

(a) 写像 $f_1, \dots, f_n : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}$ により

$$\left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_{11}, \dots, x_{1m}) \\ \vdots \\ f_n(x_{n1}, \dots, x_{nm}) \end{pmatrix}$$

と書かれる演算は C に属する。

(b) $(\{0, 1\}^n, C)$ の極小被覆は n 個の二点 primal 代数系からなる。

2. n 点集合 $\{1, \dots, n\}$ 上の順序関係 (反射律、反対称律、推移律をみたす二項関係) の全体を O_n と書く。

補足 4.6. $C \in E_n$ に対し、 $\{\{0\}^{i-1} \times \{0, 1\} \times \{0\}^{n-1} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ は $(\{0, 1\}^n, C)$ の極小被覆となる。

定理 4.7. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、対応 $\leq \mapsto C_{\leq}$ は O_n から E_n への全単射となる。ただし C_{\leq} は $\{0, 1\}^n$ 上の演算で、“第 i 成分の値は i より \leq に関して小さい成分のみで決まる”ものの全体である。より正確に言えば次の通り： P_i で $\{0, 1\}^n$ の第 i 成分の $\{0, 1\}$ を表すことにする。 $f : (\prod P_i)^m \rightarrow \prod P_i$ が C_{\leq} に属するのは (f_1, \dots, f_n) ($f_{i_0} : (\prod_{i \leq i_0} P_i)^m \rightarrow P_{i_0}$) によって次のように記述されるときである。

$$(f_1, \dots, f_n) : \left(\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_{ij})_{i \leq 1, j \in \{1, \dots, m\}} \\ \vdots \\ f_n(x_{ij})_{i \leq n, j \in \{1, \dots, m\}} \end{pmatrix}$$

4.3 与えられた標準化を持つ代数系の記述

本小節では $E_{\leq} := (\{0, 1\}^n, C_{\leq})$ を標準化とする代数系がどのようなものであるのかを記述する。命題 3.4 によつて、標準化が E_{\leq} に一致するものは E_{\leq} の行列べきのべき等縮約にしかないので、その範囲を調べればよい。

以下、 n, m は固定された正整数、 \leq は $\{1, \dots, n\}$ 上の順序関係、 P_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) は二点 primal 代数系、 $E_{\leq} = P_1 \boxtimes \dots \boxtimes P_n = (\{0, 1\}^n, C_{\leq})$ 、 $Q_i = P_i^{\boxtimes m}$ 、 $A = E_{\leq}^{\boxtimes m}$ とする。

A は自然に $Q_1 \boxtimes \dots \boxtimes Q_n$ と同一視することができる。

命題 4.8. $U \subset A$ が A のべき等縮約となるのは次が成り立つときである。

$$\forall a \in A \ [(\forall i \in I; \pi_{\leq i}(a) \in \pi_{\leq i}(U)) \Rightarrow a \in U].$$

ここで $\pi_{\leq i}$ は射影 $A \rightarrow \prod_{j \leq i} Q_j$ を表す。

定理 4.9. A のべき等縮約 U に対し、 $\text{Ess}(U) = E_{\leq}$ となるのは次が成り立つときである。

$$\forall i \in I \exists a \in \pi_{< i}(U); |\{x \in Q_i \mid (a, x) \in \pi_{\leq i}(U)\}| \geq 2.$$

ただし $\pi_{< i}$ は射影 $A \rightarrow \prod_{j < i} Q_j$ である。

この定理により、標準化が E_{\leq} となる代数系は全て具体的に記述することができる。また標準化が E_{\leq} となる代数系が二つ与えられたとき、それらが同型となる条件は次で与えられる。

定理 4.10. m_1, m_2 を正整数、 $A_i = E_{\leq}^{m_i}$ ($i = 1, 2$)、 U_i を A_i のべき等縮約とする。 U_1 と U_2 とが同型となるのは

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall a, b \in U_1 [\pi_{\leq i}(a) = \pi_{\leq i}(b) \Rightarrow \pi_{\leq i}(f(a)) = \pi_{\leq i}(f(b))]$$

をみたす全単射 $f : U_1 \rightarrow U_2$ が存在するときである。

これらの定理により、congruence primal arithmetical 代数系は具体的な記述ができるのである。

参考文献

- [1] László Zádori, Relational sets and categorical equivalence of algebras, Int. J. Algebra Comput. **7**, No.5(1997) 561-576
- [2] K. Denecke, O. Lüders. Categorical equivalence of varieties and invariant relations, Algebra Universalis 46(2001), 105-118.
- [3] Keith A. Kearnes. Tame Congruence Theory is a localization theory, Lecture Notes from “A Course in Tame Congruence Theory” Workshop, Budapest, 2001.
- [4] Mike Behrisch. Relational Tame Congruence Theory and subalgebra primal algebras. Master’s thesis, Dresden University of Technology, 2009.
- [5] 井澤昇平、代数系のべき等既約分解、第9回城崎新人セミナー報告集、2012、169-173
- [6] Shohei Izawa, Composition of matrix products and categorical equivalence, Algebra Universalis **69** (2013), 327-356.

絶対値べき乗型非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式の解のライフスパンについて

成亥 隆恭*

京都大学 理学研究科, 2015年2月

1 導入

本研究は, 京都大学理学研究科学振 PD の池田正弘氏との共同研究である. 次の非線形シュレディンガー方程式について考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \mu|u|^p, & (t, x) \in [0, T(\lambda)) \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = \lambda f(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

ここで, $u = u(t, x): [0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数で, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ とする. また $p > 1$ とし, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする. λ は正のパラメータで, 初期値の大きさを表し, $f = f(x)$ は与えられた複素数値関数で, 初期値の形状を表す.

まず, 解とそのライフスパンを定める.

定義 1.1 (L^2 -解とそのライフスパン). $u: [0, T) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ が (NLS) の L^2 -解であるとは, 以下の (1) と (2) が成り立つことをいう.

(1). u が関数空間 $C([0, T); L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L_t^{\frac{4(p+1)}{d(p-1)}}(0, T; L_x^{p+1}(\mathbb{R}^d))$ に属する.

(2). u が $u(0, x) = \lambda f(x)$ 及び積分方程式

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u(0, x) - i\mu \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} |u(t', x)|^p dt',$$

を満たす. ここで $e^{it\Delta} = \mathcal{F}^{-1} e^{it|\xi|^2} \mathcal{F}$ は自由シュレディンガー発展群を表す. (\mathcal{F} はフーリエ変換を表す.)

また L^2 -解のライフスパンを

$$T(\lambda) = T(\lambda, f) := \sup\{T \in (0, \infty]; [0, T) \text{ 上で (NLS) の } L^2\text{-解 } u \text{ が存在する.}\},$$

と定める.

時間局所的な L^2 -解の存在が, 堤氏 [4] および Cazenave–Weissler 氏ら [1] によって示された.

定理 1.1 ([4, 1]). $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. $1 < p \leq 1 + 4/d$ のとき, ある時刻 $T > 0$ が存在し, (NLS) の $[0, T)$ 上の L^2 -解 u が唯一存在する.

本研究の目的は, 局所的な解が時間大域的に存在する (つまり $T(\lambda) = \infty$) か, それとも有限時間で爆発する ($T(\lambda) < \infty$) かを調べ, 更に解が有限時間で爆発する場合にはその解のライフスパンが上からどのように評価されるかを調べることである.

*inui@math.kyoto-u.ac.jp

2 先行研究

次に (NLS) に関する先行研究について述べる. 今後, 簡単のため $\mu = 1$ の場合のみ考えることにする. $\mu \neq 1$ の場合にも同様の結果が得られる. [3] によって, $1 < p < 1 + 4/d$ の場合, L^2 ノルムがどんなに小さい初期値に対しても, 有限時間で爆発する L^2 -解の存在が知られている. またそのときのライフスパンの上からの評価も得られた. より正確には次の定理が知られている.

定理 2.1 ([3]). $1 < p < 1 + 4/d$, $\lambda > 0$ とする. $d/2 < k < 2/(p-1)$ とし, 初期形状 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ が次の条件を満たすとする.

$$-\operatorname{Im}f(x) \geq \begin{cases} 0, & |x| \leq 1, \\ |x|^{-k}, & |x| > 1. \end{cases} \quad (1)$$

このとき, 十分小さい λ に対して, L^2 -解のライフスパン $T(\lambda)$ は次の評価を満たす.

$$T(\lambda) \leq C\lambda^{-1/\kappa}.$$

ただし, C は λ に依らない正の定数で, $\kappa := 1/(p-1) - k/2$ である.

また Cazenave–Weissler 氏ら [1] により, $p = 1 + 4/d$ の場合には初期値の L^2 ノルムが小さい場合には局所 L^2 -解が大域解になることが知られている.

定理 2.2 ([1]). $p = 1 + 4/d$ 及び $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき十分小さい λ に対して, $T(\lambda) = \infty$ となる. 即ち局所 L^2 -解は大域的に存在する.

そこで, 以下の3つの未解決問題について考える.

問題 1. $1 < p < 1 + 4/d$ の場合, 初期値が大きい場合のライフスパンの上から評価はどうなるか?

問題 2. $p = 1 + 4/d$ の場合, 初期値が大きい場合にも L^2 -解が大域的に存在するか?

問題 3. $p > 1 + 4/d$ の場合, そもそも局所的な解が存在するか?

本研究により, この3つの問題に対して以下のような解答を得ることができた.

3 主結果

3.1 問題 1, 2 について

先ず, $1 < p \leq 1 + 4/d$ の場合を考える. この場合には, 以下のように, 初期値が大きい場合には, 有限時間で爆発する L^2 -解が存在することがわかった. またそのときのライフスパンの評価も得ることができた.

定理 3.1 ([2]). $1 < p \leq 1 + 4/d$ のとき, $k < d/2 (\leq 2/(p-1))$ を満たし, かつ, 初期形状 f が以下の条件を満たしているとする.

$$-\operatorname{Im}f(x) \geq \begin{cases} |x|^{-k}, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (2)$$

このとき, 十分大きい λ に対して, L^2 -解の最大存在時間 $T(\lambda)$ は次の評価を満たす.

$$T(\lambda) \leq C\lambda^{-1/\kappa}.$$

ここで, C は λ に依らない正の定数で, $\kappa = 1/(p-1) - k/2$ である. 特に解のノルムが有限時間で発散する.

3.2 問題 3 について

次に $p > 1 + 4/d$ の場合について考える. 以下のように弱い意味での解, 弱解を定める.

定義 3.1 (弱解). u が $[0, T)$ の (NLS) の弱解であるとは, 以下の (1) と (2) が成り立つことをいう.

(1). $u \in L^p_{loc}([0, T) \times \mathbb{R}^d)$.

(2). 任意の $\varphi \in C_0^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^d)$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\int_{[0, T) \times \mathbb{R}^d} u(-i\partial_t \varphi + \Delta \varphi) dx dt = i\lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(0, x) dx + \int_{[0, T) \times \mathbb{R}^d} |u|^p \varphi dx dt.$$

注意 3.1. $1 < p \leq 1 + 4/d$ の場合, (NLS) の L^2 -解は弱解になっている.

このとき, 次の定理が得られる.

定理 3.2 ([2]). $p > 1 + 4/d$ のとき, $2/(p-1) < k < d/2$ を満たし, かつ, 初期形状 f が (2) の条件を満たしているとする. このとき, 或る $T > 0$ と $[0, T)$ 上の弱解が存在したとすると, $\lambda = 0$ である.

これは $p > 1 + 4/d$ においては局所的な弱解が一般には存在しないことを意味している.

4 主結果の証明

テスト関数 $\eta = \eta(t) \in C_0^\infty([0, \infty))$ と $\phi = \phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $0 \leq \eta, \phi \leq 1$ かつ

$$\eta(t) := \begin{cases} 1 & (0 \leq t < 1/2), \\ 0 & (t \geq 1), \end{cases} \quad \phi(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq |x| < 1/2), \\ 0 & (|x| \geq 1), \end{cases}$$

を満たすように定める. また $\tau > 0$ に対して

$$\psi_\tau = \psi_\tau(t, x) := \eta_\tau(t)\phi_\tau(x) := \eta(t/\tau)\phi(x/\sqrt{\tau}),$$

と定める. 以下では原点中心, 半径 $r > 0$ の開球を $B(r) := \{x \in \mathbb{R}^d; |x| < r\}$ で表すことにする.

主結果の証明において, 次の補題が重要な役割を果たす.

補題 4.1. $l \in \mathbb{N}$ を $l \geq 2q + 1$ を満たすものとする. ただし $q := p/(p-1)$ (p のヘルダー共役指数) とする. また $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ とし, u を $[0, T)$ 上の (NLS) の弱解とする. このとき或る定数 $C = C(d, p, l) > 0$ が存在して, 任意の $\tau \in (0, T)$ に対し

$$-\lambda \int_{B(\sqrt{\tau})} \text{Im} f(x)\phi_\tau^l(x) dx \leq C\tau^{(d+2)/2-q} \quad (3)$$

が成り立つ.

(証明). $\tau \in (0, T)$ に対して

$$I(\tau) := \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} |u(t, x)|^p \psi_\tau^l(t, x) dx dt, \quad J(\tau) := \int_{B(\sqrt{\tau})} f(x)\phi_\tau^l(x) dx, \quad (4)$$

と定める. u が $[0, T)$ 上の弱解であり, $\psi_\tau^l \in C_0^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^d)$ なので,

$$I(\tau) + i\lambda J(\tau) = \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} (-iu) \partial_t (\psi_\tau^l) dxdt + \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} (-u) \Delta (\psi_\tau^l) dxdt. \quad (5)$$

(5) の実部をとると,

$$\begin{aligned} I(\tau) - \lambda \operatorname{Im} J(\tau) &= \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} (\operatorname{Im} u) \partial_t (\psi_\tau^l) dxdt + \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} (-\operatorname{Re} u) \Delta (\psi_\tau^l) dxdt \\ &=: K_1 + K_2. \end{aligned} \quad (6)$$

まず K_1 について評価する. $l/q - 1 \geq 0$ とヘルダーの不等式より,

$$\begin{aligned} K_1 &\leq l\tau^{-1} \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} |u| \eta_\tau^{l-1} \phi_\tau^l |\eta'(t/\tau)| dxdt \leq C\tau^{-1} \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} |u| \psi_\tau^{l/p} dxdt \\ &\leq C\tau^{-1} \{I(\tau)\}^{1/p} \left(\int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} dxdt \right)^{1/q} = C\tau^{(d+2)/2q-1} \{I(\tau)\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (7)$$

となる. 次に K_2 を評価する. $l/q - 2 \geq 0$ とヘルダーの不等式から,

$$\begin{aligned} K_2 &\leq l(l-1)\tau^{-1} \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} |u| \eta_\tau^l \phi_\tau^{l-2} |(\nabla \phi)(x/\sqrt{\tau})|^2 dxdt \\ &\quad + l\tau^{-1} \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} |u| \eta_\tau^l \phi_\tau^{l-1} |(\Delta \phi)(x/\sqrt{\tau})| dxdt \\ &\leq C\tau^{-1} \int_{[0, \tau) \times B(\sqrt{\tau})} |u| \psi_\tau^{l/p} dxdt \leq C\tau^{(d+2)/2q-1} \{I(\tau)\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (8)$$

を得る. ここで (5) から (8) より,

$$-\lambda \operatorname{Im} J(\tau) \leq C\tau^{(d+2)/2q-1} \{I(\tau)\}^{1/p} - I(\tau). \quad (9)$$

いま $p, q > 1$ かつ $1/p + 1/q = 1$ であることに注意すると, $a, b > 0$ に対して $ab \leq a^p/p + b^q/q$ なので, 右辺の第 1 項は

$$C\tau^{(d+2)/2q-1} \{I(\tau)\}^{1/p} \leq C\tau^{(d+2)/2-q} + I(\tau). \quad (10)$$

と評価できる. 従って (9)-(10) より,

$$-\lambda \operatorname{Im} J(\tau) \leq C\tau^{(d+2)/2-q}, \quad (11)$$

を得る. ただし C は d, p, l にのみ依存する正の定数である. \square

f が原点で特異性を持つという条件 (2) を課すことによって, 補題 4.1 から次の補題 4.2 が得られる. 補題 4.2 のおかげで, λ が大きい場合を扱うことができるようになった.

補題 4.2. 補題 4.1 と同じ仮定を満たすとする. さらに f が $k < d$ に対して (2) を満たすとする. このとき, 任意の $\tau \in (0, T)$ に対して

$$\lambda \leq C\tau^{(k+2)/2-q} \left(\int_{|x| \leq 1/\sqrt{\tau}} |x|^{-k} \phi^l(x) dx \right)^{-1} \quad (12)$$

が成り立つ. ここで $C > 0$ は補題 4.1 と同じ定数である.

〈証明〉. 補題 4.1 で得られた不等式に (2) を満たす f を代入すれば良い. □

ここでは定理 3.2 のみ証明する.

〈定理 3.2 の証明〉. 或る $T > 0$ と $[0, T)$ 上の弱解 u が存在したとする. 補題 4.2 より, 任意の $\tau \in (0, T)$ に対して

$$\lambda \leq C_1 \tau^{(k+2)/2-q} \{L(\tau)\}^{-1}, \quad (13)$$

が成り立つ. ここで $L(\tau) := \int_{|x| \leq 1/\sqrt{\tau}} |x|^{-k} \phi^l(x) dx$ である. $L(\tau)$ は τ に関して $[0, \infty)$ 上単調減少であり, $k < d/2 < d$ なので, 任意の $\tau \in (0, 4)$ に対して

$$L(\tau) > L(4) = \int_{|x| < 1/2} |x|^{-k} dx =: C_2 (< \infty), \quad (14)$$

が成り立つ. いま (13)-(14) より, 任意の $\tau \in (0, \min(4, T))$ に対して

$$0 \leq \lambda \leq C_1 C_2^{-1} \tau^{(k+2)/2-q}, \quad (15)$$

を得る. 仮定より $2/(p-1) < k$ なので, $k/2 - 1/(p-1) = (k+2)/2 - q > 0$ である. 従って (15) において $\tau \rightarrow +0$ とすれば, $\lambda = 0$ を得る. □

定理 3.1 の証明や詳しい情報は, 参考文献 [2] をご覧いただきたい.

謝辞

援助して下さった先生方, 運営をして下さった第 12 回城崎新人セミナー運営委員の方々, つたや旅館の方々, その他運営に携わった皆様にこの場を借りてお礼申し上げます.

参考文献

- [1] T. Cazenave, F. B. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s* , *Nonlinear Anal.*, **14** (1990), 807-836.
- [2] M. Ikeda, T. Inui, *Some non-existence results for the semilinear Schrödinger equation without gauge invariance*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **425**, (2015), no. 2, 758-773.
- [3] M. Ikeda, T. Inui, *Small data blow-up of L^2 or H^1 -solution for the semilinear Schrödinger equation without gauge invariance*, *Journal of Evolution Equations*, (2015), DOI 10.1007/s00028-015-0273-7.
- [4] Y. Tsutsumi, *L^2 -solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups*. *Funkcialaj Ekvacioj*, **30** (1987), 115-125.

素数の彩色に向けて

植木潤*

九州大学大学院数理学府 D2, 2015 年 2 月

概要. 本稿では、まず「数論的位相幾何学」の見方について紹介する。次にその演習として「素数の彩色数」を定義し、“妄想”を付記する。その後、新甫氏との共同研究「三次元多様体と very admissible な絡み目のイデール類体論」の概説を述べ、最後に今後の展望について、城崎での交流を通じて考えたことを交えて記す。

1 M²KR dictionary

1963 年の Mazur 氏のノートが「結び目と素数の類似」についての最初の文献と言われるが、そこには Mumford 氏から示唆されたこととある。Kapranov 氏と Reznikov 氏が Max Plank 研究所でこれを辞書の形に整理し「arithmetic topology (数論的位相幾何学)」と命名した。日本では森下昌紀氏が独立に創始した([森下])

代数体 k ($\text{Spec } \mathcal{O}_k$) 素イデール \mathfrak{p} ($\text{Spec } \mathbb{F}_p \hookrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_k$) 族 $S = \{p_1, \dots, p_s\}$ 体の (不分岐, 分岐) 拡大 F/k	有向連結閉 三次元多様体 M 結び目 $K : S^1 \hookrightarrow M$ 絡み目 $L : \sqcup S^1 \hookrightarrow M$ 多様体の (不分岐, 分岐) 被覆 $h : N \rightarrow M$
étale 基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec } \mathcal{O}_k)$ イデール類群 $Cl(k) = I_k/P_k$ (事実: $\#Cl(k) < \infty$)	基本群 $\pi_1(M)$ $H_1(M) = Z_1(M)/B_1(M)$ (仮定: $\#H_1(M) < \infty$ ($\iff M: \mathbb{Q}HS^3$))
Artin $\pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec } \mathcal{O}_k)^{\text{ab}} \cong Cl(k) \cong \text{Gal}(k_{\text{ur}}^{\text{ab}}/k)$	Hurewicz $\pi_1(M)^{\text{ab}} \cong H_1(M) \cong \text{Gal}(M_{\text{ab}}/M)$
分岐条件付きガロア理論 イデール類体論	分岐被覆空間の理論, [U1] [N], [NU]
岩澤理論 \mathbb{Z}_p 拡大 k_{∞}/k , 岩澤多項式	Alexander-Fox 理論, [U2] \mathbb{Z} 被覆 $X_{\infty} \rightarrow X$, Alexander 多項式
肥田-Mazur 理論	Thurston の理論, [MTTU]

岩澤理論と Alexander 理論は基本群の GL_1 表現の変形理論と見ることができる。肥田-Mazur 理論や [MTTU] は 2 次元 (非可換) 表現の変形理論である。

踏み込んだ目的意識としては、たとえば以下がある。

- (i) 古典的な代数的整数論に対して新しい知見を与える。整数論は「代数体と関数体の類似」を大事にしているが、その視点からは生まれられないような結果を得たい。
- (ii) 「数論はもともと量子化されている」と言われる。位相幾何の面白い“量子化”を考えたい。
- (iii) 付加構造の下で関手対応を作りたい。

こうした目的のために、類似の辞書を地道に育てていく研究にも意味がある。そのなかで、類体論や岩澤理論、またその非可換化などのトポロジー版を創り育てることは由緒正しい問題と考えられる。蒲谷氏の講演の最後で紹介された Bergeron-Venkatesh や Le 氏の仕事も、双曲多様体で岩澤理論を考えている。補空間の基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec } \mathcal{O}_k - S)$ と $\pi_1(M - L)$ の類似に留まらない何かがあるのかどうか？ が一つの気になる点である。(あると期待している。)

この記事で扱う「分岐」について補足しておく。 F/k をガロア拡大とする。 k の素イデール $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k$ の \mathcal{O}_F における素イデール分解の様子は、 $\mathfrak{p}\mathcal{O}_F = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r \mathfrak{P}^e$ という基本的な 3 種類の振舞いの組み合わせで捉えられる。これらを惰性、分解、分岐という。また $h : N \rightarrow M$ を絡み目で分岐する 3 次元多様体の分岐被覆とする。結び目 $K \subset M$ を取ると、逆像 $h^{-1}(K)$ の様子は惰性 (伸びる) 分解、分岐 (h の $h^{-1}(K)$ への制限が一对一写像になる) という基本的な 3 つの場合の組み合わせで理解できる。

なお本稿では紙面の都合で十分な文献表を付けられなかった。「代数的整数論とその周辺 2014」報告集などを合わせてご参照いただきたい。

*uekijun46@gmail.com

2 彩色

一昨年末に RIMS で行われた研究集会「代数的整数論とその周辺 2013」で藤原一宏氏の言葉が印象的だった。曰く「よく誤解されるが、私は大きな問題ではなく、小さな問題から始めるのです。」

素数の彩色の研究は、まだ始まっていないとも言えるが、この一つの種子が、いつか天野氏の 4 つ組の素数に対するミルナー不変量の研究のような仕事につながることを期待している。

2.1 絡み目の彩色 ([P])

定義. S^3 内の絡み目 L を、上下関係の情報を残して \mathbb{R}^2 上に射影した図式を考える。その各 arc に R, G, B の三色から選んで色を付ける方法であって、図式中の各交点において「異なる色の arc の下を潜ると色が変わる」ようなものを 3 彩色といい、その総数を 3 彩色数といい $col_3(L)$ と書く。

同様に、図式の各 arc に $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元を対応させる方法で、「各交点において、下の 2 つの arc に対応する数の和が上の arc に対応する数の 2 倍である」ものを n 彩色という。その総数を n 彩色数といい $col_n(L)$ と書く。

図式のライデマイスター変形で彩色数が不変であることが容易に確かめられ、これらは絡み目の位相不変量であることが分かる。例えば 3 彩色数を見ると 三葉結び目 \neq 自明な結び目 が言える。

命題 2.1. 絡み目の図式の一部に着目する。一枚の帯の上に二本の糸を並行にのせ、それを帯ごと n 回半捻りすると、新しい絡み目を得る。この操作を n half-twists という。 n 彩色数は n half-twists で保たれる。

彩色数には、絡み目群や分岐被覆のホモロジーを用いた解釈がある：

命題 2.2. n 彩色は、補空間の基本群から二面体群への準同型 $\pi_1(S^3 - L) \rightarrow D_n$ であって“偶数長の元”を 1 に送るものと一対一に対応する。さらに、 L でちょうど分岐する S^3 の二重分岐被覆 $h: M \rightarrow S^3$ が一意に存在するが、準同型 $H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と $n:1$ に対応する。

また、ジョーンズ多項式の特異値や、統計物理学における状態和の考えを用いた解釈もある。さらに、一般の群やカンドルなどによる彩色も考えられている。枠付絡み目や曲面結び目に対しても理論の拡張がある。

2.1.1 素数の族の彩色

$S = \{p_1, \dots, p_r\} \subset \text{Spec } \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を素数と無限素点からなる有限集合とする。 S で分岐する \mathbb{Q} の二次拡大 k を考える。これは存在すれば一意であり、存在しないのは以下の 2 つの場合である。

- (1) S が 4 で割ると 3 余る素数を奇数個含み、 $\infty, 2$ を含まないとき。
- (2) S が 4 で割ると 3 余る素数を偶数個含み、 ∞ を含み、 2 を含まないとき。

なお $\infty \notin S \iff k$ が総実である。このような S に対して、 $\infty \in S$ ならば最大 S 外不分岐ガロア群、 $\infty \notin S$ ならば最大 S 外不分岐総実ガロア群を G_S と書き、 $\pi_1(S^3 - L)$ の類似物と見る。

定義. この群から二面体群への準同型 $G_S \rightarrow D_n$ であって“偶数長の元”を 1 に送るものを S の n 彩色と呼ぶことにする。その個数を n 彩色数と呼び $col_n(S)$ と書く。

命題 2.3. n 彩色は $Cl(k)_{(n)} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と $n:1$ に対応する。

二次体の類群は古典的な理論として知られている。例えば次がすぐ分かる。

例 2.4. 非自明な 3 彩色を持つ最小の素数は 23 である。

絡み目の彩色数が n half-twists で保たれたことの類似として、次が考えられる。

問題 2.5. 集合 $\{S \text{ の全体 } \}$ 上の適当な同値関係であって彩色数を保つものを見つけよ。

この応用、野心的な目標として例えば次がある。

予想 2.6 (Gauss). 類数 1 の実二次体は無数にある。

これを弱めた命題「 $p \neq q$ を素数とすると、類数が pq で割れない二次体が無数にある」が真であることは、 $pq = 6$ の場合が Belabas-Fouvry の論文 (1999) で示されているのみである。

妄想. これは最初の「図式から定まる素数の不変量」と言えるかもしれない。ジョーンズ多項式の直接の対応物はまだ提案されていないと思う。状態和の考えはゼータ関数と相性が良いと聞く。カンドルの心が「余次元 2」ならば数論に適用できて良さそうだ。ミルナー不変量との関係はどうか。高次のスキームに対してはどうか。3 次元多様体と絡み目の不変量である Casson 不変量はユニタリ表現の個数を正規化して数えるが、表現の個数を数えるという点が共通している。

3 新甫のイデール理論 ([N], [NU])

九大の新甫氏が修士論文 [N] の中で提案された枠組みについて、研究を徹底させたのが [NU] である。Sikora 氏の personal note の内容に一通り答えるという差当りの目標は達成された。研究集会「結び目の数学 VII」報告集の新甫氏の記事と本稿を併せると要所が尽くされるだろう。なお本稿では簡単のため、大域理論については、Hurewicz 同型を固定し、群を同一視して記述する。

3.1 数体と結び目の局所類体論

局所体 k_p に対して、次の完全列の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_p^\times & \longrightarrow & k_p^\times & \xrightarrow{v_p} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \rho_p & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Gal}(k_p^{\text{ab}}/k_p^{\text{ur}}) & \longrightarrow & \text{Gal}(k_p^{\text{ab}}/k_p) & \longrightarrow & \text{Gal}(k_p^{\text{ur}}/k_p) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

右上の v_p は付値と呼ばれる。中央の縦は局所類体論の基本写像と呼ばれる単射準同型で稠密な像を持つ。左下は惰性群 I_p のアーベル商である。右下については $\text{Gal}(k_p^{\text{ur}}/k_p) \cong \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ が成り立つ。

局所体の拡大は事情が複雑で、非アーベルがあるし、分岐には wild と tame の二通りがある。特に tame 商を見ると、 $1 \rightarrow I_p^t = \langle \tau \rangle \rightarrow \pi_1^t(\text{Spec}(k_p)) = \langle \tau, \sigma | \tau^{q-1}[\tau, \sigma] \rangle \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p) = \langle \sigma \rangle \rightarrow 1$ という完全列がある。ここに τ はモノドロミー、 σ はフロベニウスと呼ばれる。

次に結び目 $K \subset M$ に対し、管状近傍を V_K と書く。その境界の 2 次元トーラス ∂V_K の基本群はアーベルであるから、結び目のほうの局所理論は簡単である。元 $\mu_K, \lambda_K \in H_1(\partial V_K)$ を K のメリディアンとロンジチュードとする。各多様体 X の普遍被覆を $\tilde{X} \rightarrow X$ と書く。次の完全列の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \langle \mu_K \rangle & \longrightarrow & H_1(\partial V_K) & \xrightarrow{v_K} & H_1(V_K) = \langle \lambda_K \rangle \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \text{Hur.} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{\partial V}_K/\partial \tilde{V}_K) & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{\partial V}_K/\partial V_K) & \longrightarrow & \text{Gal}(\tilde{V}_K/V_K) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

左上について同型 $\partial_* : H_2(V_K, \partial V_K) \cong \langle \mu_K \rangle$ が成り立つ。「辞書」によれば単数と曲面の類が対応するが、局所でもそうになっている。中央の群は $\pi_1(\partial V_K) = \langle \mu_K, \lambda_K | [\mu_K, \lambda_K] \rangle \cong H_1(\partial V_K) \cong \mathbb{Z}^2$ となっており、数論の tame の場合はこれが“量子化”されたものと見れる。付値に対応する写像 v_K は、包含 $\partial V_K \hookrightarrow V_K$ が導く射である。縦は全て Hurewicz の同型であり、左下は K の惰性群 $I_K = \text{Gal}(\tilde{\partial V}_K/\partial \tilde{V}_K)$ 、右下は $\text{Gal}(\tilde{V}_K/V_K) \cong \text{Gal}(\tilde{K}/K)$ となっている。

3.2 数体の類体論

数体 k に対し、イデール群を制限直積によって次のように定義する。

$$\mathbb{I}_k := \prod_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}^\times = \left\{ (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}: \text{prime}} k_{\mathfrak{p}}^\times \mid v_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}) = 0 \text{ for almost all finite primes } \mathfrak{p} \right\},$$

すると主イデール群 $\mathbb{P}_K := \text{Im}(k^\times \hookrightarrow \mathbb{I}_K)$ 、イデール類群 $\mathbb{C}_k := \mathbb{I}_k/\mathbb{P}_k$ が定められる。さらに単イデール群 $\mathbb{U}_k := \text{Ker}(\prod v_{\mathfrak{p}}) < \mathbb{I}_k$ を考えると、同型 $\mathbb{I}_k/(\mathbb{U}_k \cdot \mathbb{P}_k) \cong \text{Cl}(k)$ がある。

イデール類群 \mathbb{C}_k には二つの自然な位相が入って位相群となる。一つはノルム位相と呼ばれ、有限次アーベル拡大のイデール類群のノルムによる像が 0 の基本近傍系を成す。もう一つは、ここでは標準位相と呼ぶ。まず局所理論で局所ノルム位相を考え、 \mathbb{I}_k に制限直積位相と呼ばれる位相を導入する。制限直積位相は直積位相よりも開集合が多い。その商位相として得られるものを考える。

ここで考える体は全て複素数体 \mathbb{C} の中に固定されているものとする。群 $\text{Gal}(k_{\text{ab}}/k) = \varprojlim_{F/k: \text{fin.ab.}} \text{Gal}(F/k)$

について次が成り立つ (ノイキルヒ「代数的整数論」、加藤・黒川・斎藤「数論 I」など)。

定理 3.1 (GCFT). 稠密な像を持つ自然な単射準同型 $\rho: \mathbb{C}_k \rightarrow \text{Gal}(k_{\text{ab}}/k)$ があって次を満たす。

- (1) 局所理論と整合的である。
- (2) (Artin 相互律) 任意の有限次アーベル拡大 F/k に対し、同型 $\mathbb{C}_k/\text{Nr}\mathbb{C}_F \cong \text{Gal}(F/k)$ を導く。
- (3) (存在定理) $\{H < \mathbb{C}_k \mid \text{open w.r.t. ノルム位相}\} = \{H < \mathbb{C}_k \mid \text{open w.r.t. 標準位相, 指数有限}\}$ と $\{C/F/k \mid F \text{ は } k \text{ の有限次アーベル拡大}\}$ の間に自然な全単射を導く。

なお (2) からは例えば平方剰余の相互法則が従うことが知られている。

3.3 Very admissible link

以下では 3 次元多様体 M を固定し有向連結閉を仮定する。数体の素イデアルの全体の対応物を定める：

定義 ([N],[NU]). $\mathcal{K} \subset M$ が very admissible link であるとは、次を満たすことである。

- (1) 可算成分の絡み目である。
- (2) 管状近傍 $V_{\mathcal{K}} = \sqcup_K V_K$ を備える。
- (3) \mathcal{K} 内の有限絡み目で分岐する任意のアーベル被覆 $h: N \rightarrow M$ に対して、 $H_1(N)$ が逆像 $h^{-1}(\mathcal{K})$ の成分たちによって生成される。

例えば S^3 内の自明な結び目は very admissible である。トレフォイルを含む very admissible link は無限成分の絡み目である。以下では絡み目といったら成分が可算無限個あっても良く、管状近傍を備えるとする。

定理 3.2 ([NU]). M 内の任意の絡み目 L に対し、 L を含む very admissible link \mathcal{K} が存在する。

ここではより強く、定義の条件 (3) から「アーベル」を外したものの構成を述べる。次を用いる。

補題 3.3. L が M 内の絡み目のとき、 L を含むある絡み目 \mathcal{L} があって、 L 内の有限絡み目で分岐するような任意の有限次被覆 $h: N \rightarrow M$ に対し、 $H_1(N)$ を \mathcal{L} の逆像の連結成分たちが生成する。

証明: 分岐被覆は分岐成分の補空間の不分岐被覆から Fox 完備化によって得られ、不分岐被覆は基本群の部分群と、被覆のガロア理論によって一対一に対応する。各有限絡み目 $L' \subset L$ に対し、有限生成群 $\pi_1(M - L')$ の指数有限部分群は可算個であることに気をつけると、そのような分岐被覆は可算個であるから、その全体の集合を $\{h_i: N_i \rightarrow M\}_{i \in \mathbb{N}}$ と書く。絡み目の包含列 $\{L_i\}_i$ を次のように再帰的に構成し、 $\mathcal{L} = \cup L_i$ とおけばよい。まず $L_{-1} = L$ とする。次に $i \in \mathbb{N}$ に対し、 L_{i-1} が与えられていたとする。 N_i はコンパクトなので $H_1(N_i)$ は有限生成である。よって N_i 内の絡み目 \widetilde{L}_i であって、 $h^{-1}(L_{i-1})$ を含み、その成分たちが $H_1(N_i)$ を生成し、像 $h_i(\widetilde{L}_i)$ が再び M の絡み目になるものが取れる。ここで $L_i := h_i(\widetilde{L}_i)$ と置く。□

証明 (定理): M 内の絡み目の包含列 $\{\mathcal{K}_i\}_i$ を次のように再帰的に構成し、 $\mathcal{K} := \cup \mathcal{K}_i$ とすればよい。まず $\mathcal{K}_{-1} = L$ と置く。つぎに $i \in \mathbb{N}$ に対し \mathcal{K}_{i-1} が与えられていたとし、 \mathcal{K}_{i-1} から補題によって得られる絡み目を \mathcal{K}_i とする。□

Remark. さらに、「絡み目が H_1 を生成する」という条件を強めて、「絡み目の各成分と基点を途中で交わらない path でつなぎ向きを与えたものたちが基本群を生成する」とすることもできる。

3.4 新甫のイデール

以下では M 内に very admissible link \mathcal{K} を固定する。また各連結成分 $K \subset \mathcal{K}$ に対し、メリディアンとロジチュード $\mu_K, \lambda_K \in H_1(\partial V_K)$ を固定する。対 (M, \mathcal{K}) のイデール群を次のように定める。

$$\mathbb{I}_{M, \mathcal{K}} := \prod_{K \subset \mathcal{K}} H_1(\partial V_K) = \left\{ (a_K)_K \in \prod_{K \subset \mathcal{K}} H_1(\partial V_K) \mid v_K(a_K) = 0 \text{ for almost all } K \right\}.$$

また、群 $G_{\text{ab}} := \varprojlim_{L \subset \mathcal{K} \text{ finite}} H_1(M - L)$ を $\text{Gal}(k_{\text{ab}}/k)$ の対応物として考え、**主イデール群**と**イデール類群**を

$\mathbb{P}_{M, \mathcal{K}} = \text{Ker}(\mathbb{I}_{M, \mathcal{K}} \rightarrow G_{\text{ab}})$ と $\mathbb{C}_{M, \mathcal{K}} := \mathbb{I}_{M, \mathcal{K}}/\mathbb{P}_{M, \mathcal{K}}$ で定義する。(ここで $\mathbb{P}_{M, \mathcal{K}}$ は $\varprojlim_{L \subset \mathcal{K}} H_2(X_L, \partial X_L)$, $X_L := M - V_L$ の適当な部分群の $\mathbb{I}_{M, \mathcal{K}}$ における像であり、単数と曲面の類似の自然な拡張と見れる。) さらに**単イデール群** $\mathbb{U}_{M, \mathcal{K}} := \text{Ker}(\prod v_K) < \mathbb{I}_{M, \mathcal{K}}$ を定めると、これはメリディアンたちで生成される。同型 $\mathbb{I}_{M, \mathcal{K}}/(\mathbb{U}_{M, \mathcal{K}} + \mathbb{P}_{M, \mathcal{K}}) \cong H_1(M)$ がある。

イデール類群 $\mathbb{C}_{M, \mathcal{K}}$ には二つの自然な位相が入り位相群となる。一つは**ノルム位相**と名付けられ、これは各有限次分岐アーベル被覆のイデール類群の像を 0 の基本近傍系とするものである。もう一つは**標準位相**と名付けられ、これは局所ノルム位相の制限直積位相の商位相として定義される。もし M が有理ホモロジー球面ならばこの二つは一致するが、一般には異なる。

3.5 3次元多様体のイデール類体論

定理 3.4 (GCFT;[N],[NU]). 自然な同型 $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \xrightarrow{\cong} G_{\text{ab}} = \varprojlim_{LC\mathcal{K} \text{ finite}} H_1(M-L)$ があって次を満たす。

- (1) 局所理論と整合的である。
- (2) (大域相互律) \mathcal{K} 内の有限絡み目で分岐する任意の有限次アーベル被覆 $h : N \rightarrow M$ に対して、同型 $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}/h_*(\mathbb{C}_{N,h^{-1}(\mathcal{K})}) \cong \text{Gal}(h)$ を導く。
- (3) (存在定理) $\{H < \mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \mid \text{open w.r.t. ノルム位相}\} = \{H < \mathbb{C}_{M,\mathcal{K}} \mid \text{open w.r.t. 標準位相, 指数有限}\}$ と $\{\mathcal{K}$ 内の有限絡み目で分岐する有限アーベル被覆 $h : N \rightarrow M$ の基点付き同型類 $\}$ の間に自然な全単射を導く。

Remark. 「基点付き被覆の同型類」を考えることは、固定された十分大きな体 (例えば \mathbb{C}) の中で数体を考えることに対応する。実際、数論幾何では $\text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_k$ が基点と呼ばれる。逆に M の「 \mathcal{K} 分岐最大アーベル被覆」を副有限被覆として取り、その商として得られる有限次被覆全体の集合を考えてもよい。

定理の証明は、 $\mathbb{I}_{M,\mathcal{K}} = (\text{meridian part}) \oplus (\text{longitude part}) \cong \mathbb{Z}^N \oplus \mathbb{Z}^{\oplus N}$ から $\mathbb{C}_{M,\mathcal{K}}$ への商写像が扱いやすい商を経由することに気をつければ、あとは概ね自然である。数論の方では「ノルム剰余記号」を導入して行われる証明があるが、結び目のほうでも、そのようにもできる。ノルム剰余記号の特別な場合としてルジャンドル記号と mod 2 の絡み目数と同じように見ることができる。

他に、数論では、**類体公理**から導く方法もあった。 (M, \mathcal{K}) のイデール群やイデール類群の Tate cohomology は、ノルムとトレースの役割が部分的に逆転しており、惰性成分を余計に数えてしまうため、見た目が異なる。

3.6 展望など

新甫氏によって提案されたこの枠組について、今後やるべき由緒正しい問題はまだまだ無数にあるが、枠組み自体を検討するという方向性もある。機密に支障のない範囲で研究のメモを記す。

- 非アーベル版を考える。コホモロジーをベースに書き換える。• 無限素点の類似物は $\text{End } M$ だと言われる。今回は M が閉を仮定しているので空であるが、Hajir 氏の研究がある。• 積公式が成り立つような別の枠組みを Kopei 氏が提案している。• また別の枠組みだが、虚数乗法の類似について Conne-Marcolli-Ramachandran の研究がある。• Kummer 対と Blanchfield 対の類似がある一方で、河澄氏の Morita-Mumford 類の研究が高次 Kummer 理論に当たると指摘されている。• ゼータ関数と絡ませたい。岩澤理論、肥田理論の類似を合わせて考えてゆきたい。• 多重ゼータ値とジョーンズ多項式の関係について Le-村上の研究を、近年になって古庄氏が発展させている。FMZV との関係が気になる。• 双曲結び目補空間の双曲体積とゼータ値が概念的に対応する。P.Scholze 氏も数論的的双曲 3次元多様体の体積を perfectoid や Galois 表現との関係で議論している。• 関真一朗氏から「結び目の素数定理はあるか」と訊かれた。結び目の全体は連結和についてモノイドを成す。図式の最小交点数による順序を入れて自然数で添字付けると、 $\pi(n) := \frac{\#\{K_i \mid i \leq n, \text{prime knot}\}}{\#\{K_i \mid i \leq n\}}$ の振舞いを定式化できる。ほかに既存の研究として、砂田利一「基本群とラブラシアン」の中で測地線の素数定理が議論されている。また McMullen 氏の論文でチェボタレフ密度定理の類似が示されている。• 「オイラーシステムはあるか」とも訊かれ、探しているところですが、と答えた。代数幾何の方でも探しているところだと聞いたことがある。むしろ結び目から示唆を得て、オイラーシステムを用いずにセルマー群を直接叩く研究があるらしい。• 「一元体」の考えは、数論において「準古典極限」を取ることだとも説明されるが、理解のために結び目での類似の考察が意味を持つと考えられる。

謝辞. 運営委員の方たち、出資して下さった先生方、城崎でコメントを下さった蒲谷祐一、関真一朗、平川義之輔の各氏、また彩色について議論したり、本原稿に目を通しコメントを下さったりした、木村巖、古川遼、三原朋樹、新甫洋史の各氏らに感謝します。本研究は JSPS 科研費 (25-2241) の助成を受けたものです。

参考文献

- [森下] 森下昌紀, 「結び目と素数」, シュプリンガー・ジャパン (丸善), 2009 (2013).
- [P] Józef H. Przytycki, *3-coloring and other elementary invariants of knots*, In Knot theory (Warsaw, 1995), volume 42 of Banach Center Publ., pages 275–295. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.
- [MTTU] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, On the universal deformations for SL_2 -representations of knot groups, submitted. (on arXiv.)
- [N] Hirofumi Niibo, *Idèlic class field theory for 3-manifolds*, Kyushu J. Math, Kyushu J. Math **68** (2014), no. 2, 421–436.
- [NU] Hirofumi Niibo and Jun Ueki, *Idèlic class field theory for 3-manifolds and very admissible links*, submitted. (on arXiv.)
- [U1] Jun Ueki, *On the homology of branched coverings of 3-manifolds*, Nagoya Math. J. **213** (2014), 21–39.
- [U2] Jun Ueki, *On the Iwasawa invariants for links and Kida’s formula*, submitted.

特性曲線有限要素法の理論と応用

内海 晋弥 *

早稲田大学大学院基幹理工学研究科, 2015年2月

1 はじめに

本稿では, 移流拡散方程式を扱い, 流れ問題に対する数値解法である特性曲線有限要素法を紹介する.

移流拡散方程式や Navier–Stokes 方程式のように, 移流項が支配的な問題において, Galerkin 有限要素法は不安定である. 特性曲線有限要素法 (Lagrange–Galerkin 法とも呼ばれる) はこれらの流れ問題に対して有効な手法である. 本手法に関しては [1, 2, 3, 4, 5] などを参照していただきたい. Galerkin 有限要素法と異なり, 物質微分項 $\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi$ を直接近似する. さらに, 最終的に解くべき連立一次方程式に現れる係数行列が対称で, 時間に依存しないという特長を持っており, 効率的な計算を行うことができる.

しかし, 特性曲線有限要素法で現れる, 合成関数項の積分計算を厳密に行うことは一般には不可能である. そのため, 従来はそこに数値積分が用いられたが, 粗い数値積分は不安定な数値結果を導くことが知られている [4]. 一方, 我々は厳密に積分ができるスキームを作成した.

本稿では従来の特性曲線有限要素スキームと数値積分誤差を伴わないスキームを紹介する.

本報告は田端正久氏 (早稲田大学理工学術院) との共同研究に基づくものである.

2 準備

$\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数とする移流拡散問題 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \nabla \phi - \nu \Delta \phi &= f, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ \phi &= 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ \phi &= \phi^0, & x \in \Omega, t = 0, \end{aligned}$$

を考える. ここに, Ω は $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ の多角形領域, $\partial\Omega$ はその境界, $T > 0$ は時刻, $\nu > 0$ は拡散係数, $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ はそれぞれ与えられた関数である. $u(x, t) = 0 ((x, t) \in \partial\Omega \times (0, T))$ を仮定する.

まず, 時間方向の離散化の方法を述べる. $\Delta t > 0$ を時間刻み, $N_T \equiv \lceil T/\Delta t \rceil$ を総ステップ数, $t^n \equiv n\Delta t$ とし, $\phi^n \equiv \phi(\cdot, t^n)$ とする. u^n なども同様である.

*su48@fuji.waseda.jp

u を滑らかと仮定して, 特性曲線 $X(t; x, s)$ を常微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t; x, s) = u(X(t; x, s), t), & t < s, \\ X(s; x, s) = x \end{cases}$$

の解として定義する. これを用いると物質微分項 $(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla)\phi$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla\right)\phi(X(t), t) = \frac{d}{dt}\phi(X(t), t)$$

と書ける. $w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して, 写像 $X_1(w): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ を

$$(X_1(w))(x) \equiv x - w(x)\Delta t.$$

で定める. 写像 $X_1(u(\cdot, t))$ は $X(t - \Delta t; x, t)$ の Euler 近似である. 記号 \circ は関数の合成 $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$ を表す.

これらの記号を用いると物質微分項を $\frac{\phi^n - \phi^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t}$ で近似することができ,

$$\frac{\partial \phi^n}{\partial t} + u^n \cdot \nabla \phi^n - \frac{\phi^n - \phi^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t} = O(\Delta t) \quad (1)$$

が成り立つ. このことは Taylor 展開

$$\begin{aligned} (\phi^{n-1} \circ X_1(u^n))(x) &= \phi(x - u^n(x)\Delta t, t^{n-1}) \\ &= \phi(x, t^n) - \Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t^n) + u^n(x) \cdot \nabla \phi(x, t^n) \right) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

から分かる. また, (1) の $O(\Delta t)$ の項を具体的に書くと次のようになる:

$$y(x, s) = x + (s - 1)\Delta t u^n(x), \quad t(s) = t^{n-1} + s\Delta t$$

と置くと,

$$\frac{\phi^n - \phi^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [\phi(y(\cdot, s), t(s))]_{s=0}^1$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned} ((1) \text{ の左辺}) &= \frac{\partial \phi^n}{\partial t} + u^n \cdot \nabla \phi^n - \int_0^1 \left\{ u^n(\cdot) \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} (y(\cdot, s), t(s)) ds \\ &= \Delta t \int_0^1 ds \int_s^1 \left\{ \left(u^n(\cdot) \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \phi \right\} (y(\cdot, s_1), t(s_1)) ds_1, \end{aligned}$$

ここに,

$$\left(u^n \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^d u_i^n u_j^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_{i=1}^d u_i^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

次に, 空間方向の有限要素近似について述べる. $\mathcal{T}_h = \{K\}$ を $\bar{\Omega}$ の三角形 ($d=2$) または四面体 ($d=3$) 分割 (図 1), $h \equiv \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$ を最大要素長とする. 本稿では三角形が “つぶれない” 正則な三角形分割列 $\{\mathcal{T}_h\}_{h \downarrow 0}$ を考える. k を正整数として, P_k 有限要素空間 $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ を

$$V_h \equiv \{v_h \in C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega); v_h|_K \in P_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

で定める. ここに, $P_k(K)$ は K 上の高々 k 次多項式の集合を表す. P1, P2 空間の基底関数の例を図 2 に示した.

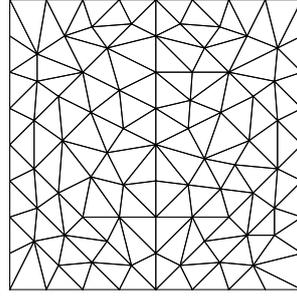
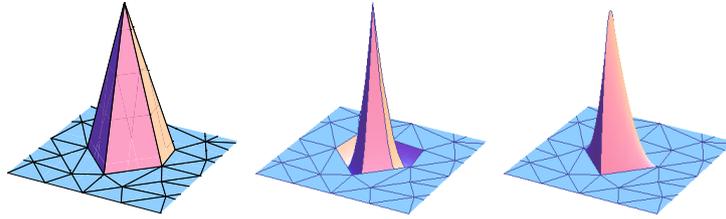

 図 1: $\bar{\Omega}$ の三角形分割.


図 2: 有限要素空間の基底関数. P1(左), P2(中, 右).

3 特性曲線有限要素スキーム

$\Pi_h^{(k)} : C(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ を P_k 有限要素空間への Lagrange 補間作用素とする. 括弧 (\cdot, \cdot) は $L^2(\Omega)$ の内積を表す. 従来の特性曲線有限要素スキームは次で定義される.

スキーム 0. $\phi_h^0 = \Pi_h^{(k)} \phi^0$ とする. 次を満たす $\{\phi_h^n\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h$ を求めよ:

$$\left(\frac{\phi_h^n - \phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n)}{\Delta t}, \psi_h \right) + \nu(\nabla \phi_h^n, \nabla \psi_h) = (f^n, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

$n = 1, \dots, N_T$.

合成関数項 $(\phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n), \psi_h)$ が厳密に積分されると仮定すれば, 数値解の安定性と, 厳密解への収束性を示すことができる [1].

関数 ϕ_h^{n-1} は要素 K 上で多項式であるが, 合成関数 $\phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n)$ は一般には K 上で多項式でない. 像 $X_1(u^n)(K)$ が複数の要素に跨るからである (図 3 左). ゆえに $(\phi_h^{n-1} \circ X_1(u^n), \psi_h)$ を厳密に積分することは困難である. 現実的にはそこに数値積分が使われる. しかし, 数値積分誤差を用いるスキームの収束性は得られておらず, さらに, 粗い数値積分を用いると不安定になりうる事が知られている [4, 6].

数値積分誤差を伴わないスキームを述べる.

スキーム 1. $\phi_h^0 = \Pi_h^{(k)} \phi^0$ とする. 次を満たす $\{\phi_h^n\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h$ を求めよ:

$$\left(\frac{\phi_h^n - \phi_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} u^n)}{\Delta t}, \psi_h \right) + \nu(\nabla \phi_h^n, \nabla \psi_h) = (f^n, \psi_h), \quad \forall \psi_h \in V_h,$$

$n = 1, \dots, N_T$.

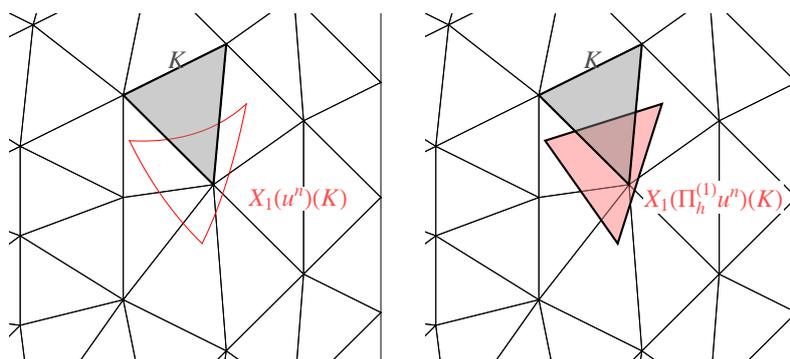


図 3: 要素 K とその像 $X_1(u^n)(K)$ (左), $X_1(\Pi_h^{(1)}u^n)(K)$ (右) .

局所線形化流速場 $\Pi_h^{(1)}u^n$ を用いることにより, 要素 K の像 $X_1(\Pi_h^{(1)}u^n)(K)$ は三角形となる (図 3 右). 積分 $(\phi_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)}u^n), \psi_h)$ は厳密に行うことができる.

スキーム 1 は本質的に無条件安定であり, 厳密解 ϕ と与えられた流速 u の滑らかさの仮定と適切な Δt の制限の下

$$\|\phi - \phi_h\|_{\ell^\infty(L^2)} + \sqrt{\nu} \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{\ell^2(L^2)} \leq c(h^k + h^2 + \Delta t)$$

を示すことができる. ここに, $\psi = \{\psi^n\}_{n=0}^{N_T}$ に対して

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\ell^\infty(L^2)} &\equiv \max\{\|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}; n = 0, \dots, N_T\}, \\ \|\psi\|_{\ell^2(L^2)} &\equiv \left(\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

であり, c は $\nu, h, \Delta t$ に依らない正定数である. P1, P2 要素を用いる場合には, スキーム 0 と同じ精度である.

4 おわりに

本稿では特性曲線有限要素法のアイデアと, 従来のスキーム, 数値積分を伴わないスキームを紹介した. ここでは述べなかったが, 特性曲線有限要素法による近似は Oseen 方程式や Navier-Stokes 方程式に対しても適用可能である [5, 2, 3].

最後に関連する文献について述べる. 有限要素法の数学的理論については [7, 8, 9, 10] を, そのプログラムの方法については [11, 12] などを参照していただきたい. ソフトウェア FreeFem++ (<http://www.freefem.org/ff++/>) には, 数値積分を用いる特性曲線有限要素法を含む, 有限要素計算を容易に実装するための機能がある. これに関する日本語の文献として [13] がある.

謝辞 日ごろからご指導いただいている田端正久先生に感謝する.

城崎新人セミナーの場を設けてくださった運営委員の皆様, そのご支援をいただいている先生方にお礼申し上げます. また, 質問や議論をしていただいた方々にも感謝したい.

参考文献

- [1] J. Douglas, Jr. and T. Russell. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 19, No. 5, pp. 871–885, 1982.
- [2] O. Pironneau. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 38, pp. 309–332, 1982.
- [3] Endre Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numerische Mathematik*, Vol. 53, No. 4, pp. 459–483, 1988.
- [4] Masahisa Tabata. Discrepancy between theory and real computation on the stability of some finite element schemes. *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 199, No. 2, pp. 424–431, 2007.
- [5] Hirofumi Notsu and Masahisa Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations. *Journal of Scientific Computing*, 2015. <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-015-9992-8>.
- [6] 田中克徳, 鈴木厚, 田端正久. 厳密な積分を用いる特性有限要素法. 九州大学情報基盤センター年報, Vol. 2, pp. 11–18, 2002.
- [7] 田端正久. 偏微分方程式の数値解析. 岩波書店, 2010.
- [8] 菊地文雄. 有限要素法の数理. 培風館, 1994.
- [9] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [10] Susanne Brenner and Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 3rd edition, 2008.
- [11] 田端正久, 中尾充宏. 偏微分方程式から数値シミュレーションへ/計算の信頼性評価. 講談社, 2008.
- [12] 菊地文雄. 有限要素法概説. サイエンス社, 新訂版, 1999.
- [13] 大塚厚二, 高石武史. 有限要素法で学ぶ現象と数理. 共立出版, 2014.

p 進数の分類について

大音智弘*

筑波大学 数理物質科学研究科数学専攻, 2015年2月

概要

本稿では, p 進数体 \mathbb{Q}_p を4つのクラス (A -, S -, T -, U -number) に分類し, 与えられた p 進数がどのクラスに属するかについて考える. 特に, automatic とよばれる digit が automaton から生成される p 進数は有理数, S -, T -number のいずれかになることを示した.

1 はじめに

数の超越性や代数的独立性を調べるのに, その数が代数的数でどのくらい良く”近似”できるかを計算するのは有効な手段である. その一例として以下の定理が知られている.

Theorem 1.1 (Liouville, 1844). $\xi \in \mathbb{R}$ とおく. 任意の整数 $n \geq 1$ に対して,

$$0 < \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{|q|^n}$$

となる $p/q \in \mathbb{Q}$ ($q > 1$) が存在するならば, 実数 ξ は超越数.

Theorem 1.1 は先ほどの言い方で, いくらでも良く有理数で近似できる実数は超越数ということの意味している. Liouville は Theorem 1.1 から実数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/10^{n!}$ が超越数であることを示した. 本稿は, このような近似の考え方から p 進数体 \mathbb{Q}_p を A -, S -, T -, U -number の4つのクラスに分類し, そのクラスについて知られている性質や, 具体的な数がどのクラスに属するかについて得られた結果を報告する.

2 p 進数の分類

はじめに多項式と代数的数の高さを定義する. 整数係数多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ に対して, $H(P) := \max_{0 \leq n \leq d} \{|a_n|\}$ を多項式 P の高さという. p 進数 $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ を \mathbb{Q} 上代数的数 (以下, 単に代数的数とよぶ) とする. 整数係数多項式 $P(X) = \sum_{n=0}^d a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$ は, 原始的な既約多項式で $P(\alpha) = 0, a_d > 0$ を満たすとき, α の最小多項式という. このとき, $H(\xi) := H(P)$ を α の高さといい, $\deg \alpha := \deg P$ を α の次数という.

次に, p 進数が多項式や代数的数でどのくらい良く近似できるかを以下のようにして定式化する.

*ooto@math.tsukuba.ac.jp

Definition 2.1. 整数 $n \geq 1$, p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ に対して,

$$w_n(\xi) := \sup \{ w \in \mathbb{R} \mid 0 < |P(\xi)|_p < H(P)^{-w-1} \text{ for infinitely many } P(X) \in \mathbb{Z}[X] \text{ with } \deg P \leq n \}$$

$$w_n^*(\xi) := \sup \{ w \in \mathbb{R} \mid 0 < |\xi - \alpha|_p < H(\alpha)^{-w-1} \text{ for infinitely many } \alpha \in \mathbb{Q}_p \text{ with } \deg \alpha \leq n \}$$

$$w(\xi) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n(\xi)}{n}, \quad w^*(\xi) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}.$$

Mahler は, 関数 w_n, w を用いて p 進数を以下の 4 つのクラスに分類した.

Definition 2.2 (Mahler [7]). p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ は,

A-number ($w(\xi) = 0$ のとき),

S-number ($0 < w(\xi) < \infty$ のとき),

T-number ($w(\xi) = \infty$ かつ任意の整数 $n \geq 1$ に対して, $w_n(\xi) < \infty$ のとき),

U-number ($w(\xi) = \infty$ かつある整数 $n \geq 1$ に対して, $w_n(\xi) = \infty$ のとき)

とよばれる.

また, 関数 w_n^*, w^* を用いて A^*, S^*, T^*, U^* -number を同様に定めることができる. この分類の性質として以下のことが知られている.

Proposition 2.3. p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ に対して, ξ が A-number (resp. S-, T-, U-number) であることは A^* -number (resp. S^* -, T^* -, U^* -number) であることの必要十分条件となる. また, p 進数 $\xi, \eta \in \mathbb{Q}_p$ が \mathbb{Q} 上代数的従属ならば, ξ, η は同じクラスに属する. 特に, A-number 全体は代数的数全体と一致する.

Proposition 2.3 により, Mahler による分類は \mathbb{Q}_p を代数的数と超越数の 2 つに分けるより細かく分類していることがわかった. 細かく分類しても空集合では意味が無いが, A-, S-, T-, U-number 全体はそれぞれ空集合でないことが知られている. 中でも T-number の存在性には, 部分空間定理という主結果の証明でも用いられた強力な道具が用いられている. また, ハール測度に関してほとんどすべての p 進数は S-number であることが知られている.

関数 w_n, w_n^* の値については次のことが知られている.

Proposition 2.4. p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$, 整数 $n \geq 1$ に対して, 以下が成立する.

(1) ξ が d 次の代数的数ならば, $w_n(\xi) = w_n^*(\xi) = \min\{d-1, n\}$

(2) ξ が超越数ならば, $w_n(\xi) \geq n$, $w_n^*(\xi) \geq (n+1)/2$

(3) $0 \leq w_n(\xi) - w_n^*(\xi) \leq n-1$

実数に対しても, 整数係数多項式や代数的数での近似の考え方から A-, S-, T-, U-number が定義できる. そして, Proposition 2.3, 2.4 の類似も成り立つ. さらに, 有限体上のローラン級数体 $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 上にも同じように A-, S-, T-, U-number が定義できるが, Proposition 2.4 (1) の類似が成立しないなどいくつか標数 0 と異なった現象が起きる. これらの分類のことは, [5, Section 3,4,7,9] にまとめて書いてある.

3 Automatic 数

この節では、本稿で扱う automatic 数について例を交えて紹介する。

Definition 3.1. $k \geq 2$ を整数とする。以下の 6 つ組を k -automaton という：

$$A = (Q, \Sigma_k, \delta, q_0, \Delta, \tau).$$

ただし、 Q は有限集合、 $\Sigma_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ 、 $\delta : Q \times \Sigma_k \rightarrow Q$ は写像、 $q_0 \in Q$ 、 Δ は集合、 $\tau : Q \rightarrow \Delta$ は写像。

有限語 $X = x_1x_2 \dots x_n$ ($x_i \in \Sigma_k$)、 $q \in Q$ に対して、 $\delta(q, X) = \delta(\delta(q, x_1x_2 \dots x_{n-1}), x_n)$ で帰納的に $\delta(q, X)$ を定める。整数 $n \geq 1$ に対して、 n の k 進展開を $\sum_{i=0}^r w_i k^i$ とかき、 $W_n = w_0w_1 \dots w_r$ とおく。ただし、 $W_0 := 0$ とおく。

Definition 3.2. p 進数 $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Q}_p$ は、整数 $k \geq 2$ と k -automaton $A = (Q, \Sigma_k, \delta, q_0, \Delta, \tau)$ が存在して、すべての整数 $n \geq 0$ に対して $a_n = \tau(\delta(q_0, W_n))$ となるとき automatic 数という。

automatic 数には、同値な条件がいくつか存在し [4, Section 5,6,12] などに詳しく書いてある。

Example. p 進数 $\xi := \sum_{n=0}^{\infty} p^{2^n} \in \mathbb{Q}_p$ は automatic 数。実際、 $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$ とおくと以下が成り立つ。

$$a_n = \begin{cases} 1 & (\text{整数 } k \geq 0 \text{ が存在して, } n = 2^k) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

p 進数 ξ は 2-automaton $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma_2, \delta, q_0, \{0, 1\}, \tau)$ によって生成される。ただし、 $\delta(q_0, 0) = q_0$ 、 $\delta(q_0, 1) = q_1$ 、 $\delta(q_1, j) = \delta(q_2, j) = q_2$ ($j = 0, 1$)、 $\tau(q_0) = \tau(q_2) = 0$ 、 $\tau(q_1) = 1$ 。

4 主結果

automatic 数に関して次の結果が知られている。

Theorem 4.1 (Adamczewski-Bugeaud [1]). p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ を automatic 数とする。このとき、 ξ は有理数か超越数のいずれかになる。

Theorem 4.1 を拡張し、以下の結果を得ることができた。

Theorem 4.2. p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p$ を automatic 数とする。このとき、 ξ は有理数、 S -、 T -number のいずれかになる。

この定理の証明で必要なのは、 p 進数 ξ を良く近似する有理数列を構成することなので automatic 数より広い範囲に拡張できる。その拡張を述べるのに、数列の複雑度及び Diophantine exponent を導入する。数列 $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ と整数 $m \geq 1$ に対して、

$$p_{\mathbf{a}}(m) = \text{Card}\{a_i a_{i+1} \dots a_{i+m-1} \mid i \geq 0\}$$

を \mathbf{a} の複雑度関数とよぶ。

\mathcal{A} を集合とする. \mathcal{A} 上の語 W の長さ (i.e. W の文字数) を $|W|$ とかく. 整数 $n \geq 1$ に対して, W を n 回繰り返したものを W^n とかき, 実数 $x > 0$ に対して, $W^x := W^{\lfloor x \rfloor} W'$ と定める. ただし, W' は W の長さ $\lceil (x - \lfloor x \rfloor)|W| \rceil$ の接頭語とする.

数列 \mathbf{a} の Diophantine exponent を次を満たす実数 ρ の上限とし, $\text{Dio}(\mathbf{a})$ で表す: 有限語の数列 $(U_n)_{n \geq 1}, (V_n)_{n \geq 1}$ と正の実数列 $(w_n)_{n \geq 1}$ が存在して,

- (a) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, 語 $U_n V_n^{w_n}$ は \mathbf{a} の接頭語
- (b) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, $|U_n V_n^{w_n}| \geq \rho |U_n V_n|$
- (c) 数列 $(|V_n^{w_n}|)_{n \geq 1}$ は狭義単調増加

を満たす.

p 進数 $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Q}_p$ に対して, $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ とおく. このとき, ξ の複雑度関数, Diophantine exponent をそれぞれ $p_\xi(m) := p_{\mathbf{a}}(m), \text{Dio}(\xi) := \text{Dio}(\mathbf{a})$ で定める.

このとき, 次の結果が得られた.

Theorem 4.3. p 進数 $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Q}_p$ が以下を満たすとすると:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p_\xi(n)}{n}, \quad \text{Dio}(\xi) < \infty.$$

このとき, p 進数 ξ は S -, T -number のどちらかになる.

Remark. Theorem 4.3 は, [2, Théorème 1.1] の p 進類似となっている. また, p 進数 $\xi \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ が automatic 数だとすると, Theorem 4.3 の仮定を満たす. この結果により, automatic 数の他にも primitive morphic 数や Sturm 数などのよく知られた数に対しても S -, T -number のどちらかになることがわかった.

最後に, Theorem 4.3 の証明の概略を述べる. 証明は, 以下の 2 ステップで行われる:

1. $w_1(\xi)$ の有限性
 2. 任意の $n \geq 2$ に対して, $w_n(\xi)$ の有限性.
2. の証明には部分空間定理という強力な道具を用いる. 紙面の都合上 1. の証明の概略だけ述べる.

$\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$ とおく. 十分大きい n に対して, $p_\xi(n) = O(n)$ が成立することから鳩ノ巣論法を用いると次のことがわかる. 有限語の数列 $(U_n)_{n \geq 1}, (V_n)_{n \geq 1}$ と正の実数列 $(w_n)_{n \geq 1}$ が存在して,

- (i) 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, 語 $U_n V_n^{w_n}$ は \mathbf{a} の接頭語
- (ii) ある $A > 1$ が存在して, 任意の整数 $n \geq 1$ に対して, $|U_n V_n^{w_n}| \geq A |U_n V_n|$
- (iii) 数列 $(|V_n^{w_n}|)_{n \geq 1}$ は狭義単調増加
- (iv) $|U_n|, |V_n|$ に関する不等式をいくつか満たす.

ここで digit が $U_n V_n V_n \dots$ となる p 進数を $\xi_n \in \mathbb{Q}_p$ とし, $\eta_n = p^{|U_n V_n|}$ とおく. digit が周期的なので, ξ_n は有理数となる. $\text{Dio}(\xi)$ の定義より, 正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\eta_n^{-\text{Dio}(\xi) - \varepsilon} \leq |\xi - \xi_n|_p \leq \eta_n^{-A}, \quad H(\xi_n) \leq \eta_n.$$

また (iv) を用いることで, ある定数 $B \geq 1$ と部分列 $(\eta_{m_i})_{i \geq 0}$ が存在して $\eta_{m_i} < \eta_{m_{i+1}} \ll \eta_{m_i}^B$ となる. ここで, 次の Lemma を使うことで $w_1(\xi)$ の上界を得る. この Lemma の証明は非常に初等的であるが, $w_1(\xi)$ の上界を得る手段としては非常に強力である. \mathbb{R} 版や $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ 版も存在し, その証明はそれぞれ [3, 6] などを書いてある.

Lemma 4.4. ξ を p 進数とし, $c_0 > 0, \theta \geq 1$ を実数とする. 正整数の数列 $(\beta_n)_{n \geq 1}$ が任意の整数 $n \geq 1$ に対して, $\beta_n < \beta_{n+1} \leq c_0 \beta_n^\theta$ を満たすとする. 有理数の数列 $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ と実数 $\delta, \rho, c_1, c_2, c_3 > 0$ が存在して, 任意の整数 $n \geq 1$ に対して以下を満たすとする:

$$c_1 \beta_n^{-1-\rho} \leq |\xi - \alpha_n|_p \leq c_2 \beta_n^{-1-\delta}, \quad H(\alpha_n) \leq c_3 \beta_n.$$

このとき, 次が成り立つ:

$$w_1(\xi) \leq (1 + \rho)\theta/\delta - 1.$$

参考文献

- [1] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math. 165 (2007), 547-565.
- [2] B. Adamczewski, Y. Bugeaud, *Nombres réels de complexité sous-linéaire: mesures d'irrationalité et de transcendance*, J. Reine Angew. Math. 658 (2011), 65-98.
- [3] B. Adamczewski, T. Rivoal, *Irrationality measures for some automatic real numbers*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 147 (2009), 659-678.
- [4] J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [5] Y. Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers*, Cambridge Tracts in Mathematics 160, Cambridge (2004).
- [6] A. Firicel, *Rational approximations to algebraic Laurent series with coefficients in a finite field*, Acta Arith. 157 (2013), no. 4, 297-322.
- [7] K. Mahler, *Über eine Klasseneinteilung der p -adischen Zahlen*, Mathematica Leiden 3 (1934/35), 177-185.

Derived categories and generalized complexes

小川 泰朗*

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科, 2015年2月

概要

複体とは2-微分を有する次数付き対象のことで、数学の幅広い分野で応用されている。“2-微分”であることはどれほど本質的なのだろうか？本稿ではこの問に対する1つの解答を与える。即ち、反復代数 (repetitive algebra) を通じて構成される一般化された複体についても“良い”ホモロジー群や導来圏が定義できることを示し、これらと通常の導来圏との関係について述べる。

1 2-複体の導来圏

単位元を有する結合的な環 R に対して、その導来圏 $D(R)$ とは、環 R のホモロジー代数的構造を調べる際の良い枠組みとして Grothendieck のアイデアに基づき導入されたものである。本節ではこの導来圏の構成について述べる。

本稿では簡単のため、環 R として体 k 上の有限次元代数のみを扱うものとする。右 R 加群の圏 $\text{Mod}R$ における (鎖) 複体 X^\bullet とは、 R 加群と R 準同型の列

$$X^\bullet = (\cdots \rightarrow X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \rightarrow \cdots)$$

で、全ての $i \in \mathbb{Z}$ について $d^{i+1}d^i = 0$ を満たすものを言う。複体 X^\bullet の第 i 次の項を $(X^\bullet)^i = X^i$ と表すことにする。各 d^i を複体 X^\bullet の微分というが、2つ合成すると0になることから、本稿ではしばしば2-微分と呼ぶことにする。合わせて複体のことも2-複体と呼ぶ。2-複体及びそれらの間の射 (chain map) からなる圏を2-複体の圏と言い $C(R)$ で表す。この2-複体の圏 $C(R)$ は懸垂と呼ばれる重要な関手を持つ。

定義 1.1. 2-複体 X^\bullet に対して2-複体 ΣX^\bullet を、

$$(\Sigma X^\bullet)^i := (X^\bullet)^{i+1}, \quad d_{\Sigma X}^i := -d_X^i$$

で定義することで、自己同型関手 $\Sigma : C(R) \rightarrow C(R)$ を得る。これを懸垂と言う。

懸垂とは、与えられた2-複体を左に1つずらす操作のことである。逆に、右にずらす操作 Σ^{-1} を考えることも出来、明らかに Σ と Σ^{-1} は互いに逆射になっている。

2-複体 X^\bullet 及び任意の整数 $i \in \mathbb{Z}$ に対して、その (i 次) ホモロジー群を

$$H^i(X^\bullet) := \text{Ker } d^i / \text{Im } d^{i-1}$$

*m11019b@math.nagoya-u.ac.jp

と定め、本稿ではこのホモロジー群を非常に重要な対象と考えることにする．然らば、2-複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ に誘導されるホモロジー群の間の射

$$H^i(f) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$$

が全ての i で 0 になるのはいつかを考えるのは自然なことであろう．

定義 1.2. (i) 2-複体 $P^\bullet \in C(R)$ が relative-projective であるとは、次の形をした 2-複体 P_i^\bullet の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であることを言う． $P_i^\bullet = (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow P_i = P_i \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$ ．

(ii) 2-複体の間の射 f が null-homotopic であるとは、 f がある relative-projective な対象 $P^\bullet \in C(R)$ を経由することを言う．

命題 1.3. 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が null-homotopic であれば、これに誘導されるホモロジー群の間の射 $H^i(f)$ は、全ての i で 0 となる．

これは上記の問に対する十分条件を与えている．ホモロジー群に着目した場合、null-homotopic な射を最初から 0 と見做すことは自然なアイデアであり、これを実現するものがホモトピー圏である．以下のように構成される．2-複体の圏 $C(R)$ において、null-homotopic な射を全て集めるとイデアル \mathcal{I} を構成し、圏 $C(R)$ をこのイデアル \mathcal{I} で割ったものがホモトピー圏 $K(R)$ である．

定義 1.4. ホモトピー圏 $K(R)$ とは、次の対象及び射空間で定義される．

$$(i) \text{Ob}(C(R)) := \text{Ob}(K(R)).$$

$$(ii) \text{Hom}_{K(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{C(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) / \mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet).$$

ここで、 $\mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$ は null-homotopic な射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ からなる $\text{Hom}_{C(R)}(X^\bullet, Y^\bullet)$ の部分群である．

次にホモトピー圏の持つ 2 つの重要な性質について述べる．

命題 1.5. 加群圏 $\text{Mod}R$ からホモトピー圏 $K(R)$ への自然な埋め込み関手 $\iota : \text{Mod}R \hookrightarrow K(R)$ が存在する．この埋め込みは R 加群 X に対して、2-複体 $\iota X := (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{X}_{\text{第 0 次}} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots)$ を対応させるものである．

この埋め込み関手を通じて、任意の R 加群を自然に 2-複体と見做することができる．

定義 1.6. 2-複体の圏 $C(R)$ の懸垂 Σ は、ホモトピー圏 $K(R)$ の自己同型関手を誘導する．これも記号を変えず $\Sigma : K(R) \rightarrow K(R)$ で表し、**懸垂**と呼ぶ．

命題 1.7. 2-複体 $X^\bullet \in K(R)$ について、次の同型が存在する．

$$H^i(X^\bullet) \cong \text{Hom}_{K(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで、 R 加群 R を 2-複体と見做している．

次に 2-複体の間の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ に誘導される、ホモロジー群の間の射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \cong H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になるものを考える．

定義 1.8. ホモトピー圏 $K(R)$ の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が擬同型であるとは、これに誘導される射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う．

ホモトピー圏 $K(R)$ において, 擬同型を同型と見做した圏を**導来圏** $D(R)$ と言う. より精確には, 擬同型射全体のクラス S を考え, S による $K(R)$ の Verdier 局所化 $Q: K(R) \rightarrow K(R)[S^{-1}] =: D(R)$ により定義される.

注 1.9. 可換環 A とその積閉集合 S が与えられたとき, 局所環 $R[S^{-1}]$ が定義できた. $R[S^{-1}]$ において, S に属する元は全て可逆元であった. 実はこの操作を圏に拡張したものが上記の Verdier 局所化である.

次の命題はホモロジー代数を考える際, 導来圏が良い枠組みを与えていることを示唆している.

命題 1.10. 2-複体 $X^\bullet \in D(R)$ について, 次の同型が存在する.

$$H^i(X^\bullet) \cong \text{Hom}_{D(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet).$$

ここで, R 加群 R を 2-複体と見做している.

命題 1.7 と同様の同型が導来圏でも成り立つ. つまり, 導来圏は複体のホモロジー群の情報を射空間として有しているのである.

2 N -複体の導来圏

本節では, 2-微分の代わりに N -微分を有する N -複体を定義し, 通常の 2-複体同様, ホモロジー群や導来圏が定義できることを述べる. さらに 2-複体の導来圏と N -複体の導来圏の関係について述べる.

本節を通じ $N \geq 2$ とする. 加群圏 $\text{Mod}R$ における N -複体 X^\bullet とは, 対象と射の列で, 全ての i について $d^{i-N+1} \dots d^{i+1} d^i = 0$ を満たすものを言う. N -複体の圏を $C_N(R)$ と表す.

定義 2.1. 正数 $r < N$ および $i \in \mathbb{Z}$ に対して, N -複体 X^\bullet の**ホモロジー群** $H_{(r)}^i(X^\bullet)$ を以下で定義する:

$$H_{(r)}^i(X^\bullet) := \text{Ker}(d^{i+r-1} \dots d^i) / \text{Im}(d^{i-1} \dots d^{i-r}).$$

2-複体の場合同様, N -複体の間の射にも null-homotopic が定義でき, これに誘導されるホモロジー群の間の射は 0 になる.

定義 2.2. (i) 2-複体 $P^\bullet \in C(R)$ が **relative-projective** であるとは, 次の形をした 2-複体 P_i^\bullet の直和 $\bigoplus_{i \in I} P_i^\bullet$ と同型であることを言う.

$$P_i^\bullet = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{P_i = \dots = P_i}_{N \text{ 個}} \rightarrow 0 \rightarrow \dots).$$

(ii) 2-複体の間の射 f が **null-homotopic** であるとは, f がある **relative-projective** な対象 $P^\bullet \in C(R)$ を経由することを言う.

2-複体の場合同様, null-homotopic な射の全体はイデアル \mathcal{I} をなし, N -複体のホモトピー圏が定義できる. N -**ホモトピー圏** $K_N(R)$ とは, N -複体を対象とし, 任意の N -複体 X^\bullet, Y^\bullet に対し射空間を

$$\text{Hom}_{K_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{C_N(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) / \mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

により定義したものである.

続いて、2-複体の場合を真似て N -複体の導来圏を定義する。 N -ホモトピー圏 $K_N(R)$ の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が擬同型であることを、これに誘導される射 $H_{(r)}^i(f) : H_{(r)}^i(X^\bullet) \rightarrow H_{(r)}^i(Y^\bullet)$ が各 i, r がで同型になることで定義し、擬同型射全体 S による Verdier 局所化 $K_N(R)[S^{-1}]$ が N -導来圏 $D_N(R)$ である。通常の導来圏と同様、直感的には N -ホモトピー圏において、擬同型を同型と見做した圏である。

環 R に対して、通常の導来圏 $D(R)$ と N -導来圏 $D_N(R)$ の関係を調べるのは自然なことであろう。次の結果が知られている。

定理 2.3. [IKM] 次の圏同値が存在する¹ : $D_N(R) \simeq D(\mathbb{T}_{N-1}(R))$. ここで、 $\mathbb{T}_{N-1}(R)$ は上三角行列環である。

3 \hat{A} -複体の導来圏

定義 3.1. [Hap, HW] 標準 k 双対を $D := \text{Hom}_k(-, k)$ と表す。有限次元 k 代数 A に対して、その反復代数 \hat{A} とは、ベクトル空間

$$\hat{A} := \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} DA \right)$$

に、積 $(a_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cdot (b_i, \psi_i)_{i \in \mathbb{Z}} := (a_i b_i, a_{i+1} \psi_i + \varphi_i b_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ を定めたものである。

定義 3.2. 反復代数 \hat{A} を自然に k 線型圏とみなす。 k 線型圏 \hat{A} から $\text{Mod} R$ への共変 k 線型関手の圏 $\text{Fun}_k(\hat{A}, \text{Mod} R)$ を、 \hat{A} -複体の圏といい $C_{\hat{A}}(R)$ で表す。

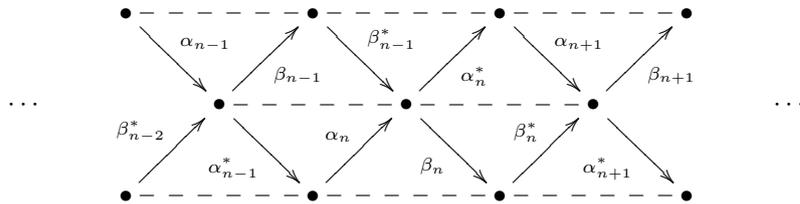
例 3.3. 反復代数 \hat{A} の構造を表す有向グラフの例をしてみる。

(i) 上三角行列環 $A = \mathbb{T}_{N-1}(k)$ の反復代数 \hat{A} の有向グラフは、

$$\cdots \rightarrow \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \bullet \xrightarrow{d} \cdots, \quad d^N = 0$$

で与えられる。つまり、圏同値 $\text{Fun}_k(\hat{A}, \text{Mod} R) \simeq C_N(R)$ を得る。

(ii) 行列環 $A = \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の反復代数 \hat{A} を表す有向グラフは、



及び関係式 $\beta_n \alpha_n = 0, \alpha_n^* \beta_{n-1}^* = 0, \alpha_{n+1} \alpha_n^* = \beta_n^* \beta_n$ により与えられる。

以上の例から分かるように反復代数が与えられれば、それを表現する有向グラフが得られる。この有向グラフに R 加群と R 準同型を貼り付けたものが \hat{A} -複体である。

第 1, 2 節同様、 \hat{A} -複体に対しても relative-projective な対象を定義する。

¹より精確には、 $D_N(R)$ 及び $D(\mathbb{T}_{N-1}(R))$ は三角圏構造を有することが示される。即ち、この圏同値は三角同値である。

定義 3.4. (i) 射影的な左 \hat{A} 加群 P 及び R 加群 Z に対して, $P \otimes_k Z$ を次の方法で $C_{\hat{A}}(R)$ の対象と見做す. 圏 $C_{\hat{A}}(R)$ の対象とは \hat{A} から $\text{Mod} R$ への関手であるから,

$$P \otimes_k Z : \hat{A} \xrightarrow{P} \text{Mod} k \xrightarrow{- \otimes_k X} \text{Mod} R.$$

と考えればよい. $P \otimes_k X$ の形で書ける $C_{\hat{A}}(R)$ の対象を **relative-projective** と言う.

(ii) 圏 $C_{\hat{A}}(R)$ の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が **null-homotopic** であるとは, f がある relative-projective な対象を経由することを言う.

null-homotopic 射全体はイデアル \mathcal{I} を成す. \hat{A} -ホモトピー $K_{\hat{A}}(R)$ とは $C_{\hat{A}}(R)$ をイデアル \mathcal{I} で割ったもの, つまり射空間を

$$\text{Hom}_{K_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) := \text{Hom}_{C_{\hat{A}}(R)}(X^\bullet, Y^\bullet) / \mathcal{I}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

としたものである.

\hat{A} -導来圏を定義するには, ホモロジー群と擬同型を定義する必要がある. 2-複体 X^\bullet のホモロジー群 $H^i(X^\bullet)$ がホモトピー圏上の射空間 $\text{Hom}_{K(R)}(R, \Sigma^i X^\bullet)$ と同型であることに着目する (命題 1.7).

定義 3.5. (i) \hat{A} 加群 A 及び R 加群 R に対して, \hat{A} -複体 $A \otimes_k R$ を考える. このとき \hat{A} -複体 X^\bullet の (i 次) **ホモロジー群** を,

$$H^i(X^\bullet) := \text{Hom}_{K(R)}(A \otimes_k R, \Sigma^i X^\bullet)$$

で定める. ここで Σ は $K_{\hat{A}}(R)$ の懸垂である².

(ii) \hat{A} -ホモトピー圏 $K_{\hat{A}}(R)$ の射 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ が**擬同型**であるとは, これに誘導される射 $H^i(f) : H^i(X^\bullet) \rightarrow H^i(Y^\bullet)$ が各 i で同型になることを言う.

(iii) 擬同型全体 S による Verdier 局所化 $K_{\hat{A}}(R)[S^{-1}]$ を \hat{A} -導来圏 $D_{\hat{A}}(R)$ と言う.

最後に主結果として, \hat{A} -導来圏 $D_{\hat{A}}(R)$ も環 R を取り換えることで通常の導来圏として, 実現できることを述べる.

定理 3.6. 圏同値 $D_{\hat{A}}(R) \simeq D(A \otimes_k R)$ が存在する.

参考文献

- [Hap] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [HW] D. Hughes, J. Waschbüsch, *Trivial extensions of tilted algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), no. 3, 641–648.
- [IKM] O. Iyama, K. Kato, J. Miyachi, *Derived categories of N -complexes*, preprint arXiv:1309.6039.

²2-複体の圏において懸垂とは2-複体を左にずらす操作であった. しかし, \hat{A} -複体の懸垂はこのような簡単な記述にはならない. 任意の \hat{A} -複体 X^\bullet に対して, ある relative-projective な対象 $P \otimes_k Z$ 及び完全列 $0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow P \otimes_k Z \rightarrow \Sigma X^\bullet \rightarrow 0$ がいつでも存在することが示される. この Σ が \hat{A} -ホモトピー圏と \hat{A} -導来圏の懸垂を導くのである.

Eisenstein 級数の定数項と合同加群について

小澤 友美*

東北大学大学院理学研究科数学専攻, 2015 年 2 月

この度は第 12 回城崎新人セミナーに参加して, 有意義な時間を過ごすことができました. 参加及び講演の機会を下された運営委員の皆さんに, この場をお借りして感謝申し上げます.

本稿では合同加群の定義, 基本的な例および L 関数の特殊値の研究への応用について, 整数論以外を専門とする方にも大まかな雰囲気や伝わるような紹介を試みます. 講演のアブストラクトには, 総実代数体上定義される Eisenstein 級数の定数項の計算を紹介し, 時間が許せばその計算の動機となった太田の合同加群の理論 ([Oh] 参照) を紹介すると書きました. しかし実際の講演ではほとんどの時間を合同加群の定義と例の紹介に費やし, Eisenstein 級数については最後に少し触れるのみとなりました. もともとご紹介する予定でした Eisenstein 級数の定数項の計算は, 有理数体上定義される場合には論文 [Oh] で太田により計算されており, 総実代数体の場合も特に新しい手法を導入することなく計算できます. 講演者は定数項の計算そのものよりも, 計算の動機となった背景にある数学のほうが話題として魅力的であると思ひ, 講演の内容を変更しました.

なお, 今回の講演及び本稿の執筆にあたり, 論説 [H2] を大いに参考に致しました.

1 合同加群の定義と基本的な例

本節の内容は [H1] の第 1 節及び [Oh] の第 1 章第 1 節に基づいている. A を標数 0 の Noether 整域, R と B をそれぞれ A 加群で A 上有限生成かつ平坦なもの, $\lambda: R \rightarrow B$ を A 加群の全射準同型とする. 定義から次の A 加群の列は完全である:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\lambda) \longrightarrow R \xrightarrow{\lambda} B \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

K を A の商体とする. 完全列 (1.1) を K 上に係数拡大して得られる列が完全かつ分裂すると仮定する:

$$0 \longleftarrow \text{Ker}(\lambda) \otimes_A K \xleftarrow{t} R \otimes_A K \xleftarrow{s} B \otimes_A K \longleftarrow 0 \quad (1.2)$$

この仮定のもとで, 次の写像の合成が考えられる:

$$\rho: R \longrightarrow R \otimes_A K \cong (\text{Ker}(\lambda) \otimes_A K) \oplus (B \otimes_A K) \xrightarrow{t} \text{Ker}(\lambda) \otimes_A K.$$

このとき写像 $\lambda \oplus \rho: R \rightarrow B \oplus \rho(R)$ は単射となることが確かめられる.

定義 1.1. $\text{Coker}(\lambda \oplus \rho)$ を, 完全列 (1.1) とその商体上の分裂 (1.2) の組に対する合同加群という.

合同加群は完全列 (1.1) のみならず, その商体上の分裂 (1.2) の取り方にも依存する. そのことを次に紹介する例で確認してほしい.

*sb2m06@math.tohoku.ac.jp

例 1.2. 次の \mathbb{Z} 加群の完全列を考える :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (1.3)$$

ここで $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ は $\iota(x) = (2x, -x)$, $\lambda: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ は $\lambda(x, y) = x + 2y$ でそれぞれ定義される .
 $i = 1, 2, 3$ に対し, 完全列 (1.3) の \mathbb{Q} 上の分裂 (1.4) _{i}

$$0 \longleftarrow \mathbb{Q} \xleftarrow{t_i} \mathbb{Q}^2 \xleftarrow{s_i} \mathbb{Q} \longleftarrow 0$$

を与え, 完全列 (1.3) と分裂 (1.4) _{i} の組に対する合同加群を C_i と表す . 次がその一覧である :

$$\begin{aligned} s_1(x) &= (x, 0), & t_1(x, y) &= -y, & C_1 &= \{0\}; \\ s_2(x) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{4}\right), & t_2(x, y) &= \frac{x - 2y}{4}, & C_2 &= \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}; \\ s_3(x) &= \left(\frac{x}{9}, \frac{4x}{9}\right), & t_3(x, y) &= \frac{4x - y}{9}, & C_3 &= \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2 L 関数と合同加群 : 初歩的な例を通して

前節で見たように, 合同加群は環論的操作で定義される対象である . 本節では合同加群と数論, 特に L 関数とを結び付けたい . L 関数にはさまざまなものがあるが, ここではなるべく話を簡潔にするため代数体の Dedekind ゼータ関数を考える . F を \mathbb{Q} の有限次拡大体 (このような体を代数体と呼ぶ), O_F を F の元で整数係数モノック多項式の根であるもの全体の集合 (この集合は F の加法と乗法について環となり, F の整数環と呼ばれる), I を F から \mathbb{C} への体準同型全体の集合とする . I の元の個数は F/\mathbb{Q} の拡大次数に一致する . また, I は次のように表される :

$$I = \{\tau_0, \dots, \tau_{r_1-1}, \tau_{r_1}, \dots, \tau_{r_1+r_2-1}, c \circ \tau_{r_1}, \dots, c \circ \tau_{r_1+r_2-1}\}.$$

ここで r_1, r_2 は 0 以上の整数で, 整数 $0 \leq i \leq r_1 - 1$ について $\tau_i(F)$ は実数体 \mathbb{R} に含まれ, $r_1 \leq i \leq r_1 + r_2 - 1$ について $\tau_i(F)$ は \mathbb{R} に含まれない . c は \mathbb{C} 上の複素共役を表す . $\tau \in I$ による $\alpha \in F$ の像を α^τ で表す . $F_+ = \{\alpha \in F \mid \alpha^{\tau_i} > 0, \forall i = 0, \dots, r_1 - 1\}$ とする . $I_F(O_F)$ を F の分数イデアル全体のなす乗法群とし, その部分群を $P_F^+(O_F) = \{\alpha O_F \mid \alpha \in F_+\}$ で定める . 商群 $\text{Cl}_F^+ = I_F(O_F)/P_F^+(O_F)$ を F の狭義イデアル類群といい, 有限群であることが知られている .

F の Dedekind ゼータ関数 $\zeta_F(s)$ は複素関数で, $\text{Re}(s) > 1$ の範囲では無限級数

$$\zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})^{-s}$$

で定義される . ただし右辺の和で \mathfrak{a} は 0 でない O_F のイデアルをすべて互り, $N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})$ は剰余環 O_F/\mathfrak{a} の位数である (0 でない \mathfrak{a} に対しこの位数は常に有限となる) . F が有理数体のとき $\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ は Riemann ゼータ関数に一致する . $\zeta_F(s)$ は全平面 \mathbb{C} で定義される有理型関数に解析接続され, $s = 1$ で 1 位の極を持つことが知られている . $\zeta_F(s)$ の $s = 1$ での留数は以下のように記述される :

定理 2.1 (類数公式, [Mi] Theorem 3.3.1). w を F に含まれる 1 のべき根の総数, D を F/\mathbb{Q} の判別式, O_F^\times を O_F の単数群, $E = O_F^\times \cap F_+$, R を E の単数基準とする (これは 0 でない実数). $U_\infty = 2^{r_1} (2\pi)^{r_2} |R|/w\sqrt{|D|}$ とおく . $|\text{Cl}_F^+|$ で Cl_F^+ の位数を表す . このとき次の等式が成り立つ :

$$\text{Res}_{s=1} \zeta_F(s) = |\text{Cl}_F^+| \cdot U_\infty. \quad (2.1)$$

一旦合同加群の話に戻ろう． A, K は前節と同じものを指す． A^\times を A の乗法に関する可逆元全体のなす乗法群とする．有限群 G と群準同型 $\lambda: G \rightarrow A^\times$ が与えられたとする． λ を G の A 上の群環 $A[G] = \bigoplus_{\sigma \in G} A\sigma$ に，対応 $\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma \mapsto \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \lambda(\sigma)$ ($a_\sigma \in A$) により延長することができる．この延長を $\lambda_a: A[G] \rightarrow A$ と書く． λ_a は定義から全射である． A 加群の完全列

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\lambda_a) \longrightarrow A[G] \xrightarrow{\lambda_a} A \longrightarrow 0. \quad (2.2)$$

の商体上の分裂 $s: K \rightarrow K[G]$ を $s(1) = \frac{1}{\#G} \sum_{\sigma \in G} \lambda(\sigma)^{-1} \sigma$ で定める．すると完全列 (2.2) と分裂 s の組に対する合同加群は $A/G|A$ となる．特に $G = \text{Cl}_F^+$ で $\lambda: \text{Cl}_F^+ \rightarrow \mathbb{C}^\times$ が群準同型のとき， λ の値を含むような代数体 K の整数環 A について，上の合同加群は $A/|\text{Cl}_F^+|A$ となる．

注意 2.2. 専門家向けに注意すると， $A[\text{Cl}_F^+]$ は F 上の GL_1 の保型形式のレベル O_F の Hecke 環に同型であり， A 代数の準同型 $\lambda_a: A[\text{Cl}_F^+] \rightarrow A$ を与えることはレベル O_F の保型形式で Hecke 指標であるものを与えることに相当する．詳細は [H1] の第 2 節を参照せよ．

以上の話をやや強引にまとめると，保型形式に関連する文脈で合同加群を考えると，そこに Dedekind ゼータ関数の留数に関する情報が現れるという現象を観察したことになる．

3 モジュラー形式，合同加群と L 関数の特殊値

3.1 楕円モジュラー形式

楕円モジュラー形式と L 関数に関する基本事項は例えば [Mi] にあるので，必要に応じて参照してほしい． $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ を複素上半平面， $SL_2(\mathbb{Z})$ を整数係数の 2 次正方行列で行列式が 1 であるもの全体のなす群とする． $SL_2(\mathbb{Z})$ は上半平面 \mathfrak{h} に 1 次分数変換で作用する：

$$\gamma z = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{for } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \quad \text{and } z \in \mathfrak{h}.$$

関数 $f: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ ，行列 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ ，整数 k に対し， \mathfrak{h} 上の関数 $f|_k \gamma$ を次で定める：

$$(f|_k \gamma)(z) = f(\gamma z)(cz + d)^{-k} \quad (z \in \mathfrak{h}).$$

正の整数 N に対し $\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{N}, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ とおく．

定義 3.1. k を非負整数， N を 1 以上の整数とする． f が重さ k ，レベル N の楕円モジュラー形式 (resp. 楕円尖点形式) であるとは， f が次の条件を満たすことをいう：

(3.1a) f は \mathfrak{h} 上の複素数値正則関数；

(3.1b) 任意の $\gamma \in \Gamma_1(N)$ に対し $f|_k \gamma = f$ ；

(3.1c) f は各尖点の近傍で有界 (resp. 急減少)．

条件 (3.1c) について詳しく述べる．任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $\gamma \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma^{-1} \in \Gamma_1(N)$ であることに注意すると，条件 (3.1b) より各 $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $(f|_k \gamma)(z + N) = (f|_k \gamma)(z)$ が成り立つ．よって $(f|_k \gamma)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a\left(\frac{n}{N}, f|_k \gamma\right) q^{\frac{n}{N}}$ と Fourier 展開される．ただし $q = \exp(2\pi iz)$ とおいた．このとき f が各尖点の近傍で有界 (resp. 急減少) とは，任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ と任意の整数 $n < 0$ (resp. $n \leq 0$) に対し $a\left(\frac{n}{N}, f|_k \gamma\right) = 0$ が成り立つことである．

重さ k ，レベル N の楕円モジュラー形式 (resp. 楕円尖点形式) のなす複素ベクトル空間を $M_k(N)$ (resp. $S_k(N)$) と書く．任意の k と N に対し $M_k(N)$ は有限次元複素ベクトル空間である．

3.2 Eisenstein 級数

定義から $S_k(N)$ は $M_k(N)$ の部分空間であるが、尖点形式でないモジュラー形式で特に重要なものが Eisenstein 級数である。簡単のため重さ k は 2 以上とする。 η, ψ をそれぞれ導手が u, v である Dirichlet 指標で、 $(\eta\psi)(-1) = (-1)^k$ を満たすとする。 $k = 2$ のときは更に η と ψ の少なくとも一方は非自明な指標であると仮定する。 $N = uv$ とおく。指標の組 (η, ψ) に付随する重さ k の Eisenstein 級数 $E_k(\eta, \psi)$ は

$$E_k(\eta, \psi)(z) = \frac{v^k(k-1)!}{2(2\pi i)^k \tau(\psi^{-1})} \sum_{a_1=1}^u \sum_{a_2=1}^N \eta(a_1)\psi^{-1}(a_2) \lim_{s \rightarrow 0} G_k(z, s, a_1 v, a_2, N) \quad (3.1)$$

で定義される。ここで整数 a_1, a_2 , 複素変数 s に対し

$$G_k(z, s, a_1, a_2, N) = \sum_{\substack{(a,b) \in \mathbb{Z}^2, (a,b) \neq (0,0), \\ a \equiv a_1 \pmod{N}, b \equiv a_2 \pmod{N}}} \frac{1}{(az+b)^k |az+b|^{2s}},$$

$$\tau(\psi^{-1}) = \sum_{j=1}^v \psi^{-1}(j) \exp\left(2\pi i \frac{j}{v}\right)$$

である。上の無限和は $\operatorname{Re}(k+2s) > 2$ で絶対収束し、 $G_k(z, s, a_1, a_2, N)$ は s について全平面 \mathbb{C} で定義される有理型関数に解析接続され、 $s = 0$ で正則であることが知られている ($k \geq 3$ のときは上の無限和で $s = 0$ としたものが絶対収束し $\lim_{s \rightarrow 0} G_k(z, s, a_1, a_2, N)$ に一致する)。 $E_k(\eta, \psi)$ は重さ k , レベル N の楕円モジュラー形式になっている。(3.1) 式の右辺を Fourier 展開すると

$$E_k(\eta, \psi)(z) = \delta_{\eta,1} 2^{-1} L(\psi, 1-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0 < d|n} \eta\left(\frac{n}{d}\right) \psi(d) d^{k-1} \right) q^n$$

となる。ここで $\delta_{\eta,1}$ は η が自明な指標のとき 1, それ以外は 0 で、 $L(\psi, s)$ は ψ に付随する Dirichlet L 関数である。右辺の和で d は n の正の約数を全て互る。太田は [Oh] で各 $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し $E_k(\eta, \psi)|_{k\gamma}$ の Fourier 展開の定数項の値を求めた：

命題 3.2 ([Oh] Proposition 2.5.5). $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対し、 $a(0, E_k(\eta, \psi)|_{k\gamma})$ の値は c が v の倍数でないとき 0 で、 c が v の倍数のときは以下に一致する：

$$2^{-1} \frac{\tau(\eta\psi^{-1})}{\tau(\psi^{-1})} \eta\left(-\frac{c}{v}\right) \psi^{-1}(a) \left(\frac{v}{\operatorname{cond}(\eta\psi^{-1})}\right)^k \prod_{\substack{l|N, \\ l \nmid \operatorname{cond}(\eta\psi^{-1})}} (1 - (\eta\psi^{-1})(l) l^{-k}) L(\eta^{-1}\psi, 1-k).$$

ここで $\operatorname{cond}(\eta\psi^{-1})$ は $\eta\psi^{-1}$ の導手で、積の l は N を割り $\operatorname{cond}(\eta\psi^{-1})$ を割らない素数を互る。

注意 3.3. 楕円モジュラー形式の一つの一般化として Hilbert モジュラー形式がある。志村は Eisenstein 級数 $E_k(\eta, \psi)$ を Hilbert モジュラー形式の場合に一般化した ([Sh] 第 3 節参照)。講演者はこの Hilbert Eisenstein 級数の定数項を命題 3.2 に倣って計算した (arXiv:1410.7440 に論文がある)。

3.3 Eisenstein 級数, 合同加群と L 関数の特殊値

この節では簡単のためレベル N は 1, 重さ k は 4 以上の偶数とする。5 以上の素数 p を $k \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ となるように取る。 \mathbb{Z} を p 進距離で完備化して得られる整域を \mathbb{Z}_p , その商体を

\mathbb{Q}_p とする . \mathbb{Q} (resp. \mathbb{Q}_p) の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ (resp. $\bar{\mathbb{Q}}_p$) と体準同型 $\bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$, $\bar{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$ をそれぞれ固定する . このとき次の平坦 \mathbb{Z}_p 加群の完全列がある :

$$0 \longrightarrow S_k(1, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow M_k(1, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0. \quad (3.2)$$

ただし $M_k(1, \mathbb{Z}_p) = M_k(1, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, $M_k(1, \mathbb{Z}) = \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n, f)q^n \mid a(n, f) \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0\}$ で , $S_k(1, \mathbb{Z}_p)$ も同様に定義する . λ は $\lambda(f) = a(0, f)$ で与えられる . 前節で定義した Eisenstein 級数 $E_k(1, 1)$ を単に E_k と書く . E_k は

$$E_k(z) = 2^{-1}\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{0 < d|n} d^{k-1} \right) q^n$$

と Fourier 展開される . k と p に関する仮定から $\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)$ は 0 でない \mathbb{Z}_p の元なので , E_k は $M_k(1, \mathbb{Z}_p)$ に属する . (3.2) の \mathbb{Q}_p 上の分裂 $s: \mathbb{Q}_p \rightarrow M_k(1, \mathbb{Q}_p)$ を $s(1) = 2\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)^{-1}E_k$ で与えると , 完全列 (3.2) と分裂 s の組に付随する合同加群は $\mathbb{Z}_p/\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)\mathbb{Z}_p$ となる . よってこの合同加群の位数を知ることは $\zeta_{\mathbb{Q}}(1-k)$ の分子が p で何回割れるかを知ることと同等である . 太田は [Oh] においてより一般の設定でこのようにモジュラー形式に伴う短完全列と分裂を考え , それに付随する合同加群が命題 3.2 で求めた Eisenstein 級数の定数項を用いて計算できることを示した .

3.4 合同加群の周辺の研究と今後の展望

数論において L 関数の特殊値の研究は重要だが , 今回のように敢えて合同加群を用いて間接的に L 関数の特殊値を捉えることに意味はあるのだろうか . 合同加群の理論については太田自身が [Oh] で , 有理数体上の岩澤予想を見通し良く再証明するのに応用しているほか , [H3] など岩澤理論におけるいくつかの重要な論文で用いられている . 既に見たように , 上のような合同加群を考えるにはモジュラー形式の空間の構造に関する情報が必要となる . L 関数の特殊値を Eisenstein 級数というモジュラー形式の定数項と思うことにより , 合同加群という L 関数の特殊値よりも多くの情報を含むと思われる対象が定義でき , L 関数の特殊値の研究に新たな道が開ける——合同加群を応用している研究の背景にはそのような考え方があるように思えてならない . Hilbert モジュラー形式についても同様の研究ができれば総実代数体の岩澤理論の進展につながるだろう .

参考文献

- [H1] Hida, H., *Hecke algebras for GL_1 and GL_2* , Séminaire de théorie des nombres, Paris 1984–85, 131–163, Progr. Math. 63, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1986.
- [H2] Hida, H., *Galois representations and the theory of p -adic Hecke algebras*, (Japanese) Sugaku Expositions 2 (1989), no. 1, 75–102. Sūgaku 39 (1987), no. 2, 124–139.
- [H3] Hida, H., *Image of Λ -adic Galois representations modulo p* , Invent. Math. 194 (2013), no. 1, 1–40.
- [Mi] Miyake, T., *Modular forms*, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda. Reprint of the first 1989 English edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Oh] Ohta, M., *Congruence modules related to Eisenstein series*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 2, 225–269.
- [Sh] Shimura, G., *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. 45 (1978), no. 3, 637–679.

1次元定常輸送方程式の正則性解析

川越 大輔*

京都大学大学院情報学研究科, 2015年2月

1 問題設定

Ω を开区間 $(0, 1)$, S^1 を単位円とし, 次の微分積分方程式を考える:

$$-\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} I(x, \xi) - (\mu_a + \mu_s) I(x, \xi) + \mu_s \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(x, \xi') d\sigma_{\xi'} = 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times S^1. \quad (1)$$

ただし, θ は $\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$ を満たす $(-\pi, \pi]$ の元であり, 以下この関係により S^1 と $(-\pi, \pi]$ を同一視する. また, $d\sigma$ は S^1 上の線素とする. ここで, μ_a および μ_s は非負の定数, p は $S^1 \times S^1$ 上の連続関数であることを仮定する. 本稿では, 方程式 (1) を1次元定常輸送方程式と呼ぶ.

定常輸送方程式 (1) には, 通常次の境界条件が課される:

$$I(x, \xi) = I_0(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Gamma_-. \quad (2)$$

ただし,

$$\Gamma_- := \{(0, \xi) | 0 < \theta < \pi\} \cup \{(1, \xi) | -\pi < \theta < 0\}$$

とする.

最後に, 定常輸送方程式の境界値問題の解を次のように定義する. ただし, $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ は $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上の有界連続関数全体からなるベクトル空間とし,

$$\|I\|_\infty := \sup_{(x, \xi) \in (\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-} |I(x, \xi)|$$

で定義されるノルム $\|\cdot\|_\infty$ により Banach 空間となる.

定義 1 $I \in C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ が次の積分方程式を満たすとき, I は定常輸送方程式の境界値問題 (1)-(2) の解であるという.

$x \in [0, 1), \theta \in (0, \pi)$ のとき,

$$I(x, \xi) = \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta} x\right) I_0(0, \xi) + \frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_0^x \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta} (x-t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (3)$$

$x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき,

$$I(x, \xi) = \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta} (1-x)\right) I_0(1, \xi) - \frac{\mu_s}{\sin\theta} \int_x^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin\theta} (t-x)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (4)$$

本稿では, この境界値問題の存在と一意性, さらに境界値の滑らかさと解の滑らかさとの関係について述べる.

*d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp

2 主結果

定理 1 $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$ かつ $\mu_a > 0$ と仮定する. このとき, 境界値問題 (1) - (2) はただ1つの解 I をもつ.

定理 2 定理 1 と同じ仮定するとき, $\frac{\partial I}{\partial x}$ が存在して $C(\Omega \times S^1)$ に属する. さらに, 解 I は $\Omega \times S^1$ において x について無限回微分可能である.

定理 3 定理 1 の仮定に加えて, p が C^1 級でかつ $\frac{\partial I_0}{\partial \theta}$ が $C_b(\Gamma_-)$ に属すると仮定する. このとき, $\frac{\partial I}{\partial \theta}$ が存在して $C(\Omega \times S^1)$ に属する.

3 定理 1 の証明

まずは一意性を示す. I_1, I_2 を解とし, その差を I とおく. すなわち, $I := I_1 - I_2$. このとき, 解の定義から I は $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ に属し, 次の積分方程式を満たすことが分かる:

$x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$ のとき,

$$I(x, \xi) = \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^x \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(x-t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (5)$$

$x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき,

$$I(x, \xi) = -\frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_x^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(t-x)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt. \quad (6)$$

(5), (6) を評価することで, 不等式 $\|I\|_{\infty} \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I\|_{\infty}$ を得る. この不等式からただちに, $I = 0$ すなわち $I_1 = I_2$ がしたがう.

次に, 解の存在を構成によって示す. 関数列 $\{I^{(n)}\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する. $I^{(0)}$ を

- $x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$ のとき, $I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}x\right) I_0(0, \xi)$.
- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき, $I^{(0)}(x, \xi) := \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(1-x)\right) I_0(1, \xi)$.
- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$ のとき, $I^{(0)}(x, \xi) := 0$.

で定義する. $I^{(n)}$ まで定義できたとして, $I^{(n+1)}$ を

- $x \in [0, 1], \theta \in (0, \pi)$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := \frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_0^x \exp\left(-\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(x-t)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

- $x \in (0, 1], \theta \in (-\pi, 0)$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := -\frac{\mu_s}{\sin \theta} \int_x^1 \exp\left(\frac{\mu_a + \mu_s}{\sin \theta}(t-x)\right) \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(t, \xi') d\sigma_{\xi'} dt.$$

- $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$ のとき,

$$I^{(n+1)}(x, \xi) := \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \int_{S^1} p(\xi, \xi') I^{(n)}(x, \xi') d\sigma_{\xi'}.$$

で定義する. このとき, 次の2つが簡単な計算により分かる.

補題 1 $I^{(n)} \in C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ と仮定する. このとき, 次の評価が成り立つ.

$$\|I^{(n+1)}\|_\infty \leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \|I^{(n)}\|_\infty.$$

命題 1 $I_0 \in C_b(\Gamma_-)$ ならば, すべての $n \geq 0$ に対して, $I^{(n)} \in C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ が成り立つ.

補題 1 と命題 1 から, $I(x, \xi) := \sum_{n=0}^{\infty} I^{(n)}(x, \xi)$ が $(\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-$ 上絶対一様収束し, $C_b((\Omega \times S^1) \cup \Gamma_-)$ に属することが分かる. また, この $I(x, \xi)$ が解となっていることも級数の計算により確認できる. 以上より, 解の存在が示された.

4 定理 2 の証明

証明の概略を述べる前に, 次の2つに言及しておく. 1つ目は, 定常輸送方程式 (1) の形から, $I(x, \xi)$ が $\theta \notin \{0, \pi\}$ のとき x について連続的微分可能であることは自明である, ということである. したがって, $\theta \in \{0, \pi\}$ の場合について微分可能性を議論することになる. ところが, 元の方程式からこの場合の微分可能性を議論することができない. そのため, 前節で得られた級数解を項別微分し, その級数の収束を確認することを本節の目標とする. 2つ目の言及点は, 1階導関数は一般に非有界になることが知られている, ということである [A]. この事情から, 先ほどと同様の一様収束評価をただちに用いることができない. そこで, 本稿では開区間 $(0, 1)$ の内部にコンパクト集合 K をとり, $K \times S^1$ 上での導関数の一様収束を示す. 以上の点をふまえて, 本節では次の2つの命題を示す.

命題 2 K を Ω のコンパクト部分集合とする. このとき, 任意の $n \geq 0$ に対して, $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$ は $K \times S^1$ 上連続 (したがって有界) である.

命題 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}(x, \xi)$ は $K \times S^1$ 上絶対一様収束する.

ここで, K として閉区間 $[\delta, 1 - \delta]$, $0 < \delta < 1/2$ のみを考える. この場合のみ議論すれば十分である. このようにとった K に対して,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = \delta$$

を満たす正数列 $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ をとる. さらに, $\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ に対応する閉区間の列 $\{K_n\}_{n \geq 0}$ を

$$K_n := \left[\sum_{m=0}^n \delta_m, 1 - \sum_{m=0}^n \delta_m \right]$$

で定義する. $K \times S^1, K_n \times S^1$ 上の連続関数の最大値ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_K, \|\cdot\|_n$ で表すことにする. このとき, 次の補題が成立する.

補題 2 $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$ が $K_n \times S^1$ 上連続ならば, $\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上連続でかつ次の不等式を満たす.

$$\left\| \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial x} \right\|_{n+1} \leq \frac{2\mu_s}{e\delta_{n+1}(\mu_a + \mu_s)} \|I^{(n)}\|_\infty + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n.$$

定義より任意の $n \geq 0$ に対して $K \subset K_n$ が成り立つから, 補題 2 から命題 2 が成立することが分かる. また, 特に $\tilde{\mu}_a := \frac{\mu_a}{2}$, $\delta_0 := \frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta$, $\delta_{n+1} := \frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \delta_n$ ととれば, 次の評価が成り立つことが分かる.

$$\left\| \frac{\partial I}{\partial x} \right\|_K \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n \leq \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial x} \right\|_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n + \frac{2\|I_0\|_{\Gamma_-}}{e\delta_0} \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\tilde{\mu}_a + \mu_s}{\mu_a + \mu_s} \right)^n.$$

ただし, $\|\cdot\|_{\Gamma_-}$ は Γ_- 上の最大値ノルムを表す. 右辺は有限確定するから, 命題 3 が示された.

一般の m 階導関数については, 次が成り立つ.

補題 3 任意の $m, n \geq 0$ に対して, $\frac{\partial^m I^{(n)}}{\partial x^m}$ が $K_n \times S^1$ 上連続ならば, $\frac{\partial^m I^{(n+1)}}{\partial x^m}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上連続でかつ次の不等式を満たす.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^m I^{(n+1)}}{\partial x^m} \right\|_{n+1} &\leq \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial^m I^{(n)}}{\partial x^m} \right\|_n \\ &\quad + \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{m-k}{e\delta_{n+1}} \right)^{m-k} \left\| \frac{\partial^k I^{(n)}}{\partial x^k} \right\|_n \\ &\quad + \frac{2\mu_s}{e(\mu_a + \mu_s)} \left(\frac{m}{e\delta_{n+1}} \right)^m \|I^{(n)}\|_\infty. \end{aligned}$$

$\{\delta_n\}_{n \geq 0}$ として, $\delta_0 = \delta_0^{(m)} := \left(1 - \left(\frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \delta$, $\delta_{n+1} = \delta_{n+1}^{(m)} := \left(\frac{\mu_s}{\tilde{\mu}_a + \mu_s} \right)^{\frac{1}{m}} \delta_n^{(m)}$ をと

れば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m I^{(n)}}{\partial x^m}$ が $K \times S^1$ 上絶対一様収束することを示すことができる.

5 定理 3 の証明

定理 3 の証明の方針は, 定理 2 と同様である. ただし, x 方向の微分可能性とは異なり, $\theta \in \{0, \pi\}$ の場合の θ 方向微分可能性は少し複雑な計算を要する.

命題 4 $x \in (0, 1), \theta \in \{0, \pi\}$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^{(0)}}{\partial \theta}(x, \xi) &= 0, \\ \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial \theta}(x, \xi) &= \frac{\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \int_{S^1} \frac{\partial p}{\partial \theta}(\xi, \xi') I^{(n)}(x, \xi') d\sigma_{\xi'} \\ &\quad - \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2} \int_{S^1} p(\xi, \xi') \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}(x, \xi') d\sigma_{\xi'}. \end{aligned}$$

補題 2 に対応して, θ 偏導関数に対して次の補題が成り立つ.

補題 4 $\frac{\partial I^{(n)}}{\partial x}$ が $K_n \times S^1$ 上連続ならば, $\frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial \theta}$ は $K_{n+1} \times S^1$ 上連続でかつ次の不等式を満たす.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial I^{(n+1)}}{\partial \theta} \right\|_{n+1} &\leq C \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2 \delta_{n+1}} \|I^{(n)}\|_\infty + \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n \\ &\quad + \frac{2\pi\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\|_\infty \|I^{(n)}\|_\infty. \end{aligned}$$

ただし, $C > 0$ は n と δ によらない定数.

補題 4 から次の評価が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial \theta} \right\|_K &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial \theta} \right\|_n \\ &\leq \left\| \frac{\partial I^{(0)}}{\partial \theta} \right\|_0 + \frac{2\pi\mu_s}{\mu_a + \mu_s} \left\| \frac{\partial p}{\partial \theta} \right\|_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \|I^{(n)}\|_\infty \\ &\quad + C \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2 e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_{n+1}} \|I^{(n)}\|_\infty + \frac{\mu_s}{(\mu_a + \mu_s)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{\partial I^{(n)}}{\partial x} \right\|_n. \end{aligned}$$

$\{\delta_n\}_{n \geq 0} = \{\delta_n^{(1)}\}_{n \geq 0}$ ととれば, 右辺が有限確定し, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial I^{(n)}}{\partial \theta}$ が $K \times S^1$ 上絶対一様収束することが分かる.

参考文献

- [A] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk, and I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, VSP, The Netherlands, (2002).

Heavy subsets and non-contractible trajectories

川崎 盛通*

東京大学, 2015年2月

慈悲ふかく慈悲あまねきハミルトン力学系の御名において……

0 導入

ハミルトン・イソトピーの周期軌道の存在問題, non-displaceability, 非圧縮性などハミルトン力学系に特有の”制約”はしばしば”シンプレクティック剛性”と呼ばれる. 概正則曲線やフレアー理論を用いて個別の”シンプレクティック剛性”を研究することはグロモフの著名な業績以来継続的に行われ数々の豊穡な理論を提供してきたのであるが, 筆者の関心はそこから関心を少しずらして別個の”シンプレクティック剛性”の間を”関連付ける”ことにある. 本稿においては non-displaceability(displaceability) と周期軌道の存在問題を関連付ける.

1 基本的な記法と定義

本章においては本稿で用いる基本的記法・定義を整理する.

本稿においてはシンプレクティック多様体 (M_1, ω_1) と (M_2, ω_2) があつた場合には多様体 $M_1 \times M_2$ にはシンプレクティック形式 $\omega_1 + \omega_2$ が入ると考えて話を進めるとする.

(M, ω) をシンプレクティック多様体とする. このとき, ハミルトン関数 $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, そのハミルトン・ベクトル場 X_H を

$$\text{任意 } V \in X(M) \text{ に対して } \omega(X_H, V) = -dH(V),$$

によって定義する.

本稿で S^1 と書いた場合には \mathbb{R}/\mathbb{Z} を指すとする. このとき, 時間依存するハミルトン関数 $H: S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (本稿においてはハミルトン関数は常にコンパクト台を持つとする) に対して, そのハミルトン・イソトピー $\{\phi_H^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\phi_H^0 = \text{id}$, $\frac{d}{dt}\phi_H^t(x) = (X_H)_t|_{\phi_H^t(x)}$ という常微分方程式により定義する. また, 時刻 1 での微分同相写像 ϕ_H^1 を ϕ_H と書く.

シンプレクティック多様体 (M, ω) の閉部分集合 X が *displaceable* というのは, あるハミルトン関数 $H: S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $X \cap \phi(X) = \emptyset$ となることである. そうでない場合 *non-displaceable* という.

M の部分集合 X について, その displacement energy を

$$E(X) = \inf \left\{ \int_0^1 \|H_t\|_{C^0} dt; H \in C_c^\infty(S^1 \times M), \bar{X} \cap \phi_H^1(X) = \emptyset \right\},$$

*cawasaki@ms.u-tokyo.ac.jp

によって定義する (X が non-displaceable の場合は $E(X) = \infty$ とする).

M の自由ループ空間 $C^\infty(S^1, M)$ を \mathcal{LM} と書く. 自由ループ類 α に対し, α を代表する自由ループの集合 $\{z \in \mathcal{LM}; [z] = \alpha\}$ を $\mathcal{L}_\alpha M$ と書く.

2 スペクトル不変量と重い部分集合

本稿の主定理を述べるには”重い部分集合”(heavy subset) ([?, ?]) を定義する必要がある. その定義にはハミルトン・フレアー理論から来るスペクトル不変量を用いる必要があり, 本章ではこれらの導入を行う.

閉シンプレクティック多様対 (M, ω) に対し, アーベル群 $\Gamma = \pi_2(M) / \text{Ker}(c_1) \cap \text{Ker}([\omega])$ を考え, (M, ω) のノヴィコフ環 Λ を

$$\Lambda = \left\{ \sum_{A \in \Gamma} a_A A; a_A \in \mathbb{Z}_2, \# \text{任意の実数 } R \text{ に対して } \{A; a_A \neq 0, \int_A \omega < R\} < \infty \right\},$$

によって定義する.

このとき, (M, ω) の量子ホモロジー $QH_*(M, \omega)$ は Λ -加群 $H_*(M; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} \Lambda$ として定義されるが, 量子積 $*$ という自然な積構造を持つ ([?]). 量子積はグロモフ・ウィッテン不変量を用いて定義されるが, 本稿では詳説しない.

このとき, スペクトル不変量 $c(a, F)$ は量子ホモロジーの 0 でない元 a , ハミルトン関数 $F: S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して定義される実数である. 上述の量子ホモロジーはハミルトン・フレアーホモロジーとの間に PSS 同型と呼ばれる標準的な同型写像を持ち, これを用いてスペクトル不変量は定義される.

量子ホモロジーの冪等元 $a(a * a = a)$ に対し, 汎関数 $\zeta_a: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ をスペクトル不変量 $c(a, \cdot)$ の安定化

$$\zeta_a(H) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{c(a, lH)}{l},$$

として定義する.

定義 2.1 ([?]) (M, ω) を閉シンプレクティック多様体, a を量子ホモロジーの冪等元とする. M の閉集合 X が a -heavy というのは

$$\text{任意の } H \in C^\infty(M) \text{ に対して } \zeta_a(H) \geq \inf_X H,$$

となることである. X が heavy(重い) というのは X がある冪等元 a について a -heavy であることである.

エントフとポルテロヴィッチは重い部分集合が non-displaceable であることを示している ([?] Theorem 1.4).

例 2.2 $(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ をフビニ・スタディ形式を持った複素射影空間とする. そのクリフォード・トーラス $C = \{[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P^n; |z_0| = \dots = |z_n|\} \subset \mathbb{C}P^n$ は重い ([?] Lemma 5.1, [?] Theorem 1.8). 特に二次元球面の赤道は重い.

また, 標準的なシンプレクティック形式の入った二次元トーラスの罫線と緯線も重い ([?] Example 1.18, Corollary 6.4).

3 相対的シンプレクティック容量と主定理

ハミルトン流の非可縮軌道の存在問題がハミルトン関数の C^0 ノルムに制御される現象が多く知られている ([?],[?],[?],[?]) が, その主張はしばしば相対的シンプレクティック容量の言葉で書かれる. 本稿においても主定理を新たに導入する相対的シンプレクティック容量の言葉で書く.

最初にビラン・ポルテロヴィッチ・サラモン [?] による相対的シンプレクティック容量を導入する. (N, ω) を開シンプレクティック多様体とし, Y を N のコンパクト部分集合とする. このとき, 相対的なシンプレクティック容量 $C(N, Y; \alpha)$ を

$$C(N, Y; \alpha) = \inf\{K > 0; \forall H \in \mathcal{H}_K(N, Y), \mathcal{P}(H; \alpha) \neq \emptyset\},$$

によって定義する. ただし, $\mathcal{H}_K(N, Y) = \{H \in C_c^\infty(S^1 \times N); \inf_{S^1 \times Y} H \geq K\}$ である.

次に $C(N, Y; \alpha)$ を用いて本稿で用いる相対的シンプレクティック容量を導入する. (M, ω) を連結なシンプレクティック多様体, X を M のコンパクト部分集合とする. $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$ と $R = (R_1, \dots, R_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ に対し, 相対的シンプレクティック容量 $\hat{C}(M, X, R; e)$ を以下のように定義する.

$$\hat{C}(M, X, R; e) = C(M \times B^*T^n(R), X \times T^n; (c_M, e)).$$

ここで, 余接束内の開集合 $B^*T^n(R) = \{(p, q) \in T^*(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n; |p_i| < R_i\}$ には標準的なシンプレクティック形式 $\omega_0 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$ が入るものとする. また, $T^n = \{(p, q) \in B^*T^n(R); p = 0\}$ は 0 切断とし, c_M は M 内の可縮なループの代表する自由ループ類とする.

シンプレクティック多様体 (M, ω) が λ -単純であるとは, 実数 λ について $\omega = \lambda c_1$ となることである. ここで c_1 は ω (に適合する概複素構造) に対する第一チャーン類である.

このとき, 本稿における主定理は以下である.

定理 3.1 (M, ω) を m 次元連結閉 λ -単純シンプレクティック多様体, X を M の重い部分集合とする. このとき, 任意の $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$ と $R = (R_1, \dots, R_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ に対して,

$$\hat{C}(M, X, R; e) \leq 2 \sum_{i=1}^n R_i \cdot |e_i| + \max\{0, -\lambda(m+n)\}.$$

注意 3.2 講演時に書いた主張には単純性の仮定と補正項 $\max\{0, -\lambda(m+n)\}$ がなかった. 講演ののちに証明にミスが判明し訂正されたのが上の主張である. この場を借りて訂正申し上げる.

定理 ?? の証明はスペクトル不変量に関するある不等式を示すことによって得られるこの不等式は入江 [?] と Seyfaddini [?] の手法を組み合わせることにより得られる.

また, 上の X が *displaceable* のときには以下がいえる.

命題 3.3 (M, ω) を連結シンプレクティック多様体, X を *displaceable* な M のコンパクト部分集合とする. ある k に対して $|e_k| \cdot R_k > E(X)$ となる $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$ と $R = (R_1, \dots, R_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ に対して, $\hat{C}(M, X, R; e) = \infty$ となる.

定理 ?? と命題 ?? を比べれば分かるように, X が *non-displaceable* であるか否かによりハミルトン力学系の周期点の性質が著しく異なるのである. これをより鮮明に見せるために以下の初等的な例を挙げる.

例 3.4 二次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に標準的な面積形式 ω_0 を入れる (二次元なので面積形式はシンプレクティック形式とみなせる). 函数 $h: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $h(x, y, z) = z$ により定義し,

$C_z = h^{-1}(z)$ とおく. このとき, $z \neq 0$ に対し $E(C_z) \leq \pi$ となる (回転を生成するハミルトン函数を考えればよい) 一方で C_0 は例 ?? より重い部分集合であり, 特に *non-displaceable* である. したがって定理 ?? と命題 ?? から以下が従う. 任意の $R > \pi$ について

$$\hat{C}(S^2, C_z, R; 1) \begin{cases} \leq 4\pi & (z = 0), \\ = \infty & (z \neq 0). \end{cases} \quad (1)$$

4 “ C^0 -ノルムが C^1 -ノルムを支配する”

?? 章冒頭において「ハミルトン流の非可縮軌道の存在問題がハミルトン函数の C^0 ノルムに制御される」と書いたが, これは実はかなり意外な現象である. というのも, 定義を見て分かるように, ハミルトン・イソトピーはハミルトン函数の C^1 -ノルム的な情報により決定されるものであり, その周期軌道の問題が C^0 -ノルムに制御 (支配) されてしまうのは実に奇妙な現象である.

本稿の主結果とは直接関係ないものの, この思想 “ C^0 -ノルムが C^1 -ノルムを支配する” がよく現れている例として, ポアソン積の C^0 -剛性なるものが知られている.

ハミルトン函数 $F, G: M \rightarrow \mathbb{R}$ のポアソン積 $\{F, G\}: M \rightarrow \mathbb{R}$ は $\{F, G\} = \omega(X_G, X_F)$ により定義される. ダルブー座標での表示 $\{F, G\} = \sum_i (\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i})$ から分かるように, ハミルトン函数の C^1 -ノルム的な情報から決まるものである. このとき, 任意のシンプレクティック多様体 (M, ω) 上の任意のハミルトン函数 $F, G: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,

定理 4.1 [?, ?, ?, ?]

$$\liminf_{\bar{F}, \bar{G} \xrightarrow{C^0} F, G} \|\{\bar{F}, \bar{G}\}\|_{C^0} = \|\{F, G\}\|_{C^0}$$

となる. 見て分かるように C^1 -ノルムで決定されるはずのポアソン積が C^0 -ノルムでの取束について剛性を持っているという主張であり, “ C^0 -ノルムが C^1 -ノルムを支配する” という思想を体現しているのがお分かりいただけるように思う.

5 エネルギー不等式

ハミルトン流の周期軌道の存在問題と *displaceability* の関係といえば, 古典的なものとしてエネルギー不等式というものが知られている. この古典的なテーマについて概説し, 本稿主定理と比較して筆を置くこととしたい.

ホーファー・ゼンダー容量 C_{HZ} を以下のように定義する.

$$C_{HZ}(M) = \inf\{K > 0; \forall H \in \mathcal{H}_K(M), \phi_H^t \text{ は周期 } 1 \text{ 以下の非自明な周期軌道を持つ}\}.$$

ただし $\mathcal{H}_K(M) = \{H \in C_c^\infty(M); \exists U, V : \text{open subset of } M \text{ s.t. } H_U = 0 \text{ and } H_V = K.\}$ としている.

$\mathcal{H}_K(M)$ の定義において時間変化しないハミルトン函数のみを考えていることに注意してほしい.

このとき, 以下の不等式が成立し, これをエネルギー不等式という.

定理 5.1 (エネルギー不等式) [?, ?, ?] (N, ω) を閉シンプレクティック多様体, もしくは凸で $\pi_2(N) = 0$ な開シンプレクティック多様体とする. M は N の開部分集合とする. このとき

$$C_{HZ}(M) \leq E(M).$$

定理 ?? は *displaceable* な部分集合が周期軌道を生み出すという主張なのに対して, 定理 ?? は *non-displaceable* な部分集合が周期軌道を生み出すという主張であり, 対照的である.

参考文献

- [BEP] P. Biran, M. Entov and L. Polterovich, *Calabi quasimorphisms for the symplectic ball*, *Commun. Contemp. Math.*, **6** (2004), 793-802.
- [BPS] P. Biran, L. Polterovich and D. Salamon, *Propagation in Hamiltonian dynamics and relative symplectic homology*, *Duke Math. J.*, **1** (2003), 65-118.
- [B] L. Buhovsky, *The 2/3-convergence rate for the Poisson bracket*, *Geom. Funct. Anal.*, **19**(6) (2010), 1620-1649.
- [CV] F. Cardin and C. Viterbo, *Commuting Hamiltonians and Hamilton-Jacobi multi-time equations*, *Duke Math. J.*, **144**(2) (2008), 235-284.
- [EP09] M. Entov and L. Polterovich, *Rigid subsets of symplectic manifolds*, *Comp. Math.*, **145** (3) (2009), 773-826.
- [EP10] M. Entov and L. Polterovich, *C^0 -rigidity of Poisson brackets*, *Contemp. Math.*, **512** (2010), 25-32.
- [FGS] U. Frauenfelder, V. Ginzburg and F. Schlenk, *Energy capacity inequalities via an action selector*, *Comp. Math.*, **387** (2005), 129-152.
- [GL] D. Gatiien and F. Lalonde, *Holomorphic cylinders with Lagrangian boundaries and Hamiltonian dynamics*, *Duke Math. J.*, **102**(3) (2000), 485-511.
- [HZ] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhuser Advanced Texts: Basler Lehrbcher, (1994).
- [Ir] K. Irie, *Hofer-Zehnder capacity and a Hamiltonian circle action with noncontractible orbits*, arXiv:1112.5247v1.
- [N] C. Niche, *Non-contractible periodic orbits of Hamiltonian flows on twisted cotangent bundles*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **14** (4) (2006), 617-630.
- [Oh] Y. -G. Oh, *Lectures on Floer theory and spectral invariants of Hamiltonian flows*, *Morse Theoretic Methods in Nonlinear Analysis and in Symplectic Topology*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.y, **217** (2006), 321-416.
- [P] L. Polterovich, *Symplectic intersections and invariant measures*, *Ann. Math. Qué.*, **38** (2014), 81-93.
- [PR] L. Polterovich and D. Rosen, *Function theory on symplectic manifolds*, , ().
- [S] S. Seyfaddini, *Descent and C^0 -rigidity of spectral invariants on monotone symplectic manifolds*, *Topol. Anal.*, **4** (2012), 481-498.
- [U] M. Usher, *The sharp energy-capacity inequality*, *Commun. Contemp. Math.*, **12**(3) (2010), 457-473.

無限ブレイド群の交換子部分群上の共役不変ノルム

木村 満晃 *

東京大学数理科学研究科修士2年, 2015年2月

以下 G を群とする. また, x^y で x の y による共役 xyx^{-1} を表すものとする.

1 共役不変ノルムと Burago-Ivanov-Polterovich の問題

Burago-Ivanov-Polterovich は [3] において共役不変ノルムの概念を導入した.

定義 1.1 ([3]) 群 G 上の関数 $\nu: G \rightarrow \mathbb{R}$ が共役不変ノルム (conjugation-invariant norm) であるとは, 次の (i)~(v) を満たすことである.

- (i) $\nu(1) = 0$ (1 は G の単位元)
- (ii) $\nu(f) = \nu(f^{-1})$ ($\forall f \in G$)
- (iii) $\nu(fg) \leq \nu(f) + \nu(g)$ ($\forall f, \forall g \in G$)
- (iv) $\nu(f) = \nu(gfg^{-1})$ ($\forall f, \forall g \in G$)
- (v) $\nu(f) > 0$ ($\forall f \neq 1 \in G$)

例 1.2 交換子長 $\text{cl}(g) = \min \{ l \mid g = [a_1, b_1] \cdots [a_l, b_l], \exists a_i, \exists b_i \in G \}$ は $[G, G]$ 上の共役不変ノルムである.

上の例のような共役不変ノルムを一般的な形で定義する.

定義 1.3 ([3]) 群 G が部分集合 $K \subset G$ が G を正規生成しているとする. このとき G 上の関数 $q_K: G \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$q_K(f) = \min \{ l \mid f = k_1^{g_1} \cdots k_l^{g_l}, \exists k_i \in K, \exists g_i \in G \}$$

により定める. q_K を共役生成ノルム (conjugation-generated norm, c-generated norm) という. q_K は G 上の共役不変ノルムである.

共役不変ノルムは双不変距離 (biinvariant metric) とよばれる群の上の「良い」距離と1対1対応する. 群がどのような双不変距離を許容するか, すなわちどのような共役不変ノルムを許容するかは, 群の幾何学的性質を反映していると考えられる.

ここで共役不変ノルムの安定 (非) 有界性の概念を導入する.

*mkimura@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 1.4 共役不変ノルム $\nu: G \rightarrow \mathbb{R}$ が安定有界 (stably bounded) であるとは, $\bar{\nu}(g) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(g^n)}{n}$ で定まる ν の安定化 $\bar{\nu}$ が恒等的に 0 となることである. そうでないとき (すなわち, $\bar{\nu}(f) > 0$ なる $f \in G$ が存在するとき) 安定非有界 (stably unbounded) という.

任意の群に対し安定有界なノルムは常に存在するので, 安定非有界なノルムを許容するか否かを群の性質とすることにする. 安定非有界なノルムを許容する典型的な状況は, 交換子長が安定非有界 (安定交換子長が正) である場合である. そこで次の問いがなされた.

問題 1.5 ([3]) $H_1(G) = G/[G, G]$ が有限である群 G であって, $[G, G]$ 上で交換子長は安定有界であるが, 安定非有界な G 上の共役不変ノルムを許容するものが存在するか?

この問題は, 川崎 [5] および Brandenbursky-Kędra [2] により独立に解決された. 川崎は Euclid 空間のシンプレクティック微分同相群の Calabi 準同型の核において, Brandenbursky-Kędra は無限ブレイド群の交換子部分群において, 安定非有界なノルムの存在を示している.

今回, 川崎の方法を応用することにより, 無限ブレイド群の交換子部分群上に安定非有界なノルムを構成し, 特に問題 1.5 の別解を与えたので, 以下その構成について述べる.

2 Bavard の双対と川崎の方法

まず Bavard の双対について説明する. Bavard の双対は, 交換子長と擬準同型の間関係を記述するものである. 擬準同型の定義を述べる.

定義 2.1 群 G 上の実関数 $\phi: G \rightarrow \mathbb{R}$ が擬準同型 (quasi-morphism) であるとは, ある定数 C が存在して, 任意の $g, h \in G$ に対し

$$|\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)| \leq C$$

が成り立つことである. この不等式を満たす最小の C を ϕ の **defect** とよび, $D(\phi)$ で表す.

また, 擬準同型 ϕ が齊次 (homogeneous) とは, 任意の $g \in G$ および $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\phi(g^n) = n\phi(g)$ が成り立つことをいう.

Bavard の双対定理の主張は以下の通りである.

定理 2.2 (Bavard の双対定理 [1])

G を群とし, $g \in [G, G]$ とする. このとき,

$$\text{scl}(g) = \sup_{\phi} \frac{|\phi(g)|}{2D(\phi)}$$

が成り立つ. ここで ϕ は (準同型でない) 齊次擬準同型全体を動く.

ただし scl は交換子長 cl の安定化で, 安定交換子長 (stable commutator length) とよばれる. これから得られる系として, 群が非自明な擬準同型を許容することと, 交換子長が安定非有界であることが同値であることが分かる.

川崎は, この関係の “norm controlled version” を観察した. 交換子長および擬準同型の類似にあたる概念をそれぞれ定義する.

定義 2.3 ν を G 上の共役不変ノルムとし, $p, q > 0$ とする. G の部分群 $[G, G]_{\nu, p, q}$ を, 交換子 $[f, g] \in G$ であって, $\nu(f) \leq p, \nu(g) \leq q$ をみたく元たちで生成される群と定め, (ν, p, q) -交換子部分群とよぶ. このとき, $\text{cl}_{\nu, p, q} : [G, G]_{\nu, p, q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\text{cl}_{\nu, p, q}(h) = \min \left\{ k \mid h = [f_1, g_1] \cdots [f_k, g_k], \begin{array}{l} \exists f_i, \exists g_i \in G, (i = 1, \dots, k) \\ \nu(f_i) \leq p, \nu(g_i) \leq q \end{array} \right\}$$

で定め, $\text{cl}_{\nu, p, q}(h)$ を h の (ν, p, q) -交換子長とよぶ.

定義 2.4 ν を G 上の共役不変ノルムとする. 群 G 上の関数 $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ が ν に関する相対的擬準同型 (quasi-morphism relative to ν) であるとは, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$|\phi(fg) - \phi(f) - \phi(g)| \leq C \cdot \min\{\nu(f), \nu(g)\}$$

が任意の $f, g \in G$ に対し成り立つことをいう.

これらの間の関係について以下のことが成り立つ.

命題 2.5 ([5], Proposition 2.4.)

ϕ を共役不変ノルム ν に関する相対的擬準同型, $p, q > 0$ とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(h_0^n)}{n} > 0$ となるような $h_0 \in [G, G]_{\nu, p, q}$ が存在するならば, $\text{cl}_{\nu, p, q}$ は $[G, G]_{\nu, p, q}$ 上の安定非有界な共役不変ノルムである.

つまり, 群が非自明な相対的擬準同型を許容すれば, (ν, p, q) -交換子長は安定非有界となる. 従って, 群が安定非有界なノルムを許容することを示す方法として, 相対的擬準同型をみつければよいことが分かる.

3 ブレイドの符号数 (signature of braids)

n ブレイド (n -braid) とは, 上から下にはしる n 本の紐の組のアイソトピー類である (図 1). n ブレイド全体のなす集合を B_n とかく. n ブレイドを上下に繋ぐ操作により B_n は群をなす. これをブレイド群 (braid group) とよぶ. ブレイド α の紐の上下を繋ぐことにより得られる絡み目を α の閉包 (closure) とよび, $\hat{\alpha}$ で表す (図 1).

“自明な紐” を 1 本加える操作に対応する標準的な単射 $\iota_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$ により, 包含関係の列 $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$ が得られる. この列の和集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$ を無限ブレイド群 (infinite braid group) とよび, B_{∞} で表す.

まず, 有限ブレイド群には非自明な擬準同型が存在することをみる. ブレイド $\alpha \in B_n$ に対し, その閉包 $\hat{\alpha}$ に絡み目の不変量の一つである符号数 (signature) $\sigma(\hat{\alpha})$ を対応させる関数をブレイドの符号数 (signature of braids) とよび, これも $\sigma(\alpha)$ で表すことにする.

命題 3.1 有限ブレイドの符号数 $\sigma : B_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ は擬準同型である.

証明. $\alpha, \beta \in B_n$ とする. 符号数の性質より $\sigma(\hat{\alpha} \sqcup \hat{\beta}) = \sigma(\hat{\alpha}) + \sigma(\hat{\beta})$ が成り立つ. また, 絡み目に対し saddle move とよばれる操作 (図 2) を施すことによって, 符号数は高々 1 しか変化しないことが知られている [7]. いま, $\hat{\alpha} \sqcup \hat{\beta}$ に n 回 saddle move を施すことで $\widehat{\alpha\beta}$ が得られることから (図 3), $|\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| = |\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\hat{\alpha} \sqcup \hat{\beta})| \leq n$ が成り立つ. \square

符号数 σ は標準的な単射 l_n と compatible であるので, 無限ブレイド上でも well-defined である. しかし, defect が紐の本数に依存するので, 無限ブレイドにおいては符号数が擬準同型であることは従わない. 実際, B_∞ 上の非自明な擬準同型は存在しないことが Kotschick によって示されており, 交換子長は安定有界である [6].

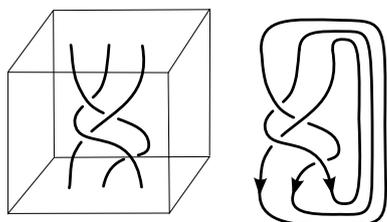


図 1: a braid and its closure

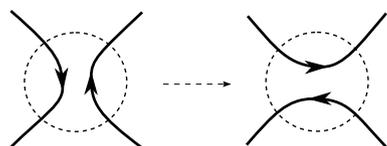


図 2: saddle move

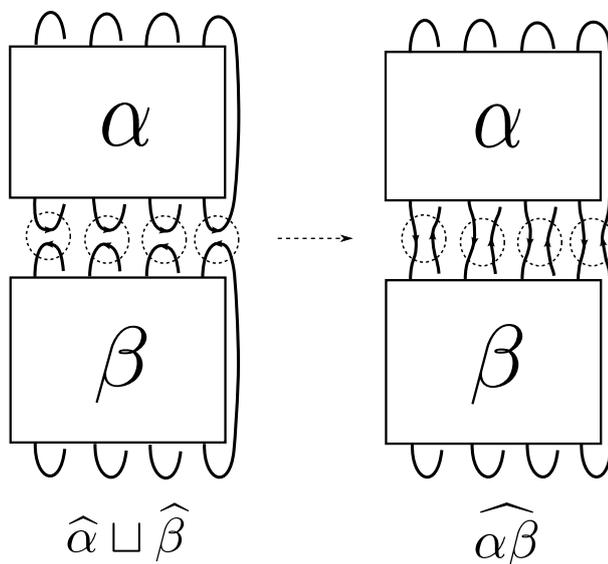


図 3

安定非有界なノルムの構成の為に, 相対的擬準同型の存在をみればよいのであった. 我々の戦略は, 有限ブレイドにおいて擬準同型であった符号数を無限ブレイドにおいて考え, それが (擬準同型ではないが) 相対的擬準同型とならないかを考えるというものである.

4 主結果

まず相対的擬準同型であることを示す際に有用な (必要) 充分条件を与える. これは [4] に表れる議論を一般化したものである.

補題 4.1 ([4], Lemma 7.3.) 群 G が $K \subset G$ で正規生成されているとする. $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ を G 上の関数とする. このとき, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $g \in G$, および $q_K(h) = 1$ なる任意の $h \in G$ に対し, $|\phi(gh) - \phi(g) - \phi(h)| \leq C$ をみたすならば, ϕ は共役生成ノルム q_K に関する相対的擬準同型である.

定理 4.2 符号数 $\sigma : B_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ は共役生成ノルム q_{B_n} に関して相対的擬準同型である.

証明. $\alpha, \beta \in B_\infty$ とし, $q_{B_n}(\beta) = 1$ を仮定する. この仮定の下で $|\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| \leq n$ が成り立つことを示す. これが示されれば補題 4.1 より主張が従う.

仮定より, $\beta^\gamma \in B_n \subset B_\infty$ を充たす $\gamma \in B_\infty$ が存在する. このとき $\alpha^\gamma \in B_m$ ($m > n$) であるとする. 符号数の共役不変性より,

$$|\sigma(\alpha\beta) - \sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| = |\sigma(\alpha^\gamma\beta^\gamma) - \sigma(\alpha^\gamma) - \sigma(\beta^\gamma)|.$$

$\widehat{\alpha^\gamma} \sqcup \widehat{\beta^\gamma}$ に m 回 saddle move を施すことで $\widehat{\alpha^\gamma \beta^\gamma}$ を得るが, β^γ の $n+1$ 番目以降の紐は自明であるので, $\widehat{\beta^\gamma}$ は $m-n$ 個の自明な結び目成分をもち, これらに連結和を施しても符号数は変わらない (図 4). 従って, m 回の saddle move で符号数は高々 n しか変化しないので,

$$|\sigma(\alpha^\gamma \beta^\gamma) - \sigma(\alpha^\gamma) - \sigma(\beta^\gamma)| \leq n. \square$$

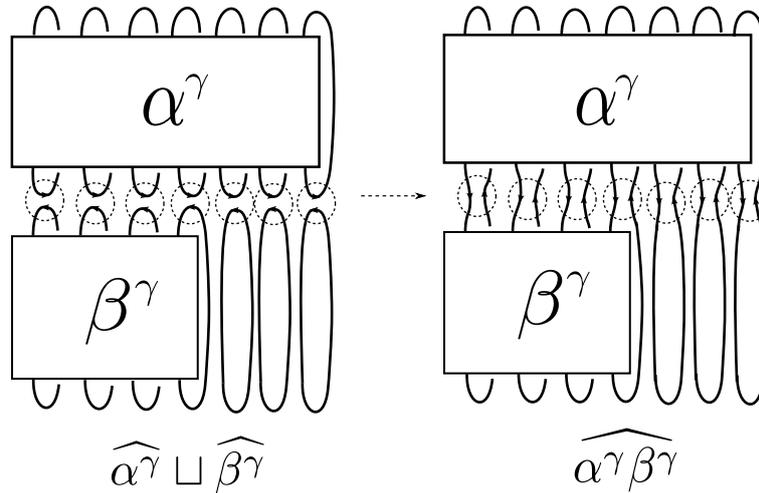


図 4

符号数 $\sigma : B_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ について命題 2.5 の条件をチェックすることにより, 以下の系を得る.

系 4.3 $cl_{qB_n, p, q}$ は無限ブレイド群の交換子部分群 $[B_\infty, B_\infty]$ 上の安定非有界なノルムである. 特に $[B_\infty, B_\infty]$ は安定非有界な共役不変ノルムを許容する.

参考文献

- [1] C. Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. 37 (1991), 109-150.
- [2] M. Brandenbursky and J. Kędra, *Concordance group and stable commutator length in braid groups*, arXiv:1402.3191
- [3] D. Burago, S. Ivanov, and L. Polterovich, *Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin*, Adv. Stud. Pure Math. 52 (2008), 221-250.
- [4] M. Entov and L. Polterovich, *Quasi-states and symplectic intersections*, Comment. Math. Helv., 81 (1) (2006), 75-99.
- [5] M. Kawasaki, *Relative quasimorphisms and stably unbounded norms on the group of symplectomorphisms of the Euclidean spaces*, J. Symplectic Geom. (to appear)
- [6] D. Kotschick, *Stable length in stable groups*, Adv. Stud. Pure Math. 52 (2008), 401-413.
- [7] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387-422.

Euler- α 方程式における点渦力学とエンストロフィー変動

後藤田 剛*

京都大学理学研究科, 2015年2月

1 研究の背景

Navier-Stokes 方程式の粘性ゼロ極限と一様等方乱流には深い関係があり, 特に二次元において乱流状態を維持するには, その粘性極限において流体のエンストロフィーと呼ばれる量が散逸することが重要であるとされている [4, 8]. よって, 非粘性流体の運動を記述する Euler 方程式について, 正則な解はエネルギーを保存するので, 正則でない解が乱流に関係していると思われる. ただし, Euler 方程式の解については, 初期渦度が Radon 測度の空間に入っていない限り, このような散逸が起こり得ないことが数学的に示されている [2, 3]. しかし, そのような初期値に対しては Euler 方程式が可解性を持たないため, Euler 方程式の散逸的弱解を直接構成するには数学解析的に困難が伴う. そこで, Euler 方程式においてスケール α 以下の情報を平均化して繰り込むことで得られる, Euler- α 方程式について考える. これは Euler 方程式の正則化方程式であり, 乱流現象との関係も深い. 例えば, 粘性項を加えた Navier-Stokes- α 方程式の数値計算による研究では, α が小さいときにはその解が乱流と同様の性質を持つことが示されている [1]. 加えて, 二次元では初期渦度を Radon 測度とした場合でも時間大域的な弱解の一意存在がわかっている [7]. よって, Euler- α 方程式の解の α ゼロ極限として Euler 方程式の散逸的弱解を構成できる可能性がある.

このような背景の下, α ゼロ極限でエンストロフィーを散逸するような Euler- α 方程式の解の構成について研究をしている. 具体的には, 二次元 Euler 方程式について, 点渦初期値, つまりデルタ関数を初期値として形式的に導かれる点渦系と, 同様の初期値に対して Euler- α 方程式から導かれる α 点渦系を研究しており, α 点渦系の力学とその α ゼロ極限における解のエンストロフィーの散逸の有無と, 対応する点渦系の挙動との関係に特に興味を持っている. 三個の点渦系については可積分系であることから多くの結果が知られており (例えば [5] を参照), α ゼロ極限でエンストロフィーが散逸するような解が具体的に構成されている [9], これは点渦系における自己相似衝突解に対応しており, エンストロフィー散逸と渦の衝突には深い関係があることわかる.

2 Euler- α 方程式

二次元 Euler- α 方程式は次で与えられる.

$$\begin{cases} (1 - \alpha^2 \Delta) \partial_t u + u \cdot \nabla (1 - \alpha^2 \Delta) u - \alpha^2 (\nabla u)^T \cdot \Delta u = -\nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

*gotoda@math.kyoto-u.ac.jp

渦の時間発展を調べるために、渦度に対する方程式を導く。渦度を $q = (1 - \alpha^2 \Delta) \nabla^\perp \cdot u$ として与えると次の α 渦度方程式を得る。

$$\begin{cases} \partial_t q + (u \cdot \nabla) q = 0, \\ u = K^\alpha * q. \end{cases} \quad (2.1)$$

初期条件は $q(x, 0) = (1 - \alpha^2 \Delta) \nabla^\perp \cdot u_0$ で与えられる。ここで、 $K^\alpha(x)$ は

$$K^\alpha = \nabla^\perp G^\alpha, \quad -\Delta G^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} K_0\left(\frac{|x|}{\alpha}\right)$$

で定義され、 $K_0(x)$ は第二種変形 Bessel 関数を表している。また、Lagrangian flow map を次で定義する。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \eta^\alpha(x, t) = u(\eta^\alpha(x, t), t), \\ \eta^\alpha(x, 0) = x. \end{cases} \quad (2.2)$$

α 渦度方程式において初期渦度を Radon 測度、 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ で与えた場合の初期値問題については Oliver と Shkoller によって弱解の時間大域的な一意存在が示されており、さらに、有界で可積分な初期値に対しては Euler- α 方程式の解は Euler 方程式の解に収束することが知られている [7]。

定理 2.1. (Oliver and Shkoller [7])

$q(x, 0) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ に対して、(2.1), (2.2) の弱解が時間大域的に一意存在して、

$$\eta^\alpha \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{G}), \quad u \in C(\mathbb{R}; C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)), \quad q \in C(\mathbb{R}; \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)),$$

が成立する。ただし、 \mathcal{G} は \mathbb{R}^2 上の Lebesgue 測度を保存する同相写像全体の集合を表す。

3 α 点渦系とエンストロフィー変動

次に、点渦初期値について考える。つまり、 δ を Dirac のデルタ関数とし、初期時刻における N 個の点渦の配置を $\{x_n^0\}_{n=1}^N \subset \mathbb{R}^2$ 、各点渦の強さを Γ_n で与えたとき、次のような初期値を考える。

$$q(x, 0) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(x - x_n^0). \quad (3.1)$$

このとき、次の命題が成立する。

命題 3.1. (3.1) を初期値とする (2.1) の弱解は

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(x - \eta^\alpha(x_n^0, t)). \quad (3.2)$$

となる。さらに、 α 点渦系では点渦の衝突は起こらない。

証明. 定理 2.1 より、Euler- α 方程式における Lagrangian flow map の時間大域的な一意存在がわかっているので、

$$q(x, t) = q(\eta^\alpha(x, -t), 0) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(\eta^\alpha(x, -t) - x_n^0)$$

となる。もし、 $\eta^\alpha(x, -t) = x_n^0$ ならば $x = \eta^\alpha(x_n^0, t)$ が成立し、そうでなければ $x \neq \eta^\alpha(x_n^0, t)$ が成り立つ。これは

$$\delta(\eta^\alpha(x, -t) - x_n^0) = \delta(x - \eta^\alpha(x_n^0, t))$$

を意味している。さらに、flow map の一意性から、 $n \neq m$ なら $\eta^\alpha(x_n^0, t) \neq \eta^\alpha(x_m^0, t)$ が任意の $t > 0$ に対して成立する。つまり、衝突は起こらない。□

命題 3.1 より、Euler- α 方程式においては点渦 (デルタ関数) は点渦のまま時間発展することがわかる。この場合、Euler- α 方程式 (2.1) に (3.2) を代入し、 $\eta^\alpha(x_n^0, t) = x_n^\alpha(t)$ とおくことで、 α 点渦系と呼ばれる次の常微分方程式系に帰着される。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_n^\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq n}^N \Gamma_m \frac{(x_n^\alpha(t) - x_m^\alpha(t))^\perp}{l_{nm}^\alpha(t)^2} B_K \left(\frac{l_{nm}^\alpha(t)}{\alpha} \right), \\ x_n^\alpha(0) = x_n^0. \end{cases} \quad (3.3)$$

ここで、 $l_{nm}^\alpha = |x_n - x_m|$ 、 $B_K(x) = 1 - xK_1(x)$ であり、 $K_1(x)$ も第二種変形 Bessel 関数の一つである。Bessel 関数の性質から、 $B_K(x) \rightarrow 1$, $x \rightarrow \infty$ と $B_K(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ が従う。よって、 α 点渦系において二つの点渦の距離がゼロになったとき、速度場がゼロに収束することから、方程式の右辺はゼロとなる。一方で、Euler 方程式から導かれる点渦系、

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \neq n}^N \Gamma_m \frac{(x_n(t) - x_m(t))^\perp}{l_{nm}(t)^2}, \\ x_n(0) = x_n^0 \end{cases} \quad (3.4)$$

については、二つの点渦の距離 $l_{nm} = |x_n - x_m|$ がゼロに近づくと速度場が発散することがわかる。これより、点渦系においては点渦の衝突が起こりうる (常微分方程式系における解の爆発)。命題 3.1 から α 点渦系では衝突は起こりえず、 $B_K(x)$ のおかげで正則化されていることがわかる。

注意 3.2. α 点渦系 (3.3) については Euler- α 方程式 (2.1) に (3.2) を代入することで数学的に厳密に導かれるのに対して、点渦系 (3.4) は Euler 方程式から形式的な議論によって導かれることに注意する。この違いは速度場を定義する際の積分核の特異性の有無に起因する。 α 点渦系 (3.3) において形式的に $\alpha = 0$ とすると点渦系 (3.4) に一致する。

次に α 点渦系のエネルギー変動とエンストロフィー変動を定義する。Novikov による、点渦系のエネルギーの導出方法 [6] と同様の方法で計算すると、エネルギー変動とエンストロフィー変動はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} E^\alpha(t) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \Gamma_n \Gamma_m \left[\log l_{mn}^\alpha + K_0 \left(\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha} \right) + \frac{l_{mn}^\alpha}{2\alpha} K_1 \left(\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha} \right) \right], \\ \mathcal{E}^\alpha(t) &= \frac{1}{4\pi\alpha^2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \Gamma_n \Gamma_m \frac{l_{nm}^\alpha}{\alpha} K_1 \left(\frac{l_{nm}^\alpha}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

定理 3.3. 区間 $t \in I$ に対して、あるゼロでない定数 $C_{mn}(t) \neq 0$ が存在して、

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{t \in I} |l_{mn}^\alpha(t) - C_{mn}(t)| = 0, \quad m \neq n = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

が成立していると仮定する. このとき, エネルギー変動は点渦系のハミルトニアンエネルギー $H(t)$ に収束し, エンストロフィー変動はゼロに収束する. すなわち,

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{t \in I} |E^\alpha(t) - H(t)| = 0, \quad \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{t \in I} |\mathcal{E}^\alpha(t)| = 0.$$

証明. α 点渦系, 点渦系ともにハミルトン系であり, そのハミルトニアンはそれぞれ,

$$\begin{aligned} H^\alpha(t) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \Gamma_n \Gamma_m \log l_{nm}^\alpha(t) - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \Gamma_n \Gamma_m K_0 \left(\frac{l_{nm}^\alpha(t)}{\alpha} \right), \\ H(t) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \Gamma_n \Gamma_m \log l_{nm}(t) \end{aligned}$$

であることに注意する. まず, エネルギー変動の収束を証明する.

$$|E^\alpha - H| \leq |H^\alpha - H| + \frac{1}{2\pi} \sum \sum |\Gamma_n \Gamma_m| \frac{l_{mn}^\alpha}{2\alpha} K_1 \left(\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha} \right). \quad (3.6)$$

ハミルトニアン $H^\alpha(t)$ は時間不変量であることから

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log l_{nm}^\alpha(t) - \frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m K_0 \left(\frac{l_{nm}^\alpha(t)}{\alpha} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log |x_n^0 - x_m^0| - \frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m K_0 \left(\frac{|x_n^0 - x_m^0|}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $\alpha \rightarrow 0$ とすると

$$-\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log C_{mn}(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log |x_n^0 - x_m^0| \quad (3.7)$$

を得る. 一方, $H(t)$ もまた時間不変量であることから

$$-\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log l_{nm}(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log |x_n^0 - x_m^0|$$

であり, 結果として次の等式を得る.

$$-\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log C_{mn}(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum \sum \Gamma_n \Gamma_m \log l_{nm}(t).$$

よって, (3.6) の右辺第一項は α ゼロ極限でゼロに収束する. 第二項については, $K_1(x) \sim e^{-x}$ as $x \rightarrow \infty$ であることからゼロに収束することがわかる. エンストロフィー変動の収束については, 仮定 (3.5) より

$$\frac{l_{mn}^\alpha}{\alpha} \rightarrow \infty \quad \text{as } \alpha \rightarrow 0.$$

となるので, K_1 の性質から結果を得る. \square

系 3.4. ある時刻 t_c において, $\alpha \rightarrow 0$ でエンストロフィー $\mathcal{E}^\alpha(t_c)$ が変動するならば, $l_{mn}^\alpha(t) \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow 0$ が成り立つ.

エンストロフィーの変動が起こるのはどのような場合かを考える上で, $C_{mn}(t)$ が満たす性質を考察することは重要である. 証明中の (3.7) は点渦系におけるハミルトニアンの保存則と同様の等式であることから, $C_{mn}(t)$ は $l_{mn}(t)$ に対応していると考えられる. ただし, この二つが任意の $m \neq n = 1, \dots, N$ で等しいことまでは示せていないことに注意する. 系 3.4 と合わせて, エンストロフィー散逸と点渦系における渦の衝突には深い関係があると推測できる. この点については現在研究中である.

4 まとめと今後の課題

本研究は乱流現象の数学的な解析を最終的な目標としている。そこで、高レイノルズ数状態における流体のエンストロフィーの散逸が重要であることから、Euler- α 方程式の解で、 α ゼロ極限でエンストロフィーが散逸しているようなものが乱流現象を記述しているのではないかという前提のもとで研究を行っている。注意すべき点は、必ずしも Euler 方程式の散逸的弱解が乱流を記述しているとは限らず、本研究においても α ゼロ極限において Euler 方程式の解への収束を目標としているわけではなく、エンストロフィー散逸の有無に最大の関心を持っている (Euler 方程式の弱解への収束も数学的には重要な問題であり、研究は進めていく予定である)。

現在は α 点渦系について α ゼロ極限とエンストロフィー散逸の関係を研究している。結果としては、仮定 (3.5) の下では極限においてエンストロフィーが散逸しないことが証明された。今後の課題としてはエンストロフィーの散逸と点渦系の衝突解との関係性を明らかにすることである。三個の点渦の場合にはエンストロフィーを散逸する解が具体例が構成されていることから、まずは三個の点渦力学を含む可積分系について数学的に明確にしていきたいと考えている。また一般の N 点渦系についても数値計算などを利用することで研究をしていきたい。

参考文献

- [1] Chen, C., Holm, D. D., Margolin, L. G., Zhang, R. : Direct numerical simulations of the Navier-Stokes alpha model. *Phys. D* **133** (1999), 66–83.
- [2] Duchon, J., Robert, R. : Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Nonlinearity* **13** (2000), 249–255.
- [3] Eyink, G. L. : Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence. *Nonlinearity* **21** (2003), 1233–1252.
- [4] Kolmogorov, A. N. : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **30** (1941), 299–303.
- [5] Newton, P. K. : *The N-Vortex Problem. Analytical Techniques*, Springer, 2001.
- [6] Novikov, E. A. : Dynamics and statistics of a system of vortices. *Sov. Phys.-JETP* **41** (1976), 937–943.
- [7] Oliver, M., Shkoller, S. : The vortex blob method as a second-grade non-Newtonian fluid. *Comm. Partial Differential Equations*. **26**(2001), no. 1-2, 295–314.
- [8] Onsager, L. : Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento Suppl.* **6** (1949), 279–289.
- [9] Sakajo, T. : Instantaneous energy and enstrophy variations in Euler-alpha point vortices via triple collapse. *J. Fluid Mech.* **702** (2012), 188–214.

Hardy inequality with remainder terms in a limiting case

佐野 めぐみ *

大阪市立大学 理学研究科 数物系専攻 前期博士課程 2年, 2015年 2月

1 研究の動機と導入

本研究は大阪市立大学の高橋太教授との共同研究である.

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ を滑らかな有界領域, $0 \in \Omega$, $N \geq 2, 1 < p < N$ とする. 古典的な Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \quad (\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \quad (1)$$

において, 定数 $\left(\frac{N-p}{p}\right)^p$ は最良であり, 達成されないことが知られている. すなわち不等式 (1) の等号が成立する $W_0^{1,p}(\Omega)$ 関数は存在しない. (Sobolev 空間 $W_0^{1,p}(\Omega)$ の定義は [8] を参照して頂きたい.) この事実は, 不等式 (1) の左辺に剰余項を加えることができる可能性を示唆しており, 実際にさまざまな剰余項が求められている (see [1], [3], [4], [5] etc.). 例えば $p = 2$ の場合, Chaudhuri-Ramaswamy[4] により, 任意の $0 \leq \beta < 2$ と $1 < q < 2_{\beta}^* := \frac{2(N-\beta)}{N-2}$ に対して, ある定数 $C = C(N, \beta, q, \Omega) > 0$ が存在し, 次の不等式が成立することが証明されている.

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx + C \left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^q}{|x|^{\beta}} dx\right)^{\frac{2}{q}} \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)). \quad (2)$$

さらに Vázquez-Zuazua[12] は, (1) の剰余項を用いて, 特異性があるポテンシャルをもつような放物型偏微分方程式の解の時間大域的挙動について研究を行った. このように剰余項を研究することは, 不等式自体の興味もさることながら, 方程式への応用の観点からも重要であると言える.

一方で $p = N$ の場合, 通常の Hardy 不等式 (1) は成立せず, 対数補正項を付けた臨界 Hardy 不等式 (3) が成立することが知られている.

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N (\log \frac{\tilde{R}\epsilon}{|x|})^N} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^N dx \quad (\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega), \tilde{R} := \sup_{x \in \Omega} |x|). \quad (3)$$

定数 $\left(\frac{N-1}{N}\right)^N$ は一般の有界領域において最良で ([2], [10]), 達成されないことが知られている ([6]). 我々は臨界 Hardy 不等式 (3) における剰余項について研究を行った.

注意 1 Adimurthi-Chaudhuri-Ramaswamy [1] によって以下が示されている.

$T > 0, B_T(0) \subset \mathbf{R}^2$, $R = e^{e^{(k\text{-times})} T}$ とする (i.e. $k = k(R)$ は $0 < \log^{(k)} \frac{R}{T}$ を満たす. ただし $\log^{(1)}(\cdot) := \log(\cdot)$, $\log^{(k)}(\cdot) := \log(\log^{(k-1)}(\cdot))$ ($k \geq 2$) とする) このとき以下の不等式が成立

*m13saM0311@st.osaka-cu.ac.jp

する.

$$\frac{1}{4} \sum_{j=1}^k \int_{B_T(0)} \frac{|h(x)|^2}{\left(|x| \prod_{i=1}^j \log^{(i)} \frac{R}{|x|}\right)^2} dx \leq \int_{B_T(0)} |\nabla h(x)|^2 dx \quad (\forall h \in W_0^{1,2}(B_T(0))) \quad (4)$$

一見上記の不等式 (4) は, (3) の剰余項を得たように見える. しかしながら仮定 $R = e^{e^{(k\text{-times})} T}$ により, “本当の意味”で (3) の剰余項を得たとは言えない (我々が得たいのは $R = eT$ の場合であるので, $k = 1$ となってしまう).

また *Adimurthi-Sandeep*[2] らは上述の結果を述べた論文 [1] を引用することにより, 以下の不等式を 証明なしで 記述している.

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^N} dx + C \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{R}{|x|}\right)^N \left(\log^{(2)} \frac{R_1}{|x|}\right)^N} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^N dx$$

($\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega)$). ただし $R \geq e \sup_{x \in \Omega} |x|$, $R_1 \geq (e^e)^{\frac{2}{N}} \sup_{x \in \Omega} |x|$ とする.

このように今まで (3) の剰余項は曖昧にされてきたように思える. しかしながら今回得られた主結果はその曖昧な部分を明らかにしたと言える.

2 主結果

定理 1 [[10]M.Sano-F.Takahashi] $N \geq 2, \Omega \subset \mathbf{R}^N$ は境界が滑らかな有界領域, $R > 0$ は $|B_R(0)| = |\Omega|$ を満たす数, $\tilde{R} := \sup_{x \in \Omega} |x|$, $0 < q < N$ と $L > -1$ は $\alpha^* < \alpha := \frac{N-1}{N}q + L + 2 \leq N$ を満たす数とする. このとき任意の $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ に対して, 以下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^N dx &\geq \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{\tilde{R}e}{|x|}\right)^N} dx \\ &+ \omega_N^{1-\frac{N}{q}} C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_{\Omega} \frac{|u(x)|^q}{|x|^N \left(\log \frac{\tilde{R}e}{|x|}\right)^{\alpha} dx} \right)^{\frac{N}{q}}. \end{aligned} \quad (5)$$

ただし $C(L, N, q) := (L+1)^{-(1+\frac{N-1}{N}q)} \Gamma\left(\frac{N-1}{N}q + 1\right)$, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数, $\alpha^* := \frac{N-1}{N}q + 1$ とする.

不等式 (5) の剰余項に登場する α^* は最良であることがわかっている. そして証明を少し変えると, 不等式 (5) の他にも様々な剰余項を求めることができる. また主定理の方程式への応用として, 異なる重みを持った次の楕円型 N -ラプラス方程式の弱解の存在・非存在を考えることができる (以上の3点は本稿では割愛する).

$$(P)_{\mu}^{\lambda} \begin{cases} -\Delta_N u &= \mu \frac{|u|^{N-2} u}{\left(|x| \log \frac{\tilde{R}e}{|x|}\right)^N} + \lambda |u|^{q-2} u f(x) & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

ただし $\mu, \lambda > 0$, $\Delta_N u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u)$, u は $u(x)$ の略とする.

3 証明の概略と新しいアイデア

臨界 Hardy 不等式 (3) の剰余項を求める際にも, 古典的な Hardy 不等式 (1) の場合と同様に重要であると思われるのは, Brezis-Vazquez [3] によるアイデアと球対称再配列の議論の組み合わせである. 端的に述べると,

・Brezis-Vazquez のアイデア … (3) の等号を満たす “形式的な” 関数 $\left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(W^{1,N}(B_R(0))\right)$ 関数に入っていないことに注意する) と $u(x)$ の違いを見るために, 変換 $v(x) = \left(\log \frac{Re}{|x|}\right)^{-\frac{N-1}{N}} u(x)$ を行い, 新しい関数 v に対しての評価を行う. (Sobolev 空間 $W^{1,N}(B_R(0))$ の定義は [8] を参照して頂きたい.)

・球対称再配列の議論 … 球対称減少関数 $u = u(|x|)$ に関してのみ証明すればよく, “問題を一次元化できる” というメリットをもつ. 特に Pólya-Szegő の不等式や Riesz’s rearrangement inequality を用いる (詳しくは [7], [9] を参照).

しかしながら, 臨界 Hardy 不等式の場合にはその 2 つだけでは上手くいかない (正確には “嫌な” 重み付きの Poincaré 不等式を考察しなければいけなくなり, 上手く証明できない). 新しいスケール変換 (6) も同時に組み合わせたことが証明の鍵となっている. 主結果に必要な補題を一つ準備し, 主結果の証明に入る.

補題 1 [[5] Lemma 1] $p \geq 2, \xi, \eta \in \mathbf{R}$ s.t. $\xi \geq 0, \xi - \eta \geq 0$ とする. このとき以下の評価が成立する.

$$(\xi - \eta)^p + p\xi^{p-1}\eta - \xi^p \geq \max\{(p-1)\eta^2\xi^{p-2}, |\eta|^p\}$$

定理 1 の証明 [Step 1] まず $\Omega = B_R(0)$ (i.e. $R = \tilde{R}$) で, $r = |x|$ に関して単調減少な球対称関数 $u \in C_0^\infty(B_R(0))$ に関して結論の不等式 (5) を示す. 次の変換を導入する.

$$v(s) = \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{-\frac{N-1}{N}} u(r) \text{ where } s = s(r) = \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{-1}, s'(r) = \frac{s(r)}{r \log \frac{Re}{r}} \geq 0, v \in C_0^1([0, 1]) \quad (6)$$

したがって,

$$\begin{aligned} I &:= \int_{B_R(0)} |\nabla u(x)|^N dx - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \int_{B_R(0)} \frac{|u(x)|^N}{|x|^N (\log \frac{Re}{|x|})^N} dx \\ &= \omega_N \int_0^R |u'(r)|^N r^{N-1} dr - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \omega_N \int_0^R \frac{|u(r)|^N}{r (\log \frac{Re}{r})^N} dr \\ &= \omega_N \int_0^R \left(\frac{N-1}{N} \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{-\frac{1}{N}} \frac{v(s(r))}{r} - \left(\log \frac{Re}{r}\right)^{\frac{N-1}{N}} v'(s(r))s'(r) \right)^N r^{N-1} dr \\ &\quad - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \omega_N \int_0^R \frac{|u(r)|^N}{r (\log \frac{Re}{r})^N} dr \quad (u'(r) \leq 0 \text{ より従う}) \end{aligned} \quad (7)$$

が成立する. ここで補題 1 の ξ と η を, $\xi = \frac{N-1}{N} (\log \frac{Re}{r})^{-\frac{1}{N}} \frac{v(s(r))}{r}$, $\eta = (\log \frac{Re}{r})^{\frac{N-1}{N}} v'(s(r))s'(r)$ として適応すると,

$$\begin{aligned} I &\geq -\omega_N N \left(\frac{N-1}{N} \right)^{N-1} \int_0^R v(s(r))^{N-1} v'(s(r)) s'(r) dr \\ &\quad + \omega_N \int_0^R |v'(s(r))|^N (s'(r))^N \left(r \log \frac{Re}{r} \right)^{N-1} dr \\ &= -\omega_N N \left(\frac{N-1}{N} \right)^{N-1} \int_0^1 v(s)^{N-1} v'(s) ds + \omega_N \int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds \\ &= \omega_N \int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds \end{aligned} \quad (8)$$

となる. 一方で任意の $0 \leq s \leq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} |v(s)| &= \left| \int_s^1 v'(t) dt \right| = \left| \int_s^1 v'(t) t^{\frac{N-1}{N} - \frac{N-1}{N}} dt \right| \\ &\leq \left(\int_0^1 |v'|^N t^{N-1} dt \right)^{\frac{1}{N}} \left(\log \frac{1}{s} \right)^{\frac{N-1}{N}} \quad (\text{H\"older inequality より従う}) \end{aligned}$$

が成立するので,

$$\int_0^1 |v(s)|^q s^L ds \leq \left(\int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds \right)^{\frac{q}{N}} \int_0^1 s^L \left(\log \frac{1}{s} \right)^{\frac{N-1}{N} q} ds$$

となり, 以下の評価を得る.

$$C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_0^1 |v(s)|^q s^L ds \right)^{\frac{N}{q}} \leq \int_0^1 |v'(s)|^N s^{N-1} ds. \quad (9)$$

したがって, (8) と (9) より,

$$\begin{aligned} I &\geq \omega_N C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_0^1 |v(s)|^q s^L ds \right)^{\frac{N}{q}} \\ &= \omega_N C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_0^R \frac{|u(r)|^q}{r \left(\log \frac{Re}{r} \right)^\alpha} dr \right)^{\frac{N}{q}} \\ &= \omega_N^{1-\frac{N}{q}} C(L, N, q)^{\frac{N}{q}} \left(\int_{B_R(0)} \frac{|u(x)|^q}{|x|^N \left(\log \frac{Re}{|x|} \right)^\alpha} dx \right)^{\frac{N}{q}} \end{aligned}$$

となり, 結論の不等式を得ることが出来る.

[Step 2] 稠密性の議論 ([8] を参照) と球対称再配列関数の議論 (Pólya-Szegő の不等式と Riesz's rearrangement inequality を適用する) より, 一般の $W_0^{1,N}(\Omega)$ 関数に対しても結論の不等式 (5) が証明できる (本稿では割愛する). 以上より定理 1 が証明された.

4 今後の課題

実は本稿で扱った臨界 Hardy 不等式よりもより厳しい不等式であるシャープな臨界 Hardy 不等式

$$\left(\frac{N-1}{N} \right)^N \int_\Omega \frac{|u(x)|^N}{|x|^N \left(\log \frac{R}{|x|} \right)^N} dx \leq \int_\Omega |\nabla u(x)|^N dx \quad (\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega), R := \sup_{x \in \Omega} |x|) \quad (10)$$

が成立することが知られている。このシャープな臨界 Hardy 不等式 (10) は (3) とは違い、ポテンシャル $(|x| \log \frac{R}{|x|})^{-N}$ は原点だけではなく、境界にも特異性をもっているという点が一つの大きな特徴であり、興味深い点である。近年, Ioku-Ishiwata[6] により, 領域 Ω がボールの場合に, 定数 $(\frac{N-1}{N})^N$ は最良であり, 達成されないことが証明された。したがって不等式 (10) にも剰余項の存在が期待できる。最近, Sano-Takahashi[11] により, (領域がボールの場合に) シャープな臨界 Hardy 不等式の剰余項が発見された。今後の課題としては, さまざまな一般有界領域 (円環領域や原点が境界上にある場合など) における臨界 Hardy 不等式 (10) の最良定数の値や達成可能性, 剰余項について明らかにし, それに関連する方程式への応用, また達成不可能となるメカニズムの解明 (最小化列の挙動の解析) などが挙げられる。

参考文献

- [1] Adimurthi, N.Chaudhuri, M.Ramaswamy, *An improved Hardy-Sobolev inequality and its application*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), No. 2, 489-505 (electronic).
- [2] Adimurthi and K.Sandeep, *Existence and non-existence of the first eigenvalue of the perturbed Hardy-Sobolev operator*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **132** (2002), No.5, 1021-1043.
- [3] H.Brézis, J.L.Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid 10 (1997), No. 2, 443-469.
- [4] N.Chaudhuri and M.Ramaswamy, *Existence of positive solutions of some semilinear elliptic equations with singular coefficients*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 131 (2001), No. 6, 1275-1295.
- [5] F.Gazzola, H.-C.Grunau and E.Mitidieri, *Hardy inequalities with optimal constants and remainder terms*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2003), No.6, 2149-2168.
- [6] N.Ioku and M.Ishiwata, *A scale invariant form of a critical Hardy inequality*, International Mathematics Research Notices, **212** (2014), 17 pages.
- [7] E.H.Lieb and M.Loss, *Analysis (2nd ed.)*, AMS, (2001).
- [8] 宮島静雄, ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, (2006).
- [9] 小川卓克, 非線形発展方程式の実解析的方法, 丸善出版, (2013).
- [10] M.Sano and F.Takahashi, *Improved Hardy inequalities in a limiting case and their applications*, submitted.
- [11] M.Sano and F.Takahashi, *Scale invariance structures of the critical and the subcritical improved Hardy inequalities and their relationship*, submitted.
- [12] J.L.Vázquez and E.Zuazua, *The Hardy inequality and asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*, J. Funct. Anal., **173** (2000), 103-153.

混合 Frobenius 多様体と混合 trTLEP 構造

社本 陽太*

京都大学数理解析研究所 修士 2 年, 2015 年 2 月

概要

本稿では, 筆者の修士論文の結果について, 講演内容に沿ってより詳しい解説をします. 講演で話した主な結果は二つでした. 二つはどちらも局所ミラー対称性における混合 Frobenius 多様体の構成定理であり, どちらも混合 trTLEP 構造から混合 Frobenius 多様体を得る一般論に基づいています. 本稿では特にこの一般論の説明に重点をおいて解説します.

1 研究の背景

まず, 研究の背景について説明します. 筆者の結果は局所ミラー対称性予想に関するものですが, 局所ミラー対称性はミラー対称性予想の一つの variant にあたるものです. そこで, まずミラー対称性について解説したあと, 局所ミラー対称性における研究背景に入ります.

1.1 ミラー対称性と Frobenius 多様体

ミラー対称性予想という物理学の弦理論に端を発する予想があります. これは, A モデルと B モデルと呼ばれる二つのモデルの等価性を主張するものです. この等価性に基づいて, A モデル側の射影的 Carabi-Yau 多様体 X の有理曲線の数え上げ (Gromov-Witten 不変量の計算) 問題を B モデル側の Carabi-Yau 多様体 \hat{X} における Picard-Fuchs 型の微分方程式 (Hodge 構造の変動) を用いて計算するという結果が示されて, 数学者に衝撃を与えました.

この結果は, 有理曲線の数え上げ問題という未解決の難問が (ある場合に) 解決されたというだけでなく, 次の二つの点で非自明であったと言えます.

1. 多様体 X の性質が異なる多様体 \hat{X} の性質を用いて記述される点.
2. シンプレクティック幾何学的性質が複素幾何学性質を用いて記述される点.

この非自明な対応に数学的な説明を与えることがミラー対称性において重要な問題となります. そのために, ミラー対称性予想は様々な形で定式化され, 多くの例について予想が正しいことが証明されています. しかし, 一般的な形での定式化や証明からは遠く, また, 様々な定式化たちの間の関係も未解決のものが数多くあります.

これら様々な定式化のうちの一つに, Frobenius 多様体による定式化があります. まず, A モデル, B モデルのそれぞれにおいて, Frobenius 多様体 $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$ を構成します. このとき, A モデルにおいては X のシンプレクティック幾何学的性質 (Gromov-Witten 不変量) を用いて, B モデルにおいては, \hat{X} の複素幾何学的性質 (Hodge 構造の変動) を用いて, Frobenius 多様体を構成します. そし

*shamoto@kurims.kyoto-u.ac.jp

て、ミラー対称性予想を, Frobenius 多様体の同型 $\mathcal{F}_A \simeq \mathcal{F}_B$ として定式化します. 二つの異なる幾何学から同じ種類の構造を取り出し, その構造の間の同型として予想が定式化されたことに注目してください.

Frobenius 多様体によって定式化されたミラー対称性予想についても, 弱 Fano トーリック多様体の場合など多くの場合に予想が証明されています ([8]).

1.2 局所ミラー対称性と混合 Frobenius 多様体

局所ミラー対称性は, ミラー対称性の「非コンパクト版」にあたります. つまり, A モデルに現れる Carabi-Yau 多様体 X が (局所 Carabi-Yau と呼ばれる) 非コンパクトな多様体である場合のミラー対称性が局所ミラー対称性です.

局所ミラー対称性については, Chiang-Klemm-Yau-Zaslow[2] が, 数学的な解釈とそれをを用いた計算例を与えました. 通常ミラー対称性と同様, 計算の背景にある構造を求めることが次の目標になります.

Konishi-Minabe は, [7] において局所 B モデルの計算の背後に相対コホモロジーの定める混合 Hodge 構造の変動があることを見抜きました. この観察に基づいて, 彼らは Frobenius 多様体を一般化した混合 Frobenius 多様体を導入し, 局所ミラー対称性は混合 Frobenius 多様体の同型として定式化できると予想しました ([5]).

実際, Konishi-Minabe は [5, 6] において, 局所 Gromov-Witten 不変量を用いて局所 A モデルにおける混合 Frobenius 多様体を構成しました. 一方で, 局所 B モデルにおける混合 Frobenius 多様体の構成はなされていませんでした.

したがって, 次の課題は局所 B モデルにおける混合 Frobenius 多様体の構成, 及び (構成されたものとして) 二つの混合 Frobenius 多様体の同型を証明することになります.

2 主結果

筆者の修士論文における主な結果の一つは, 局所 B モデルにおける混合 Frobenius 多様体を (あるデータを加味することで) 構成したことです (定理 2.6).

概要でも述べたように, この結果は一般に混合 trTLEP 構造という構造から混合 Frobenius 多様体を構成する定理 (定理 2.4. 以下, これを構成定理と呼びます.) を局所 B モデルの場合に適用することで得られます. 以下では, まず, 混合 Frobenius 多様体とこの混合 trTLEP 構造の定義を述べ, 構成定理の主張を与えます. その後, 構成定理をどのように局所 B モデルに適用するかを説明します.

講演では, 局所 A モデルにおける Konishi-Minabe の構成した混合 Frobenius 多様体を, この構成定理を用いて再構成する結果についても話しました. この結果の説明は紙数の関係でここでは割愛します.

2.1 混合 Frobenius 多様体の構成定理

まず, 混合 Frobenius 多様体の定義を説明します. 複素多様体 M に対して, \mathcal{O}_M を M 上の正則関数のなす層, Θ_M を正則接ベクトル束, Ω_M^1 を正則余接束とします. また, ベクトル束とそれが定義する \mathcal{O}_M 局所自由層を同一視します.

定義 2.1 ([5, 6]). 複素多様体 M 上の**混合 Frobenius 構造**とは、次の以下の組 $\mathcal{F} = (\circ, e, \nabla, E, W, g)$ であって、いくつかの条件をみたすものである。

- M の正則接ベクトル束 Θ_M 上の可換な積 \circ とその単位元切断 $e \in \Gamma(M, \Theta_M)$,
- 捩れのない (torsion free) 平坦接続 $\nabla : \Theta_M \rightarrow \Theta_M \otimes \Omega_M^1$,
- 正則ベクトル場 $E \in \Gamma(M, \Theta_M)$ (Euler ベクトル場と呼ばれる),
- 可換 \mathcal{O}_M 代数 (Θ_M, \circ) のイデアルからなる部分ベクトル束のなす増大列 $W = (W_k \mid k \in \mathbb{Z})$,
- 部分商 $\mathrm{Gr}_k^W \Theta_M = W_k/W_{k-1}$ 上の非退化対称形式の列 $g = (g_k \mid k \in \mathbb{Z})$.

複素多様体 M とその上の混合 Frobenius 構造の組 (M, \mathcal{F}) を**混合 Frobenius 多様体**と呼ぶ。(組 (M, \mathcal{F}) も単に \mathcal{F} と書く.)

混合 Frobenius 多様体の定義は、 W が自明なフィルターのとき、Frobenius 多様体の定義に対応しています。混合 Frobenius 構造のみたすべき条件のうち、後の説明に必要な部分を説明します。

\mathbb{P}_λ^1 を複素射影直線、 λ を非斉次座標とします。また、 $p : \mathbb{P}_\lambda^1 \times M \rightarrow M$ を自然な射影とします。引き戻し $p^*\Theta_M$ 上の有理型接続 $\hat{\nabla}$ を次のように定義します。

$$\hat{\nabla} := \nabla + \frac{1}{\lambda} \mathcal{C} - \left(\frac{1}{\lambda} \mathcal{C}_E + \nabla \cdot E \right) \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (2.1)$$

ここで、 \mathcal{C} は $\mathcal{C}_{xy} := -x \circ y$ ($x, y \in \Theta_M$) で定まる Θ_M 上の Higgs 場で、右辺では p による引き戻しを省略しています。

混合 Frobenius 構造の条件の一つは、式 (2.1) で定義される接続 $\hat{\nabla}$ が平坦であることです。

次に、混合 trTLEP 構造の定義を説明します。

定義 2.2. 複素多様体 M 上の**混合 trTLEP 構造**とは、次の組 $\mathcal{T} = (H, \tilde{\nabla}, \tilde{W}, P)$ であって、いくつかの条件をみたすものである。

- $\mathbb{P}_\lambda^1 \times M$ 上の正則ベクトル束 H であって、随伴射 $p^*p_*H \rightarrow H$ が同型であるもの,
- H 上の有理型平坦接続 $\tilde{\nabla}$ であって、 $\{0, \infty\} \times M$ にのみ、ある種の特異性を持つもの,
- H 上の $\tilde{\nabla}$ 不変な部分束からなる増大列 $\tilde{W} = (\tilde{W}_k \mid k \in \mathbb{Z})$,
- $\mathrm{Gr}_k^{\tilde{W}} H$ 上の $(-1)^k$ 対称なペアリングの列 $P = (P_k \mid k \in \mathbb{Z})$.

ここで、正則写像 $f : M_0 \rightarrow M_1$ にと、 M_1 上の混合 trTLEP 構造に対して引き戻し $f^*\mathcal{T}$ が定義できることに注意しておきます。次の補題は、比較的容易に証明できます。

補題 2.3. \mathcal{F} を混合 Frobenius 多様体とする。このとき、混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ が自然に誘導される。 \square

特に、 $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = (H, \tilde{\nabla}, \dots)$ と書いたとき、 $H := p^*\Theta_M$ 、 $\tilde{\nabla} = \hat{\nabla}$ (式 2.1 参照) です。

一方で、この逆は一般には成り立ちません。つまり、複素多様体 M 上の任意の混合 trTLEP 構造から、 M 上の混合 Frobenius 構造が構成できるわけではありません。例えば、混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T} = (H, \nabla, \dots)$ で、 H の階数が M の次元と一致していないときなどが自明な反例となります。また、補題 2.3 で実は混合 Frobenius 多様体の単位元切断 e の情報が落ちていることも注意しておきます。

混合 Frobenius 多様体の構成定理とは、 H の階数が M の次元より高い場合に、単位元 e にあたる情報を付加することで、 M を (局所的に) 「開折」した多様体 \widetilde{M} 上に混合 Frobenius 構造が構成できることを主張する定理です。

定理 2.4.¹ 複素多様体の芽 $(M, 0)$ 上の混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T} = (H, \nabla, W, P)$ に対して、 H の大域切断 ξ が「ある条件」をみたすとする。このとき、次の組 (\mathcal{F}, ι, i) が同型を除いて一意に存在する。

- 1) 混合 Frobenius 多様体 (の芽) $\mathcal{F} = ((\widetilde{M}, 0), \circ, e, \nabla, E)$,
- 2) 埋め込み $\iota: (M, 0) \hookrightarrow (\widetilde{M}, 0)$,
- 3) 混合 trTLEP 構造の同型 $i: \mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \iota^* \mathcal{T}(\mathcal{F})$ であって、 ξ が e に対応するもの。 □

条件 3 より、 H の階数が $(\widetilde{M}, 0)$ の次元と一致すること、したがって (条件 2 より) $(M, 0)$ の次元より大きいことがわかります。また、 ξ が単位元にあたる情報になっています。

2.2 局所 B モデルへの応用

次に、定理 2.4 の局所 B モデルへの応用について説明します。まず、複素多様体の芽 $(M, 0)$ 上の次数付き偏極可能な混合 Hodge 構造の変動 $\mathcal{H} = (V_{\mathbb{Q}}, F, W)$ を考えます。ここで、 $V_{\mathbb{Q}}$ は \mathbb{Q} 上の局所系、 F は Hodge フィルター、 W はウェイトフィルターを表します。このとき、次の補題が成り立ちます。

補題 2.5. $\mathcal{H} = (V_{\mathbb{Q}}, F, W)$ を上で定義した混合 Hodge 構造の変動、 U を F に対する相反フィルター (opposite filtration)、次数付き偏極 $S = (S_k \mid k \in \mathbb{Z})$ を固定するごとに、混合 trTLEP 構造 $\mathcal{T}(\mathcal{H}, U, S)$ が自然に構成される。

構成は Rees construction と呼ばれる構成法でなされます。また、 $\mathcal{T}(\mathcal{H}, U, S)$ に対する定理 2.4 の「ある条件」を、 \mathcal{H} に対する条件として書き直すことができます。

さて、局所 B モデルの設定に入ります。(ここでは、2 次元の場合に限りますが、適切な仮定のもとで一般の次元にも拡張できます。) Δ を 2 次元反射的整多面体とします。 $(\mathbb{C}^*)^2$ の Δ によって定まるある種のアフィン超曲面のなすモジュライ空間を $\mathcal{M}(\Delta)$ とします。 $(\mathcal{M}(\Delta))$ の構成法は、[1] 参照。) また、各点 $[F] \in \mathcal{M}(\Delta)$ に対し、 $V_F \subset (\mathbb{C}^*)^2$ を対応するアフィン超曲面とします。

$\mathcal{M}(\Delta)$ の安定でなめらかな点 $[F_0]$ を固定すると、相対コホモロジー $H^2((\mathbb{C}^*)^2, V_F)$ 、($[F] \in \mathcal{M}(\Delta)$) に定まる混合 Hodge 構造から、芽 $(\mathcal{M}(\Delta), [F_0])$ 上に混合 Hodge 構造の変動 \mathcal{H}_{Δ} が定まります。補題 2.5 と構成定理 2.4 によって混合 Frobenius 多様体が得られます。

定理 2.6. \mathcal{H}_{Δ} の次数付き偏極 S 、相反フィルター U および「ある条件」をみたす切断 ξ を固定する。このとき、次の組 (\mathcal{F}, ι, i) が同型を除いて一意に定まる。

- 1) 混合 Frobenius 多様体 $\mathcal{F} = ((\widetilde{M}, 0), \circ, e, \nabla, E, W, g)$,
- 2) 埋め込み $\iota: (\mathcal{M}(\Delta), [F_0]) \hookrightarrow (\widetilde{M}, 0)$,
- 3) 混合 trTLEP 構造の同型 $i: \mathcal{T}(\mathcal{H}_{\Delta}, S, U) \xrightarrow{\sim} \iota^* \mathcal{T}(\mathcal{F})$ で、 ξ が e に対応するもの。 □

定理の「ある条件」をみたす ξ が存在することは、 \mathcal{H}_{Δ} の組み合わせ論的表示 ([1], [7]) からわかります。定理の中の相反フィルター U や次数付き偏極 S を、局所ミラー対称性の状況で適切に定めることが次の課題です。

¹この定理は、Hertling-Manin[3] の Theorem 4.5 の混合 Frobenius 多様体への拡張となっています。有理型平坦接続の開折 (unfolding) の概念は、この論文 [3] で定義されました。この概念は混合 trTLEP 構造の場合に自然に拡張されます。

謝辞

この度は、第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました。セミナーを企画、運営して下さった委員の皆様と、熱心に議論をして下さった参加者の皆様に感謝いたします。

参考文献

- [1] V. V. Batyrev, *Variations of the mixed Hodge structure of affine hypersurfaces in algebraic tori*. Duke Math. J. **69** (1993), 349-409.
- [2] T. M. Chiang, A. Klemm, S. T. Yau, E. Zaslow, *Local mirror symmetry: calculations and interpretations*. Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), 495-565.
- [3] C. Hertling, Y. Manin, *Unfoldings of meromorphic connections and a construction of Frobenius manifolds*. Frobenius manifolds, Aspects Math., **E36**, Vieweg, Wiesbaden, 2004, 113-144.
- [4] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*. From Hodge theory to integrability and TQFT tt^* -geometry, 2008, 87-174.
- [5] Y. Konishi, S. Minabe, *mixed Frobenius structure and local A-model*. arXiv:1209.5550
- [6] Y. Konishi, S. Minabe, *local quantum cohomology and mixed Frobenius structure*. arXiv:1405.7476
- [7] Y. Konishi, S. Minabe, *Local B-model and mixed Hodge structure*. Adv. Theor. Math. Phys. **14**(2010), 1089-1145
- [8] T. Reichelt, C. Sevenheck, *Logarithmic Frobenius manifolds, hypergeometric systems and quantum D-modules*, arXiv:1010.2118
- [9] C. Sabbah *Isomonodromic deformations and Frobenius manifolds. An introduction*. Universitext. Springer-Verlag London.

Quasitoric でない toric manifold の例

須山 雄介 *

大阪市立大学大学院理学研究科, 2015 年 2 月

この度は, 第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました. 様々な分野の方々と議論や交流をすることができ, たいへん貴重な経験になりました. このような場を設けてくださった運営委員の方々, そして参加者の皆様に感謝申し上げます.

1 トーリック幾何とは

トーリック幾何学は, 代数幾何と組合せ論の間の架け橋である. Toric variety とよばれる, 代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用をもつ特別な代数多様体は, 扇とよばれる組合せ論的な対象と 1 対 1 に対応する. これにより, toric variety の幾何的な性質を扇の言葉で特徴づけたり, 逆に組合せ論の問題を幾何を用いて解いたりすることができる.

複素 n 次元の **toric variety** とは, \mathbb{C} 上の正規代数多様体 X であって, $(\mathbb{C}^*)^n$ を稠密な開集合として含み, $(\mathbb{C}^*)^n$ の自分自身への自然な作用を X 全体への作用に拡張するものをいう. \mathbb{R}^n の有理強凸多面錐とは, \mathbb{Z}^n の有限個のベクトルではられる錐体 σ であって, \mathbb{R}^n の 0 でないかなる線形部分空間も含まないものをいう. \mathbb{R}^n の扇とは, 有理強凸多面錐からなる空でない有限集合であって, 次の条件を満たすものをいう.

1. $\sigma \in \Delta$ ならば, σ の各面もまた Δ に属する.
2. $\sigma, \tau \in \Delta$ ならば, $\sigma \cap \tau$ はそれぞれの面である.

トーリック幾何の基本定理より, 複素 n 次元の toric varieties の同型類と, \mathbb{R}^n の扇は 1 対 1 に対応する. Toric varieties と, 対応する扇の例を図 1 に示す.

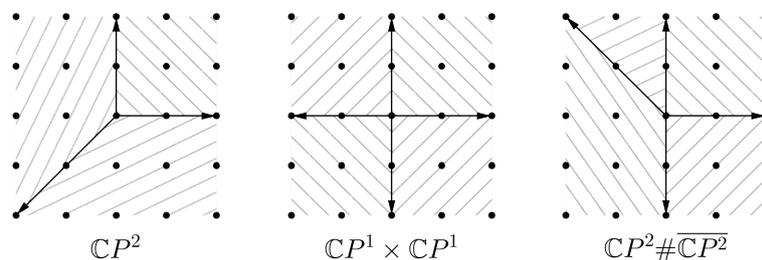


図 1: Toric varieties と扇の例.

*yusuke.suyama.rp30@gmail.com

\mathbb{Z}^n の基底の一部ではられる錐体を非特異な錐体という. 扇 Δ が非特異であるとは, Δ の各錐体が非特異であることをいう. Δ が完備であるとは, Δ の錐体たちが \mathbb{R}^n を覆うことをいう: $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma = \mathbb{R}^n$. Toric varieties と扇の間には, 表 1 のような関係がある.

toric varieties	扇
複素 n 次元	\mathbb{R}^n の扇
滑らか	非特異
コンパクト	完備
オイラー標数	n 次元の錐体の数

表 1: Toric varieties と扇の対応.

たとえば, 図 1 の扇はすべて非特異かつ完備であり, 対応する toric varieties は確かに滑らかでコンパクトである. 本書では, 滑らかでコンパクトな toric variety を **toric manifold** とよぶ.

他にも, toric varieties の基本群やコホモロジー環 (滑らかでコンパクトのとき) も扇の言葉で記述できることが知られている.

2 主結果

X を複素 n 次元の toric manifold とする. 代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用を n 次元トーラス $(S^1)^n$ の作用に制限すると, 一般に軌道空間 $X/(S^1)^n$ は角付き多様体になり, すべての面は可縮で, 面たちの空でない共通部分は連結となる.

多面体の余次元 1 の面をファセットとよぶ. n 次元多面体が単純であるとは, 各頂点に n 個のファセットが集まっていることをいう. X が射影的または $n \leq 3$ ならば, $X/(S^1)^n$ は単純な多面体に角付き多様体として同相になる. これに対し, 次の定理を証明した.

定理 2.1 (Suyama [S]). 各 $n \geq 4$ に対し, 複素 n 次元の toric manifolds X で, $X/(S^1)^n$ がいかなる単純な多面体とも角付き多様体として同相にならないものが無限に存在する.

必ずしも代数多様体でない, より広いクラスが多様体を扱うトーリックトポロジーにおいて, toric manifolds の位相幾何的な一般化を求めることは基本的な問題である. そのようなクラスであると考えられていたものに quasitoric manifolds がある.

定義 2.2 (Davis-Januszkiewicz [DJ]). 実 $2n$ 次元可微分閉多様体 X が **quasitoric manifold** であるとは, X が $(S^1)^n$ の可微分な作用をもち, 次を満たすことをいう.

1. $(S^1)^n$ の作用は locally standard である. すなわち, X は局所的に $(S^1)^n$ の忠実な複素 n 次元表現と同変同相である.
2. 軌道空間 $X/(S^1)^n$ はある単純な多面体に角付き多様体として同相である.

注意 2.3. Davis-Januszkiewicz は, 定義 2.2 の多様体を toric manifold とよんでいるが, 本書では滑らかでコンパクトな toric variety を toric manifold とよんでいるため, 衝突を避けるため前者を quasitoric manifold とよぶことにする.

X が toric manifold ならば, $(\mathbb{C}^*)^n$ の作用を $(S^1)^n$ に制限したものは locally standard である. したがって, 複素 n 次元の toric manifold X は, 射影的または $n \leq 3$ ならば quasitoric manifold で

ある. Toric manifold でない quasitoric manifold の例として, 複素構造を持たない $CP^2 \# CP^2$ がある. 一方, quasitoric manifold でない toric manifold の存在性は, 2002 年に Buchstaber-Panov の本 [BP] で未解決問題として取り上げられて以来, これまで例が知られていなかった. 定理 2.1 より, quasitoric manifold でない toric manifold が無限に存在する. これは, そのような多様体の初めての例を与える. すなわち, quasitoric manifolds は toric manifolds の一般化ではなかったことになる (図 2).

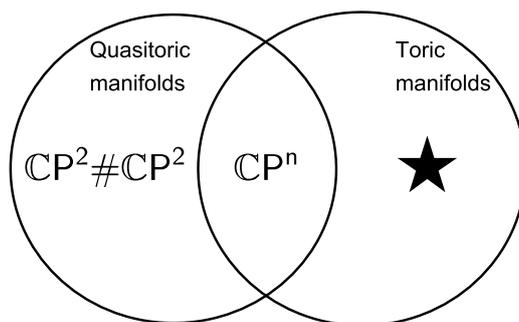


図 2: Toric manifolds と quasitoric manifolds の関係.

注意 2.4. Toric manifolds と quasitoric manifolds を真に含む **topological toric manifolds** というクラスがある [IFM]. Topological toric manifolds は, 非特異で完備な位相的扇とよばれる組合せ論的な対象との 1 対 1 対応がある. これは, toric manifolds と非特異で完備な扇の 1 対 1 対応を自然に拡張するものであり, これこそが toric manifolds の正しい位相幾何的な一般化と考えられる.

3 証明の方針

Δ を m 本の edge vectors v_1, \dots, v_m ではられる非特異な扇とする. Δ の **underlying simplicial complex** K_Δ を

$$\{I \subset \{1, \dots, m\} \mid \{v_i \mid i \in I\} \text{ は } \Delta \text{ の錐体をはる}\}$$

で定める. $n-1$ 次元球面 S^{n-1} の三角形分割を単体的 $n-1$ 球面とよぶ. Δ が \mathbb{R}^n の非特異で完備な扇ならば, K_Δ は単体的 $n-1$ 球面になる (図 3).

Toric varieties と扇の対応である表 1 に付け加わるものとして, 次の命題がある.

命題 3.1. Δ を \mathbb{R}^n の非特異で完備な扇とする. このとき, 対応する toric manifold の軌道空間 $X(\Delta)/(S^1)^n$ が単純な多面体であるための必要十分条件は, K_Δ がある n 次元多面体の境界として実現できることである.

これにより, 定理 2.1 を示すには, 非特異で完備な扇であって, その underlying simplicial complex が多面体の境界として実現できないものを構成すればよいことになる. いいかえれば, 多面体の境界にならない単体的球面の各頂点にベクトルを対応させ, 非特異で完備な扇が得られればよい.

任意の単体的 1 球面および単体的 2 球面は多面体の境界になる. 単体的 3 球面では, 頂点数が 7 以下ならば多面体の境界になる. 頂点数 8 で初めて多面体の境界にならないものが存在する. そ

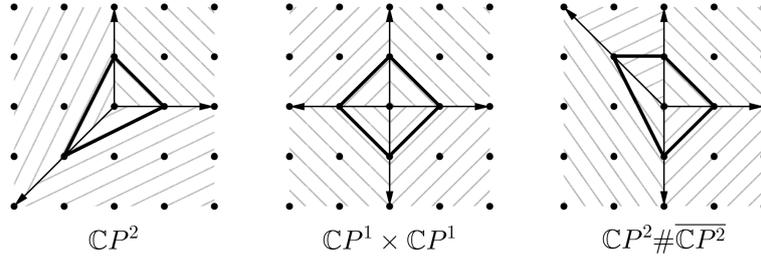


図 3: 扇とその underlying simplicial complexes.

れには Brückner 球面, Barnette 球面 [B] の 2 種類があるが, f ベクトル (各次元の面の数, ここでは頂点, 辺, 三角形, 四面体の数を並べたもの) はそれぞれ $(8, 28, 40, 20), (8, 27, 38, 19)$ であり, 面の数が少ない Barnette 球面を用いることにする.

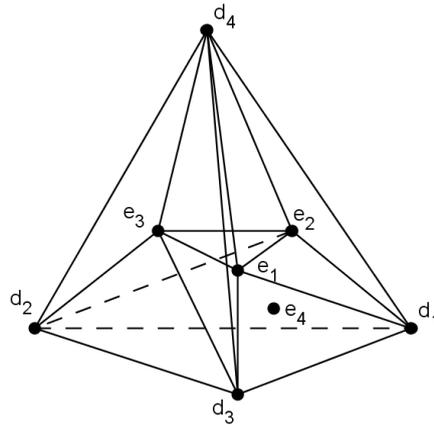


図 4: Barnette 球面.

命題 3.1 より, Barnette 球面の各頂点にベクトルを対応させ, 非特異で完備な扇が得られれば, 複素 4 次元の, 軌道空間が単純な多面体にならない toric manifold が得られたことになるが, 実は, そのようにベクトルをとることはできないことがわかっている.

命題 3.2 (Ishida-Fukukawa-Masuda [IFM]). Barnette 球面は \mathbb{R}^4 の非特異で完備な扇の underlying simplicial complex になり得ない.

以上の事実を踏まえて, 次のような方針を採る.

Step 1. とりあえず, \mathbb{R}^4 の特異で完備な扇 Δ であって, その underlying simplicial complex K_Δ が Barnette 球面であるものを 1 つ構成する.

Step 2. Δ の錐体のうち, 特異なものをすべて細分して非特異な扇 Δ' を得る. 対応する toric variety $X(\Delta')$ は複素 4 次元の toric manifold である (この操作はブローアップによる特異点解消に対応している).

Step 3. Barnette 球面 K_Δ の細分もまた多面体の境界にならないかどうかは一般にはわからないので、改めて $K_{\Delta'}$ が多面体の境界にならないことを示す。したがって、 $X(\Delta')/(S^1)^4$ は単純な多面体ではない。

Step 4. 多面体の境界にならないという性質は、単体的球面の「局所的な」状況で決まる。すなわち、特定の構造の部分複体を含んでいると、多面体の境界にならなくなるのである。ゆえに、そこから離れた面に対応する錐体を更に細分することで、求める多様体が複素 4 次元で無限に得られる。

Step 5. 多面体の境界にならないという性質は懸垂で保たれる。ゆえに、Step 4 で無限に得られた扇の underlying simplicial complex の懸垂をとることで、求める多様体が高次元でも無限に得られ、定理 2.1 の証明が完成する（この操作は CP^1 を直積することに対応している）。

証明の要は、Step 1 において、以下に述べるような性質のよい扇 Δ を見つけることである。Step 3 の証明であるが、Barnette 球面がそうであることの証明 [E, 5.3 Theorem, Chapter III] と同様の議論で示したい。そのためには、Barnette 球面 K_Δ が含む、Step 4 で述べたような部分複体の構造を、Step 2 で変えないようにしなければならない。すると、Step 1 の Δ として、その部分複体に対応する錐体为非特異であるようなもの、特に、19 個の 4 次元錐体のうち「大部分が」非特異であるようなものをとってくる必要がある。

各 4 次元錐体ごとに、Barnette 球面の 8 頂点に対応させたベクトルの成分に関する方程式が定まる。上の問題は、この 19 個の方程式のうち大部分を満たすものを求めるという問題に帰着するが、これを手計算で求めるのは困難であった。そこで、コンピュータでベクトルをランダム生成することにより、19 個の 4 次元錐体のうち 14 個が非特異である扇 Δ が得られた。これを細分すると f ベクトルが $(18, 73, 110, 55)$ の非特異扇 Δ' が得られ、Step 3 も問題なく進み、定理 2.1 の証明が完成した。

参考文献

- [B] D. Barnette, *Diagrams and Schlegel diagrams*, 1970 Combinatorial Structures and their Applications (Proc. Calgary Internat. Conf., Calgary, Alta.) pp. 1–4 Gordon and Breach, New York.
- [BP] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture series, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.
- [DJ] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.
- [E] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. vol. 168, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [IFM] H. Ishida, Y. Fukukawa and M. Masuda, *Topological toric manifolds*, Moscow Math. J. **13** (2013), no. 1, 57–98.
- [S] Y. Suyama, *Examples of smooth compact toric varieties that are not quasitoric manifolds*, Algebraic & Geometric Topology **14** (2014), 5, 3097–3106.

有限多重ゼータ値と有限多重ポリログ

関 真一朗*

大阪大学大学院理学研究科数学専攻 , 2015 年 2 月

本研究は佐久川憲児氏との共同研究である ([SS]).

1 準備

集合 I を

$$I := \coprod_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \underbrace{(\mathbb{Z}_{>0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{>0})}_m,$$

と定義し, I の元をインデックスとよぶ. $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_m) \in I$ に対し, $\text{wt}(\mathbb{k}) := k_1 + \cdots + k_m$ を \mathbb{k} の重さとよび, $\text{dep}(\mathbb{k}) := m$ を \mathbb{k} の深さとよぶ. $\{1\}^m = \underbrace{(1, \dots, 1)}_m$ と略記する.

定義 1.1 (Hoffman 双対). 正の整数 w に対して $I_w = \{\mathbb{k} \in I \mid \text{wt}(\mathbb{k}) = w\}$ とし, $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, w-1\})$ を $\{1, 2, \dots, w-1\}$ のべき集合とする. このとき, 全単射 $\psi: I_w \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, w-1\})$ が対応

$$\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_m) \mapsto \{k_1, k_1 + k_2, \dots, k_1 + \cdots + k_{m-1}\}$$

によって定まる. この全単射を用いて, $\mathbb{k} \in I_w$ に対してその Hoffman 双対 \mathbb{k}^* を

$$\mathbb{k}^* := \psi^{-1}(\{1, 2, \dots, w-1\} \setminus \psi(\mathbb{k}))$$

によって定義する. $\text{wt}(\mathbb{k}^*) = \text{wt}(\mathbb{k})$, $\text{dep}(\mathbb{k}) + \text{dep}(\mathbb{k}^*) = \text{wt}(\mathbb{k}) + 1$ が成り立つ.

例 1.2.

$$m^* = \{1\}^m, (k_1, k_2)^* = (\{1\}^{k_1-1}, 2, \{1\}^{k_2-1}), (k_1, k_2, k_3)^* = (\{1\}^{k_1-1}, 2, \{1\}^{k_2-2}, 2, \{1\}^{k_3-1}),$$

$$(k_1, \{1\}^{k_2-1})^* = (\{1\}^{k_1-1}, k_2).$$

m, k_1, k_2, k_3 は正の整数であり, 三つ目の等号は $k_2 \geq 2$ のときに成立する.

定義より $\mathbb{k}^{**} = \mathbb{k}$ が任意のインデックス \mathbb{k} に対して成り立つ. $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_m) \in I$ に対して $\bar{\mathbb{k}} := (k_m, \dots, k_1)$ とするとき $(\bar{\mathbb{k}})^* = \overline{(\mathbb{k}^*)}$ が成り立つので, これを $\bar{\mathbb{k}}^*$ と書くことにする.

定義 1.3. 正の整数 n に対して \mathbb{Q} 代数 $\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n, \mathbb{Z}[t]}$ をそれぞれ

$$\mathcal{A}_n := \left(\prod_p \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \right) / \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \right),$$

*shinchan.prime@gmail.com

$$\mathcal{A}_{n, \mathbb{Z}[t]} = \left(\prod_p \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[t] \right) / \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}[t] \right)$$

と定義する. 以下では, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{1, \mathbb{Z}[t]} = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ と略記する¹.

各有理数毎に自然な代入写像 $\mathcal{A}_{n, \mathbb{Z}[t]} \rightarrow \mathcal{A}_n$ がある. また, $\mathbf{p} \in \mathcal{A}_n$ を $\mathbf{p} := (p \bmod p^n)_p$, $B_{\mathbf{p}-k}$ を $B_{\mathbf{p}-k} := (B_{p-k} \bmod p^n)_p$ と定義する. ただし, k は 3 以上の整数で, B_{p-k} は $p-k$ 番目の Bernoulli 数を表す (n が文脈上明らかである場合はこの定義のように明記しないものとする).

2 有限多重ゼータ値と Hoffman の双対定理

有限多重ゼータ値を次のように定義する ([KZ]).

定義 2.1. n を正の整数, $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_m)$ をインデックスとする. このとき, 有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbb{k})$ を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbb{k}) := \left(\sum_{p > n_1 > \dots > n_m > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_n$$

により定義し, 等号付有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}_n}^*(\mathbb{k})$ を

$$\zeta_{\mathcal{A}_n}^*(\mathbb{k}) := \left(\sum_{p-1 \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_n$$

により定義する².

有限多重ゼータ値の値の計算や関係式については既に多数の結果が知られている. また, [KZ] において有限多重ゼータ値のなす \mathbb{Q} 線形空間の構造に関する予想が定式化されている. ここでは, Hoffman によって示された等号付有限多重ゼータ値の双対性を紹介する³.

定理 2.2 (Hoffman の双対定理 [H]). 任意のインデックス \mathbb{k} に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbb{k}) = -\zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbb{k}^*).$$

が成立する.

なお, 予想としては非零元はいくらでも存在するが, 有限多重ゼータ値で値が 0 でない (ことが証明されている) 例は一つも知られていない. 一方, 次の節で定義する有限多重ポリログについては abc 予想の仮定の下で値が 0 ではないような特殊値の存在を示すことができる.

3 有限多重ポリログと関数等式

1 変数有限多重ポリログを次のように定義する⁴.

¹ \mathcal{A} の元として有限多重ゼータ値を定義することは Zagier によって提唱された [KZ]. $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ は [OY] における B に等しい. 添え字に $\mathbb{Z}[t]$ が現れる理由については [SS] を見よ. $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]} \neq \mathcal{A}[t]$ に注意.

²和の不等号の向きが逆の定義を採用している文献もあるので読む際には注意が必要である. $\zeta^{\mathcal{A}}(\mathbb{k}) := \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbb{k})$ と \mathcal{A} の位置によって区別することもある.

³これは通常の多重ゼータ値に関する双対性定理の類似物と考えることができるが, 有限多重ゼータ値の世界では等号付の場合にこのような簡明な双対性が成立していることは興味深い.

⁴小野-山本 [OY] による有限多重ポリログとは定義が異なる. 彼らの定義との間の関係については [SS] を見よ.

定義 3.1. 正の整数 n およびインデックス $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_m)$ に対して $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}(t)$, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}^*(t)$, $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}(t)$, $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}^*(t)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}(t) &:= \left(\sum_{p > n_1 > \dots > n_m > 0} \frac{t^{n_1}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_{n, \mathbb{Z}[t]}, \\ \mathcal{L}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}^*(t) &:= \left(\sum_{p-1 \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1} \frac{t^{n_1}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_{n, \mathbb{Z}[t]}, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}(t) &:= \left(\sum_{p > n_1 > \dots > n_m > 0} \frac{t^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_{n, \mathbb{Z}[t]}, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}^*(t) &:= \left(\sum_{p-1 \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1} \frac{t^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} \bmod p^n \right)_p \in \mathcal{A}_{n, \mathbb{Z}[t]}\end{aligned}$$

と定義する.

定義より明らかに

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}(1) = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}(1) = \zeta_{\mathcal{A}_n}(\mathbb{k}), \quad \mathcal{L}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}^*(1) = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_n, \mathbb{k}}^*(1) = \zeta_{\mathcal{A}_n}^*(\mathbb{k}).$$

が成り立つ. この意味で有限多重ポリログは有限多重ゼータ値の自然な拡張概念と言える⁵.

有限多重ポリログに関して以下の関数等式が成り立つことを証明した:

定理 3.2. 任意のインデックス $\mathbb{k} \in I$ に対し,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}, \mathbb{k}}^*(t) = \tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}, \mathbb{k}^*}^*(1-t) - \zeta_{\mathcal{A}}^*(\mathbb{k}^*). \quad (1)$$

が $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ において成立する. 更に, 任意の正の整数 m に対して次の $\mathcal{A}_{2, \mathbb{Z}[t]}$ における関数等式が成立する:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_2, \{1\}^m}^*(1-t) - \zeta_{\mathcal{A}_2}^*(\{1\}^m) = \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, m}(t) - \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, (m, 1)}^*(t) \mathbf{p}.$$

(1) は Hoffman の双対定理の一般化を与えている. 上記関数等式は等号付有限多重ポリログに関するものであるが, 等号無についても以下の関数等式が得られた:

定理 3.3. 任意のインデックス $\mathbb{k} \in I$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, \mathbb{k}}(t) - (\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, (k_1, \dots, k_m, 1)}(t) + \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, (k_1, \dots, k_m+1)}(t)) \mathbf{p} \\ = (-1)^{m-1} (\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_2, \bar{\mathbb{k}}}^*(1-t) - \zeta_{\mathcal{A}_2}^*(\bar{\mathbb{k}}^*)) + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j} \zeta_{\mathcal{A}_2}^*((k_m, \dots, k_{j+1})^*) \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, (k_1, \dots, k_j)}(t).\end{aligned}$$

が $\mathcal{A}_{2, \mathbb{Z}[t]}$ で成立する. 特に, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ で以下の関数等式が成り立つ:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}, \bar{\mathbb{k}}}^*(1-t) + (-1)^m \mathcal{L}_{\mathcal{A}, \mathbb{k}}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{j-1} \zeta_{\mathcal{A}}^*(k_m, \dots, k_{j+1}) \mathcal{L}_{\mathcal{A}, (k_1, \dots, k_j)}(t).$$

ここで, $j = 0$ のときは $\mathcal{L}_{\mathcal{A}, (k_1, \dots, k_j)}(t)$ を $\mathcal{L}_{\mathcal{A}, \emptyset}(t) = 1$ と定義する.

⁵—方で, Elbaz-Vincent と Gangl による有限ポリログの拡張にもなっている ([EG]). 記号 \mathcal{L} の使用は彼らの定義に基づいている.

4 有限多重ポリログの特殊値

有限多重ポリログの関数等式を応用することにより, Tauraso-Zhao 等による交代多重調和和に関する結果 ([TZ]) を用いて有限多重ポリログの特殊値をいくつか計算することが出来る. [SS] では現在計算可能な全ての特殊値を掲載しているが, ここでは次の定理を紹介する:

定理 4.1. m を正の整数とすると, 次の \mathcal{A}_2 における等号を得る:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_2, \{1\}^m}^*(2) = -\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, \{1\}^m}(2) = \left(m + 2 - \frac{m+1}{2^m}\right) \frac{B_{\mathbf{p}-m-1}}{m+1} \mathbf{p},$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2, \{1\}^m}^*(1/2) = -\tilde{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}_2, \{1\}^m}(1/2) = \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}} \frac{B_{\mathbf{p}-m-1}}{m+1} \mathbf{p}.$$

これは例えば Sun-Zhao による次の結果の一般化を与えている ([SZ]):

定理 4.2.

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{H_k}{k2^k} \equiv \frac{7}{24} p B_{p-3} \pmod{p^2}$$

が 7 以上の素数 p に対して成立する. ここで, $H_k = \sum_{j=1}^k 1/j$ は調和数である.

5 Euler の恒等式の一般化

N は正の整数とする. Euler が発見した恒等式

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \binom{N}{n} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

の一般化を与え, 二項係数を $\text{mod } p$ (または $\text{mod } p^2$) 還元することによって有限多重ポリログの関数等式が証明される. 前節の関数等式を証明するために必要となる恒等式は以下の二つである:

定理 5.1. N を正の整数, $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_m)$ をインデックスとし, $\mathbb{k}^* = (k'_1, \dots, k'_{m'})$ を \mathbb{k} の Hoffman 双対とする. このとき, 多項式の恒等式

$$\sum_{N \geq n_1 \geq \dots \geq n_m \geq 1} (-1)^{n_1} \binom{N}{n_1} \frac{t^{n_m}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} = \sum_{N \geq n_1 \geq \dots \geq n_{m'} \geq 1} \frac{(1-t)^{n_{m'}} - 1}{n_1^{k'_1} \dots n_{m'}^{k'_{m'}}} \quad (2)$$

が成立する.

(2) は Dilcher の恒等式, Hernández の恒等式, Hoffman の恒等式, Tauraso-Zhao の恒等式等を含んでいる.

定理 5.2. N を正の整数, $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_m)$ をインデックスとし, $\mathbb{k}^* = (k'_1, \dots, k'_{m'})$ を \mathbb{k} の Hoffman 双対とする. このとき, 多項式の恒等式

$$\begin{aligned} \sum_{N+1 > n_1 > \dots > n_m > 0} (-1)^{n_m} \binom{N}{n_m} \frac{t^{n_1}}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}} &= (-1)^{m-1} \sum_{N \geq n_1 \geq \dots \geq n_{m'} \geq 1} \frac{(1-t)^{n_{m'}} - 1}{n_1^{k'_1} \dots n_{m'}^{k'_{m'}}} \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^{m-j} S_{(k_m, \dots, k_{j+1})^*}(N) \sum_{N+1 > n_1 > \dots > n_j > 0} \frac{t^{n_1}}{n_1^{k_1} \dots n_j^{k_j}} \end{aligned}$$

が成立する. ここで, $S_{\mathbb{k}}(N)$ はインデックス \mathbb{k} に対する等号付多重調和和であり, 以下のように定義される:

$$S_{\mathbb{k}}(N) := \sum_{N \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 1} \frac{1}{n_1^{k_1} \dots n_m^{k_m}}.$$

どちらの恒等式もいくつかの形式的積分作用素を導入して, 数学的帰納法によって証明する. ページ数の都合上, Dilcher の恒等式 (定理 5.1 の $t = 1$ かつ $\mathbb{k} = m$ (m は正の整数) の場合) の 1 つの証明を紹介するに留める:

証明. N に関する数学的帰納法で証明する. $N = 1$ のときは明らか. $N - 1$ のときに成り立つと仮定して, N の場合に m に関する数学的帰納法で示す (二重帰納法). $m = 1$ の場合は Euler の恒等式である.

$$S_{\{1\}^m}(N) = S_{\{1\}^m}(N-1) + \frac{1}{N} S_{\{1\}^{m-1}}(N)$$

が成り立つので, 帰納法の仮定により

$$\begin{aligned} S_{\{1\}^m}(N) &= \sum_{n=1}^{N-1} \binom{N-1}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n^m} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{m-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \binom{N-1}{n} + \frac{n}{N} \binom{N}{n} \right\} \frac{(-1)^{n-1}}{n^m} + \frac{1}{N} \frac{(-1)^{N-1}}{N^{m-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \binom{N-1}{n} + \binom{N-1}{n-1} \right\} \frac{(-1)^{n-1}}{n^m} + \frac{(-1)^{N-1}}{N^m} = \sum_{n=1}^N \binom{N}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n^m} \end{aligned}$$

を得る. □

なお, [SS] では等号付多変数有限多重ポリログに対する関数等式を与えている. また, 有限エタールポリログと有限 (多重) ポリログの関係についても論じている.

参考文献

- [EG] P. Elbaz-Vincent, H. Gangl, *On poly(ana)logs I*, *Compositio Math.* **130** (2002), 161–214.
- [H] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, to appear.
- [K] 金子 昌信, 有限多重ゼータ値 $\text{mod } p$ と多重ゼータ値の関係式, 京都大学数理解析研究所講究録, 多重ゼータ値の諸相, (2012), no.1813, 27–31.
- [KZ] M. Kaneko, D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.
- [OY] M. Ono, S. Yamamoto, *Shuffle product of finite multiple polylogarithms*, arXiv:1502.06693.
- [SS] K. Sakugawa, S. Seki, *On functional equations of finite multiple polylogarithms*, in preparation.
- [SZ] Z. W. Sun, L. L. Zhao, *Arithmetic theory of harmonic numbers (II)*, *Colloq. Math.* **130**(2013), no.1, 67–78.
- [TZ] R. Tauraso, J. Zhao, *Congruences of alternating multiple harmonic sums*, *J. Combinatorics and Number Theory*, **2** (2010), 129–159.

FHT 同型とその自然性

高田 土満*

京都大学数学教室, 2015 年 2 月

1 主定理の背景

本稿の内容は、筆者の論文 [高田] の内容の一部を、コンパクト Lie 群の Caran-Weyl 理論の無限次元版と見なし解説したものである。このセクションでは、論文全体の内容の概要と、その背景 (FHT 同型) について述べる。

FHT 同型とは、[FHT2] で証明されている定理で、コンパクト Lie 群 G の Loop 群 LG の表現論と、 G の G 同変ねじれ K 理論を結びつけた定理である。ねじれ K 理論 (twisted K -theory) の詳しい定義などは [AS] 等に譲る。さて、彼らの定理の主張を、 G がトーラスである場合に述べよう。

定理 1.1 ([FHT2]). T をトーラスとし、 τ を許容的で正值な LT の中心拡大とする。このとき、次の同型が存在する。

$$FHT_T : R^\tau(LT) \rightarrow K_T^{\tau+dim(T)}(T)$$

$R^\tau(LT)$ は、 LT のレベル τ の表現群と呼ばれるものである。詳しくは本文参照。

この定理の証明の概略を述べよう。

まず、別の群 $char(T, \tau)$ を用意し、次の二つの同型を記述する。

$$l.w.T : R^\tau(LT) \rightarrow char(T, \tau), M.d.T : K_T^{\tau+dim(T)}(T) \rightarrow char(T, \tau)$$

これらを記述することで、

$$FHT_T = (M.d.T)^{-1} \circ l.w.T$$

を示し、同型どうしの合成は同型であることから主張を得る。

同型の構成には、Loop 群上の「指数理論」を用いる美しく自然なものである。そこで次の問題を考える。

問題 1.2. $f : T' \rightarrow T$ を Lie 群の準同型とする。このとき、Loop 群の準同型 $Lf : LT' \rightarrow LT$ が自然に定義できる。そこで次の図式を考えることができ、可換になるか？

$$\begin{array}{ccc} R(LT) & \xrightarrow{(Lf)^*} & R(LT') \\ FHT_T \downarrow & & \downarrow FHT_{T'} \\ K_T^{\tau+dim(T)}(T) & \xrightarrow{f^*} & K_{T'}^{f^*\tau+dim(T')}(T') \end{array}$$

この問題の答えは、No である。理由は二つあって、表現論側の問題としては、正エネルギー表現が無限次元であるため、表現を引き戻すと有限可約性がくずれることがあるという問題がある。K 理論側の問題としては、ねじれ K 理論は一般コホモロジー論であり、引き戻しが定義されてい

*d.takata@math.kyoto-u.ac.jp

るが、それは群の次元を変えないため、上で書いた f^* は、次元が等しくない限り定義されない。そこで次の問題に取り組むことにした。

問題 1.3. *Lie* 群の準同型 $f : T' \rightarrow T$ に対し、 $f^\# : K_T^{\tau+\dim(T)}(T) \rightarrow K_{T'}^{f^*\tau+\dim(T')}(T')$ と $f^! : R^\tau(LT) \rightarrow R^{f^*\tau}(LT')$ を、以下の可換図式が成り立つように、それぞれ表現論、 K 理論の言葉を使って定義せよ。

$$\begin{array}{ccc} R^\tau(LT) & \xrightarrow{f^!} & R^{f^*\tau}(LT') \\ FHT_T \downarrow & & FHT_{T'} \downarrow \\ K_T^{\tau+\dim(T)}(T) & \xrightarrow{f^\#} & K_{T'}^{f^*\tau+\dim(T')}(T') \end{array}$$

私はこの問題を、 df が単射である場合に解決した。しかしそれは、次の二つの定理の系にすぎない。その二つの定理を述べる前に、一つ記号を用意しよう、補題の形で述べる。この補題は以下でも扱う。

補題 1.4. $f : T' \rightarrow T$ を *Lie* 群の準同型とすると、以下の準同型が定義できる。

$$\text{char}(f) : \text{char}(T, \tau) \rightarrow \text{char}(T', f^*\tau)$$

定理 1.5. 補題と同じ状況の時、 $f^! : R^\tau(LT) \rightarrow R^{f^*\tau}(LT')$ と $f^\# : K_T^{\tau+\dim(T)}(T) \rightarrow K_{T'}^{f^*\tau+\dim(T')}(T')$ が定義でき、次の図式がともに可換になる。

$$\begin{array}{ccccccc} R^\tau(LT) & \xrightarrow{f^!} & R^{f^*\tau}(LT') & K_T^{\tau+\dim(T)}(T) & \xrightarrow{f^\#} & K_{T'}^{f^*\tau+\dim(T')}(T') \\ l.w.T \downarrow & & l.w.T' \downarrow & M.d.T \downarrow & & M.d.T' \downarrow \\ \text{char}(T, \tau) & \xrightarrow{\text{char}(f)} & \text{char}(T', f^*\tau) & \text{char}(T, \tau) & \xrightarrow{\text{char}(f)} & \text{char}(T', f^*\tau) \end{array}$$

この二つの定理と Freed たちの証明から、上の主定理を導くのは、diagram chasing の演習問題である。

以下の内容は、上の定理 1.5 の表現論側の主張を、コンパクト *Lie* 群の Cartan-Weyl 理論のアナロジーとみなすことができるということを解説したものである。

2 Cartan-Weyl 理論

この節では、Cartan-Weyl 理論を大雑把に記述する。 G を連結コンパクト *Lie* 群、 $i : T \hookrightarrow G$ をその極大トーラスとする。 T の次元を G の階数と呼ぶのであった。 G の表現は T への制限で完全に決定することが知られている。 G と T が与えられると、Weyl 群と呼ばれる有限群 $W(G)$ が定義され、 T に作用する。 T の表現が G の表現の制限から得られるとき、その表現は $W(G)$ の対称性がある。では逆に、 T の表現であって $W(G)$ 不変なものが与えられたとき、 G の表現の制限として実現されるか？ この自然な問いに答えるのが Cartan-Weyl 理論である。表現環の形で定理を述べよう。

定理 2.1. $i^* : R(G) \rightarrow R(T)$ の像は不変部分環 $R(T)^{W(G)}$ に一致する。

以下の可換図式を考えよう。 $i : S \hookrightarrow H$ と $k : T \hookrightarrow G$ はそれぞれ極大トーラスである。表現環の関手性から、以下の可換図式が誘導される。

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{f^*} & R(H) \\ k^* \downarrow & & i^* \downarrow \\ R(T) & \xrightarrow{f|_S^*} & R(S) \end{array}$$

$f|_S^*$ は環準同型であることから、生成元の行先ですべての値が決まる。これは、 $f|_S^*(X_j)$ を具体的に計算することで表示できる。

これを以下の議論との対応が分かりやすいように書き直しておこう。以下、表現環の環構造を忘れ、ただの \mathbb{Z} 上の自由加群とすることにする。このとき、それは既約表現の同値類の集合で生成される \mathbb{Z} 上の自由加群である。つまり、

$$\Pi_T := \ker(\exp : \mathfrak{t} \rightarrow T), \Pi_S := \ker(\exp : \mathfrak{s} \rightarrow S)$$

$$\Lambda_T := \text{Hom}(T, U(1)) \cong \text{Hom}(\Pi_T, \mathbb{Z}), \Lambda_S := \text{Hom}(S, U(1)) \cong \text{Hom}(\Pi_S, \mathbb{Z})$$

とおくと、 $R(T) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_T], R(S) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_S]$ という同型が成り立つ。ここで、 $\mathbb{Z}[X]$ は、集合 X で生成される自由加群を表す。 Λ_T, Λ_S に離散位相を入れることで、これらは標準的に、コンパクト台を持つ K 群 $K(\Lambda_T), K(\Lambda_S)$ に同型である。この同一視のもと、表現のひき戻し $f|_S^* : R(T) \rightarrow R(S)$ は、1次元表現のなす集合を $\Lambda_T = \text{Hom}(\Pi_T, \mathbb{Z}) \subseteq \mathfrak{t}^*, \Lambda_S = \text{Hom}(\Pi_S, \mathbb{Z}) \subseteq \mathfrak{s}^*$ とみなしたとき、

$${}^t d(f|_S) : \Lambda_T \subseteq \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{s}^* \supseteq \Lambda_S$$

に対応する。表現環の間の写像 $f|_S^*$ とは、1次元表現のなす集合の間の写像 $f|_S^* : \Lambda_T \rightarrow \Lambda_S$ を線形に拡張したものであるから、 K 群間の写像では、push-forward 写像

$${}^t d(f|_S)_! : K(\Lambda_T) \rightarrow K(\Lambda_S)$$

に対応する。また、この書き換えによって、 $R(G) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_T/W(G)] \cong K(\Lambda_T/W(G))$ という同型が成り立ち、 f^* も上の同型と可換図式を通じて、表現環のレベルでは ${}^t d(f|_S)_!$ によって計算できる。

3 正エネルギー表現の分類と主定理

3.1 正エネルギー表現の分類

下で定義する正エネルギー表現は自明でない限り射影的で ([PS]), LT 自身でなくそれを中心拡大した群の表現を考える必要があるが、ここでは射影表現の形で定義する。

定義 3.1 (正エネルギー表現). 連続準同型 $\rho : LT \rtimes S^1 \rightarrow PU(\mathcal{H})_{c.o.}$ がレベル τ の正エネルギー表現であるとは、次を満たす時をいう。

ρ を、 S^1 の表現と思い、普通のユニタリ表現に持ち上げる。 S^1 の表現の完全可約性からウェイト分解 $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$ が定義できる (ここで V_n には S^1 が重み n で作用する)。このとき、各 n に対し V_n は有限次元であり、 $V_0 \neq 0, V_n = 0 (n < 0)$ を満たす。

射影表現があると、群の中心拡大 LT^τ が定義でき、中心拡大の同型類をレベルという。有限可約なレベル τ の表現のなす半群の Grothendieck 構成を $R^\tau(LT)$ と書き、レベル τ の表現群と呼ぶ。レベル τ は、準同型 $\kappa^\tau : \Pi_T \rightarrow \Lambda_T$ を定める ([FHT2])。

レベル τ の既約正エネルギー表現の分類定理が知られている。 LT の中心拡大の定数ループの集合 T への制限は、 T の中心拡大を定める。 T^τ の1次元表現 (ρ, V) であつて、 $\rho \circ i(e^{i\theta}) = e^{i\theta} id_V$ となるものを τ -twisted 表現と呼ぶ。その同値類の集合を、 Λ_T^τ と書く。表現のテンソル積によって、 Λ_T は Λ_T^τ に作用する。この作用と $\kappa^\tau : \Pi_T \rightarrow \Lambda_T$ を通じて、 Π_T も Λ_T^τ に作用する。

定理 3.2 ([PS]). レベル τ の既約正エネルギー表現の同値類は、商空間 $\Lambda_T^\tau / \kappa^\tau(\Pi_T)$ の点と一対一に対応する。つまり、同型

$$l.w.T : R^\tau(LT) \rightarrow \mathbb{Z}[\Lambda_T^\tau / \kappa^\tau(\Pi_T)]$$

が存在する。ここで、右辺は、集合 $\Lambda_T^\tau / \kappa^\tau(\Pi_T)$ で生成される \mathbb{Z} 上の自由加群である。

この定理によって、各軌道 $[\lambda]_T$ に対し、既約表現 $V_{[\lambda]}$ が定義できる。このとき、 $l.w.T(V_{[\lambda]}) = [\lambda]_T$ である。この定理については、[PS], [FHT2], [高田] に解説がある。

さて、 $LT^\tau \rtimes S^1$ の極大連結可換部分群として $T^\tau \times S^1$ が取れることに注意して、Weyl 群を計算しよう。半直積が普通の直積になっているのは S^1 の T^τ への作用が自明だからである。 $l \in LT$ の共役作用が $T \times S^1$ を保つとする。このとき、

$$(l, 0)(0_T, \theta_0)(l^{-1}, 0)(\theta) = (l(\theta)l(\theta - \theta_0)^{-1}, 0)$$

が θ によらない定数ループであるとする、写像 $\theta \mapsto l(\theta)l(0)^{-1}$ が準同型になる。実際に、 $t(\theta) := l(\theta)l(0)^{-1} = l(\theta + \theta')l(\theta')^{-1}$ と置くと、

$$t(\theta_1 + \theta_2) = l(\theta_1 + \theta_2)l(0)^{-1} = l(\theta_1 + \theta_2)l(\theta_1)^{-1}l(\theta_1)l(0)^{-1} = t(\theta_2)t(\theta_1).$$

よって、これに対応するループ全体の集合は $T \times \Pi_T$ に同型で、簡単な議論によって l の持ち上げは $T^\tau \times S^1$ を保つので $T^\tau \times S^1$ の正規化群は $(T \times \Pi_T)^\tau$ に同型である。したがって、 $LT^\tau \rtimes S^1$ の Weyl 群は Π_T に同型で、定理 3.2 は、Cartan-Weyl 理論のアナロジーであるとみなすことができる。

$f: T' \rightarrow T$ を、接写像が単射である連続な群準同型とする。同型 $R(T) \cong \mathbb{Z}[\Lambda_T]$ の右辺のアナロジーで、 $char(T, \tau) := \mathbb{Z}[\Lambda_T^\tau / \kappa^\tau(\Pi_T)]$, $char(T', f^*\tau) := \mathbb{Z}[\Lambda_{T'}^{f^*\tau} / \kappa^{f^*\tau}(\Pi_{T'})]$ とおく。「引き戻し」

$$char(f): char(T, \tau) \rightarrow char(T', f^*\tau)$$

を、トーラスの表現環の間の準同型のアナロジーで、 Π_T -orbit $[\lambda]_T$ に対し、 $\Lambda_{T'}^{f^*\tau}$ の部分集合 ${}^t df(\lambda + \kappa^\tau(\Pi_T))$ を $\Pi_{T'}$ -orbit の有限和 $\coprod_{i=1}^N (\mu_i + \kappa^{f^*\tau}(\Pi_{T'}))$ で書き直し、 $char(f)([\lambda]_T)$ を、 $\sum_{i=1}^N [\mu_i]_{T'}$ と定義することによって定める。計算によって次がわかる。

補題 3.3 ([高田]). (1) $i_1: T_1 \rightarrow T = T_1 \times T_2$ を直積への自然な埋め込みとすると、

$$char(i_1)([\lambda]_T) = [{}^t di_1(\lambda)]_{T_1}.$$

(2) $q: T' \rightarrow T$ を有限被覆とすると、

$$char(q)([\lambda]_T) = \sum_{m \in \Pi_T/dq(\Pi_{T'})} [{}^t dq(\lambda) + {}^t dq(\kappa^\tau(m))]_{T'}.$$

m は商空間 $\Pi_T/dq(\Pi_{T'})$ の各要素の代表元である。 $[\cdot]_{T'}$ は代表元のとり方によらない。

3.2 主定理

主定理を述べる。 $f: T' \rightarrow T$ を、接写像が単射である連続な群準同型であるとする。このとき、

$$f^!: R^\tau(LT) \rightarrow R^{f^*\tau}(LT')$$

が定義できて、以下の定理が成り立つ。

定理 3.4 (T.). 以下の可換図式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} R^\tau(LT) & \xrightarrow{f^!} & R^{f^*\tau}(LT') \\ l.w.T \downarrow & & l.w.T' \downarrow \\ char(T, \tau) & \xrightarrow{char(f)} & char(T', f^*\tau) \end{array}$$

f が直積の第一成分への埋め込みであるとき、有限被覆であるときだけを扱う。一般の場合は、中心拡大が正值であることから、直積への埋め込みと有限被覆の合成で標準的に書き直すことができるため、理論的にもこれで十分である。

3.2.1 直積の場合

$T = T_1 \times T_2$, $\tau = p_1^* \tau_1 + p_2^* \tau_2$ とする. つまり,

$$LT^\tau \cong LT_1^{\tau_1} \otimes LT_2^{\tau_2} \cong LT_1^{\tau_1} \times_{U(1)} LT_2^{\tau_2}.$$

$i_1 : T_1 \rightarrow T$ を自然な埋め込みとする. 上の具体的な表現の構成を用いて, i_1^* が well-defined でないことを証明しよう.

命題 3.5.

$$V_{[\lambda]} \cong V_{[{}^t di_1(\lambda)]} \otimes V_{[{}^t di_2(\lambda)]}$$

$V_{[{}^t di_2(\lambda)]}$ は無限次元であるため, $i_1^* V_{[\lambda]}$ は有限可約でない. よって, 表現の引き戻しを考えていては, 表現環の間の写像は定義できない. そこで, 次の定義を考えると定理が成り立つ.

定義 3.6.

$$i_1^! V := \sum_{[\lambda_2] \in \Lambda_{T_2}^{\tau_2} / \kappa^{\tau_2}(\Pi_{T_2})} \text{Hom}_{LT_2^{\tau_2}}(V_{[\lambda_2]}, i_2^* V)$$

命題 3.7.

$$i_1^!(V_{[\lambda]}) \cong V_{[{}^t di_1(\lambda)]}$$

この命題と補題 3.3 (1) より, 定理を得る.

3.2.2 有限被覆の場合

命題 3.8.

$$q^* V_{[\lambda]} = \bigoplus_{m \in \Pi_T / dq(\Pi_{T'})} V_{[{}^t dq(\lambda) + {}^t dq(\kappa^\tau(m))]}$$

補題 3.3 (2) により, $q^!$ を q^* と定義することで主定理の可換図式が成り立つことがわかる.

参考文献

- [FHT1] D. S. Freed, M. J. Hopkins, and C. Teleman, Loop groups and twisted K-theory I, preprint. arXiv math.AT/0711.1906
- [FHT2] D. S. Freed, M. J. Hopkins, and C. Teleman, Loop groups and twisted K-theory II, preprint. arXiv math.AT/0511232.
- [PS] A. Pressley, G. Segal, Loop Groups, Oxford University Press, New York, 1986.
- [小林大島] 小林俊行, 大島利雄, リー群と表現論, 岩波書店, 2005.
- [高田] 高田土満, Naturality of FHT isomorphism, preprint arXiv:1502.03761
- [AS] M. Atiyah, G. Segal, twisted K-theory, preprint. arXiv math/0407054

主対角和モデルに関するトーリック環の性質について

武田 裕康 *

北海道大学大学院理学院数学専攻博士課程, 2015年2月

1 導入

$n \times n$ 自然数行列 $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ から行和、列和、主対角成分の和からなる $2n + 1$ -次元自然数ベクトルをとる写像

$$\pi_{diag} : M_n(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}^{2n+1} \quad M \mapsto (r_1(M), \dots, r_n(M), c_1(M), \dots, c_n(M), d(M))$$

を考える。ただし、

$$r_i(M) = m_{i1} + \dots + m_{in}$$

$$c_j(M) = m_{1j} + \dots + m_{nj}$$

$$d(M) = m_{11} + \dots + m_{nn}$$

である。この写像の像 $\text{Im}(\pi_{diag})$ は (i, j) -行列単位 E_{ij} の像 $\mathbf{e}_{i,j} = \pi_{diag}(E_{ij})$ から生成される半群である。つまり、 $\mathcal{A}_n = \{\mathbf{e}_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ とすると、 $\text{Im}(\pi_{diag}) = \mathbb{N}\mathcal{A}_n$ が成り立つ。(講演で話した『配置行列』 \mathcal{A}_n とは、列ベクトル $\mathbf{e}_{i,j}$ を $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, n), (2, 1), \dots, (n, n-1), (n, n)$ の順に並べたものである。) このように、自然数行列から行和、列和、主対角和をとることを『主対角和モデル』と呼ぶ。今回はこの主対角和モデルに関するトーリック環 $R_n := \mathbb{C}[\mathbb{N}\mathcal{A}_n]$ とその正規化との差について考察した。

一般に $L \subset \{(i, j) \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ を $m \times n$ を自然数行列の成分の部分集合とする。上と同様に $m \times n$ 自然数行列の行和、列和、 L に含まれる成分の和から半群 $\mathbb{N}A_L$ を定義し、 $R_L = \mathbb{C}[\mathbb{N}A_L]$ を半群環、 I_L を A_L から定まるトーリックイデアルとしたとき、次が成り立つ。

Theorem 1.1 (大杉-日比 (2009)[1]) 次は同値である。

- (i) I_L は *quadratic* な二項式で生成される。
- (ii) I_L は *squarefree* なイニシャルイデアルを持つ。
- (iii) I_L は *quadratic* な *Gröbner* 基底を持つ。
- (iv) R_L は *normal* である。
- (v) R_L は *Koszul* である。

*tkd.i-0-u@math.sci.hokudai.ac.jp

(vi) L は 2×2 *block diagonal* であるか、*triangular* のいずれかである。

ただし、 $L \subset \{(i, j) \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ に対して、

- L が 2×2 *block diagonal* とは、ある自然数 r, c が存在して、

$$L = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq c\} \cup \{(i, j) \mid r+1 \leq i \leq m, c+1 \leq j \leq n\}$$

となるときにいう。

- L が *triangular* とは、

$$(i, j) \in L \Leftrightarrow \text{任意の } 1 \leq i' \leq i, 1 \leq j' \leq j \text{ に対して } (i', j') \in L$$

を満たすときにいう。

定理 1.1 で (iv) と (vi) が同値になるのが今回のポイントである。以上から主対角和モデルのときにはトーリック環が正規でないということがわかる。

2 準備

上の問題を考察する際、「半群環における正規化との差」と「半群における正規化との差」は一対一に対応する。そして、半群環より半群における正規化との差を計算する方が簡単である。よって、半群での正規化との差について計算する。ここではそのために必要な道具を定義する。

d, n を正の整数、 $A := \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ とする。 $S := \mathbb{N}A$ を A から生成される半群、 $C := \mathbb{R}_{\leq 0}A$ を A から生成される cone とする。

半群 S の正規化を $\tilde{S} := C \cap \mathbb{Z}A$ と定義する。これは、「cone C 内の A によって生成される格子点全体」のことである。 $S = \tilde{S}$ を満たす時、半群 S は正規であるという。 $(S$ が正規であることと半群環 $\mathbb{C}[S]$ が正規であることは同値である。) S が正規でないとき、 $\text{Holes}(\tilde{S}) := \tilde{S} \setminus S$ (\tilde{S} の) **Holes** という。

$\text{Holes}(\tilde{S})$ について考える際、まず次の Hilbert Basis という集合を求める。

Definition 2.1 半群 S が正規でない時、次を満たす $\{\mathbf{0}\} \neq \mathcal{H} \subset \tilde{S}$ が存在する。

$$\tilde{S} = \cup_{h \in \mathcal{H}} (h + S)$$

これを満たす \mathcal{H} のうち、包含関係に関して極小となるものを (\tilde{S} の) **Hilbert Basis** と呼ぶ。

この Hilbert Basis を計算するとき、 C の facet を求めると便利である。

Definition 2.2 τ を C の *facet* (余次元 1 の面) とするとき、次の条件

$$(1) f_\tau(C) \geq 0$$

$$(2) f_\tau(\tau) = 0$$

$$(3) f_\tau(\mathbb{Z}A) = \mathbb{Z}$$

を満たす線形形式 f_τ を τ の *primitive integral support function* という。

この primitive integral support function は任意の facet に対して一意に定まる。

Example 2.3

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、 $\mathbb{R}_{\geq 0}A$ の facet は

$$\{\tau_1 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_1, \tau_3 = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{a}_3\}$$

であり、各 facet に対応する primitive integral support function は $s = (s_1, s_2)$ として

$$f_{\tau_1}(s) = s_2, f_{\tau_3}(s) = 3s_1 - s_2$$

である。また、 $(\mathbb{R}_{\geq 0}A \cap \mathbb{Z}A) \setminus \mathbb{N}A = \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$ となるので、 $\mathbb{R}_{\geq 0}A$ の Hilbert Basis は $\mathcal{H} = \{\mathbf{0}, (1, 1)\}$ である。

3 主結果

以下では、講演内で話すことのできなかつた証明に至る流れを含めて書く。以下、 $n \geq 3$, $S_n := \mathbb{N}A_n$, $C_n = \mathbb{R}_{\geq 0}A_n$, $\tilde{S}_n := C_n \cap \mathbb{Z}S_n$ とする。

3.1 facet の計算

まず $n = 2$ のときは容易に計算できて、 C_n の primitive integral support function は次のようになる。

$$\mathcal{F}_2 := \{r_1 - c_2 + d, r_2 - c_1 + d, r_1 + c_2 - d, r_2 + c_1 - d\}$$

この結果から、次の集合が C_n の primitive integral support function であると推測した。

$$\mathcal{F}_n = \left\{ r_k, c_k, d, \sum_{i \in I} r_i + \sum_{i \notin I} c_i - d, \sum_{i \neq k} r_i - c_k + d \mid \begin{array}{l} I \subsetneq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset, \\ k = 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

これは以下のとおり正しい。

Theorem 3.1 $f \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow f$ は C_n の primitive integral support function.

証明の際、次の補題が重要な役割をする。

Lemma 3.2 $\mathcal{F}_n^{ij} := \{f \in \mathcal{F}_n \mid f(\mathbf{e}_{i,j}) > 0\}$ とおき、 $\mathbf{e} \in C_n$ に対して $\alpha_{i,j}(\mathbf{e}) := \min \left\{ \frac{f(\mathbf{e})}{f(\mathbf{e}_{i,j})} \mid f \in \mathcal{F}_n^{ij} \right\}$ とおく。

このとき、

$$\begin{cases} \alpha_{n,n}(\mathbf{e}) = 0 \\ \alpha_{n,i}(\mathbf{e}) = 0 & (i = 1, \dots, n-1) \Leftrightarrow r_n(\mathbf{e}) = c_n(\mathbf{e}) = 0 \\ \alpha_{i,n}(\mathbf{e}) = 0 & (i = 1, \dots, n-1) \end{cases}$$

が成り立つ。

証明のアウトラインは次のとおりである： $n \times n$ 正方行列から第 n 行、第 n 列を取り除く操作をしたとき、その前後で S の形が主対角成分で保たれることを用いて、帰納法によって示す。 $\forall f \in \mathcal{F}_n, f(\mathbf{e}_0) \geq 0$ を満たす $\mathbf{e}_0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ に対して、 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_0 - \alpha_{n,n}(\mathbf{e}_0)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \alpha_{n,n-1}(\mathbf{e}_1), \dots$ と帰納的に定めると、 \mathbf{e}_n は $\alpha_{n,i}(\mathbf{e}_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす。よって、補題から $r_n(\mathbf{e}_n) = 0$ となる。さらに、 $\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n - \alpha_{n-1,n}(\mathbf{e}_n)$, $\mathbf{e}_{n+2} = \mathbf{e}_{n+1} - \alpha_{n,n-2}(\mathbf{e}_{n+1}), \dots$ と帰納的に定めると、 \mathbf{e}_{2n+1} は $\alpha_{i,n}(\mathbf{e}_{2n+1}) = \alpha_{n,i}(\mathbf{e}_{2n+1}) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす。よって、補題から $r_n(\mathbf{e}_{2n+1}) = c_n(\mathbf{e}_{2n+1}) = 0$ となる。このことから \mathbf{e}_{2n+1} を \mathbb{R}^{2n-1} の元とみなせる。さらに、 $\forall f \in \mathcal{F}_{n-1}, f(\mathbf{e}_{2n+1}) \geq 0$ を満たすことも示せる。以上から、 $n = 2$ のときに帰着される。

3.2 Hilbert Basis の計算

次に Hilbert Basis の計算をする。 \mathcal{H}_n の定義から、

$$\mathcal{H}_n = \left\{ \mathbf{e} \in \mathbb{Z}S_n \mid \begin{array}{l} f(\mathbf{e}) \geq 0 \ (\forall f \in \mathcal{F}_n), \\ \forall i, j, \exists f \in \mathcal{F}_n, \text{ s.t. } f(\mathbf{e} - \mathbf{e}_{i,j}) < 0 \end{array} \right\}$$

となる。

Theorem 3.3 $n \geq 3$ のとき、 $\mathbf{a}_{i,j} \in \tilde{S}_n$ ($i < j$) を

$$\begin{cases} r_k(\mathbf{a}_{i,j}) = c_k(\mathbf{a}_{i,j}) = 1 & (k = i, j) \\ r_k(\mathbf{a}_{i,j}) = c_k(\mathbf{a}_{i,j}) = 0 & (k \neq i, j) \\ d(\mathbf{a}_{i,j}) = 1 \end{cases}$$

として定める。このとき、

$$\mathcal{H}_n = \{\mathbf{a}_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

である。

$\mathbf{a}_{i,j} \in \mathcal{H}_n$ は直接計算して示す。これ以外に Hilbert Basis がいないことを示すときには $\mathbf{a}_{i,j}$ 各 facet 上、及び C_n の内部に $\forall i, j, \exists f \in \mathcal{F}_n, \text{ s.t. } f(\mathbf{e} - \mathbf{e}_{i,j}) < 0$ を満たす点が存在しないことを計算して示した。

3.3 Holes の計算

最後に Holes を計算する。 $\mathbf{e}_{i,j}, \mathbf{a}_{i,j}$ について

$$2\mathbf{a}_{i,j} \in S_n, \mathbf{a}_{i,j} + \mathbf{e}_{i',j'} \in S_n \ (i' \neq j', (i', j') \neq (i, j), (j, i))$$

が成り立つ。このことから、Holes は

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{i,i} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{j,j} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{i,j} + \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{j,i}, \\ F_{diag} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_{k,k} \end{aligned}$$

とするとき、 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{a}_{ij} + (F_{ij} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n)) + (\mathbf{a}_{ij} + (F_{diag} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n))$ に含まれることがわかる。さらに、次が示せる。

Theorem 3.4

$$\text{Holes}(\tilde{S}_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbf{a}_{ij} + (F_{ij} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n)) + (\mathbf{a}_{ij} + (F_{diag} \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_n))$$

が成り立つ。

4 concluding remarks

講演内でも話したが、facet の計算の証明法は「第 n 行、第 n 列を取り除く操作をした際、形が保たれる」 $L \subset \{(i, j) \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ に対しても同様に使えることが予測される。特に補題 3.2 は証明の鍵になるだけでなく、さらに一般の L でも似たような形で成り立つのではないか…というのが私の予想である。また、Hilbert Basis の計算方法も同じように拡張ができそうだと考えられる。

紙面の都合で書くことができなかったが、今回の結果の応用として facet や Hilbert Basis を用いて超幾何多項式

$$\Phi_{\mathcal{A}_n, \beta}(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n, \mathcal{A}_n \mathbf{u} = \beta} \frac{1}{\mathbf{u}!} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$$

(ただし $\mathbf{u}! = u_1! \cdots u_d!$) の生成微分作用素を計算したり、Holes を用いて R_n の局所コホモロジーについて調べることができる。前者については [2] に詳しく書かれているので、こちらを読むとよい。

5 謝辞

この度は第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました。この城崎で同年代の数学研究者と交流できたこと、また、自分の分野とは違った研究発表をお聞きできたことを大変嬉しく思います。また、私の講演について興味を持っていただき、質問・コメントをしてくださった方にもお礼申し上げます。最後に、今回発表の機会を与えてくださり、様々に支援をしてくださった運営委員の皆様にお礼申し上げます。

参考文献

- [1] Ohsugi Hidefumi and Hibi Takayuki: Two way subtable sum problem and Quadratic Gröbner bases: Proceedings of the American Mathematical Society 137 (2009) no. 5, 1539–1542.
- [2] Saito Mutsumi and W.N.Traves: Differential algebras on semigroup algebras in Symbolic Computation: Solving Equations in Algebra, Geometry, and Engineering (South Hadley, MA, 2000), Contemp. Math. 286, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 207226

Ehrhart 多項式の係数における best possible な下限

土谷 昭善*

大阪大学大学院 情報科学研究科, 2015 年 2 月

この度は第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただき、そして講演の機会をいただきましたことを深く感謝申し上げます。

1 導入

空間 \mathbb{R}^d の点 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ は $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq d$ のとき整数点と呼ばれる。凸多面体が整であるとはその任意の頂点が整数点であるときにいう。 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。任意の正整数 n について、

$$n\mathcal{P} := \{n\alpha \mid \alpha \in \mathcal{P}\}$$

と置く。 $n\mathcal{P}$ に含まれる整数点の個数を $i(\mathcal{P}, n)$ と表す。つまり

$$i(\mathcal{P}, n) := |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$$

である。

この時、次のようなことが知られている。

- $i(\mathcal{P}, n)$ は、 n に関する d 次多項式であり、定数項は常に 1 である。
- $i(\mathcal{P}, n)$ の n^d における係数は $\text{vol}(\mathcal{P})$ 、 n^{d-1} における係数は $\frac{\text{vol}(\partial\mathcal{P})}{2}$ と一致する。

この多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ を \mathcal{P} の **Ehrhart 多項式** と呼ぶ。

例 1. 空間 \mathbb{R}^3 の点

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$$

を頂点とする立方体 \mathcal{P} の Ehrhart 多項式は

$$\begin{aligned} i(\mathcal{P}, n) &= (n+1)^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

である。

Ehrhart 多項式については [1] に詳しく書かれている。

*a-tsuchiya@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

2 Ehrhart 多項式の係数における下限

整数 i と変数 z に対して定義された多項式

$$c_i(z) = (z+i)(z+i-1)\cdots(z+i-(d-1)) = d! \binom{z+i}{d}$$

の r 次の係数を $C_{r,i}^d$ で表す。さらに $d \geq 3$ に対して、

$$M_{r,d} = \min\{C_{r,i}^d : 1 \leq i \leq d-2\}$$

とする。

Ehrhart 多項式 $i(\mathcal{P}, n)$ の r 次の係数を $g_r(\mathcal{P})$ とする。 $r = 1, \dots, d-1$ に対して、 $g_r(\mathcal{P})$ の下限が \mathcal{P} の体積 $\text{vol}(\mathcal{P})$ を用いて与えられた ([2])。

定理 2 (M. Henk and M. Tagami, 2009). $d \geq 3$ とし、 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。このとき $r = 1, \dots, d-1$ に対して、

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!} \left((-1)^{d-r} \text{stirl}(d+1, r+1) + (d! \text{vol}(\mathcal{P}) - 1) M_{r,d} \right)$$

となる。ここで、 $\text{stirl}(d, i)$ は $\prod_{i=0}^{d-1} (z-i) = \sum_{i=1}^d \text{stirl}(d, i) z^i$ で定義される、第一種スターリング数である。

この下限についてさらに次のことが知られている。

- $r \in \{1, 2, d-2\}$ のとき、任意の体積において best possible である。
- $r = d-1$ のとき、任意の体積において best possible とは限らない。ただし他により下限が与えられている。

他の次数においては何も知られていない。そこで次の問題を考えた。

問題 3. $r = 3, \dots, d-3$ において定理 2 の下限は best possible か。そうでなければ best possible な下限が与えられるか。

この問題に対する部分的解決が、本原稿の主定理である。

3 主定理

$d \geq 3$ に対して、

$$N_{r,d} = \min\{C_{r,i}^d : \lceil (d-1)/2 \rceil \leq i \leq d-2\}$$

とする。このとき $N_{r,d} \geq M_{r,d}$ である。

次の定理が本原稿の主定理である ([3])。

定理 4. $d \geq 3$ とし $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。 $r \in \{1, 2, 3, d-3, d-2\}$ または $d-r$ が偶数であるとする。このとき

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!} \left((-1)^{d-r} \text{stirl}(d+1, r+1) + (d! \text{vol}(\mathcal{P}) - 1) N_{r,d} \right)$$

となる。特に、この下限は任意の体積において best possible である。

$d \geq 7, r = d - 3$ のとき、 $M_{r,d} < N_{r,d}$ である。よってこのとき、この下限は定理 2 の下限より真に大きくなる。

下限が best possible であるということは、その下限となる整凸多面体が存在する。実際にどのような整凸多面体が下限になるのか例をあげておく。

例 5. $d = 7, r = d - 3 = 4$ とする。このとき

$$N_{4,7} = C_{4,4}^d = -35$$

$$M_{4,7} = C_{4,1}^d = -140$$

となり、 $N_{4,7} > M_{4,7}$ である。また $\text{stirl}(8, 5) = -1960$ であるので定理 4 で与えられている下限は

$$g_4(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{7!} (1960 - 35(7! \text{vol}(\mathcal{P}) - 1))$$

となる。

実際にこの下限を与える整凸多面体は以下の通りである。 e_1, \dots, e_7 を \mathbb{R}^7 の標準基底とする。2 以上の任意の正の整数 v に対して 8 個の整数点を以下で定義する。

$$v_i = \begin{cases} (0, \dots, 0) & i = 0, \\ e_i & i = 1, \dots, 6 \\ (0, 1, 1, 1, v-1, v-1, v) & i = 7 \end{cases}$$

これらを用いて単体

$$\mathcal{P} = \text{conv}(\{v_0, \dots, v_7\})$$

を定義する。このとき $d! \text{vol}(\mathcal{P}) = v$ であり、

$$g_4(\mathcal{P}) = \frac{1}{7!} (1960 - 35(v - 1))$$

となる。実際 $v = 100$ の時の Ehrhart 多項式は

$$i(\mathcal{P}, n) = \frac{5}{252}n^7 + \frac{103}{720}n^6 + \frac{29}{144}n^5 - \frac{43}{144}n^4 + \frac{35}{144}n^3 + \frac{142}{45}n^2 + \frac{99}{28}n + 1$$

となる。

4 Ehrhart 多項式の係数における best possible な下限の予想

定理 4 により、次の予想が自然に考えられる。

予想 6. $d \geq 3$ とし $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。このとき $r = 1, \dots, d - 2$ に対して、

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!} ((-1)^{d-r} \text{stirl}(d+1, r+1) + (d! \text{vol}(\mathcal{P}) - 1) N_{r,d})$$

となる。特に、この下限は任意の体積において best possible である。

$C_{r,d} = (C_{r, \lceil \frac{d-1}{2} \rceil}^d, \dots, C_{r,d-1}^d)$ とする。予想 6 を証明するためには、次の命題が重要となってくるであろう。

命題 7. $d \geq 3$ とし $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体とする。 $d - r$ が奇数であり、 $C_{r,d}$ が次の条件を満たしていると仮定する。

条件「ある正の整数 $t \in \{i \in \mathbb{Z} : \lceil \frac{d-1}{2} \rceil + 1 \leq t \leq d-1\}$ で $t \leq i \leq d-1 \Rightarrow C_{r,i}^d \geq C_{r,i-1}^d$ かつ $N_{r,d} = \min\{C_{r,i}^d : \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \leq i \leq t-1\} = \min\{-|C_{r,i}^d| : \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor \leq i \leq t-1\}$ を満たすものが存在する。」

このとき

$$g_r(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{d!} \left((-1)^{d-r} \text{stirl}(d+1, r+1) + (d! \text{vol}(\mathcal{P}) - 1) N_{r,d} \right)$$

となる。特に、この下限は任意の体積において best possible である。

一般的に、任意の次元 d 及び次数 r において $C_{r,d}$ の性質を調べることは難しい。しかし、低次元においては実際に $C_{r,d}$ を計算することで、それが命題 7 の条件を満たすかどうかを判定することができる。

最後に現在までの計算実験の結果を系として紹介する。

系 8. $3 \leq d \leq 1000$ ならば $C_{r,d}$ は命題 7 の条件を満たす。特にこのとき、予想 6 は正しい。

参考文献

- [1] M. Beck and S. Robins, Computing the continuous discretely, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2007
- [2] M. Henk and M. Tagami, Lower bounds on the coefficients of Ehrhart polynomials, *Europ. J. Combinatorics*, **30**(2009), 70–83.
- [3] A. Tsuchiya, Best possible lower bounds on the coefficients of Ehrhart polynomials, arXiv:1501.02138v2.

曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式

成瀬 透*

京都大学 数理解析研究所 M2, 2015 年 2 月

1 序文

曲面結び目 (surface knot) とは, 連結な有向閉曲面の 4 次元 Euclid 空間への滑らかな埋め込みの像のことをいう. 1 次元結び目 (1 次元球面 S^1 の 3 次元 Euclid 空間への滑らかな埋め込みの像) の場合と同様に, 曲面結び目の不変量として補空間の基本群や Alexander 多項式を定義することができる. 1990 年代に (1 次元結び目や) 曲面結び目の**カンドルコサイクル不変量** (quandle cocycle invariant) が定義された ([CJKLS99, CJKLS03]). 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量は, 最小三重点数の評価を与えるなど曲面結び目理論に様々な応用をもたらす有益な不変量である ([SS]). 本稿では曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式を概説する.

2 準備

この節ではカンドル (ラック) や曲面結び目のカンドルコサイクル不変量を復習する. 集合 X とその二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ が

(R1) 任意の $y, z \in X$ に対して, $x * y = z$ を満たす $x \in X$ が唯一つ存在する.

(R2) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ である.

を満たすとき, $(X, *)$ を**ラック** (rack) という. 更に次の

(Q) 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ である.

を満たすとき**カンドル** (quandle) という. 特に X が有限集合のときは有限ラック, 有限カンドルという.

詳細は省くが, (Q),(R1),(R2) は 1 次元結び目の Reidemeister 移動 I,II,III とそれぞれ対応している. ここで Reidemeister 移動とは, 同値な 1 次元結び目を表すダイアグラムの局所移動である. また, 枠つき 1 次元結び目 (アニュラスの \mathbb{R}^3 への滑らかな埋め込みの像) の Reidemeister 移動は 3 つの Reidemeister 移動の内 Reidemeister 移動 I をある別の局所移動で置き換えたものとして得られるが, この別の局所移動は (R1),(R2) で対応づけすることができる. (詳しくは結び目の教科書を参考のこと.) つまり, カンドルは結び目理論と相性が良く, ラックは枠つき結び目理論と相性が良いのである.

一般に群 G が与えられたとき, $x * y := y^{-1}xy$ ($x, y \in G$) と定めることにより $(G, *)$ はカンドルであることが直ちに分かる. つまりカンドルとは, 群演算を忘れる代わりに「共役をとる」という演算を残した代数と思える. 例えば, 位数 $2n$ の二面体群 D_n の正 n 角形の反転を表す元からなる共役類や正四面体群 ($\cong 4$ 次の交代群) の元の数 4 であるような共役類は先の演算を入れることによりカンドルであるが, それぞれ**二面体カンドル** (dihedral quandle), **四面体カンドル**

(tetrahedral quandle) という. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n は正の整数) に二項演算 $*$ を $x * y = x + 1$ と定義したものはラックであるが, これを巡回ラック (cyclic rack) という.

紙面の都合上, カンドルコサイクル不変量は簡単に説明するだけにとどめておく. 曲面結び目のカンドルコサイクル不変量は, 曲面結び目のダイアグラムを用いて定義される状態和不変量である. 状態和のウェイトに有限カンドルのコホモロジーの 3 コサイクルが用いられる. ダイアグラムの取り方に依らないことは, 1 次元結び目でいうところの Reidemeister の定理に相当する曲面結び目の Roseman の定理を用いて示される. 因みにカンドルコサイクル不変量の値は, コホモロジー類の代表元 (カンドル 3 コサイクル) の取り方に依らないことが知られている.

3 枠つき曲面結び目の線つきダイアグラムとラックコサイクル不変量

カンドルコサイクル不変量の多重化公式を与えるためには, 曲面結び目の多重化を厳密に定義する必要がある. そこで曲面結び目の多重化を厳密に扱うために枠つき曲面結び目を導入する. 第 2 節でカンドルと結び目理論が, ラックと枠つき結び目理論が相性が良いことを簡単に述べた. そこで枠つき結び目理論と相性の良いラックを用いることにより, カンドルコサイクル不変量の“枠つき結び目版”である枠つき曲面結び目の不変量 (ラックコサイクル不変量) を定義する. カンドルコサイクル不変量と同様に定義するために枠つき曲面結び目の図式である線つきダイアグラムを導入する.

まず, 枠つき曲面結び目について説明しよう. $F \subset \mathbb{R}^4$ を曲面結び目とする. F の単位法バンドル νF の切断 $s : F \rightarrow \nu F$ を F の枠 (framing) という. νF は自明バンドルであることが知られているため, F にはいつでも枠は存在する. 曲面結び目と枠の組 $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目 (framed surface knot) という. 1 次元結び目の枠は $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ の元と特徴づけられているが, 曲面結び目の枠にも同様に $H^1(F; \mathbb{Z})$ の元と特徴づけることができる. 枠を指定することによって曲面結び目の多重化の“方向”を決めることができるのである.

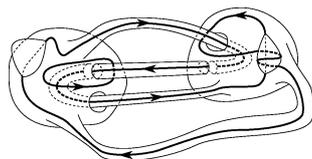


図 3.1: 線つきダイアグラムの例

次に, 線つきダイアグラムについて説明しよう. 線つきダイアグラム (diagram with arcs) とは, 曲面結び目ダイアグラムとそのダイアグラム上の曲線の組であってある条件を満たすものである. 図 3.1 は線つきダイアグラムの例である. 実は任意の枠つき曲面結び目が線つきダイアグラムをもち, 線つきダイアグラムが枠つき曲面結び目を表している ([N] 参照のこと). このことから線つきダイアグラムを簡単に述べるとすると, 曲面結び目ダイアグラム上に枠の情報を「線」として付随させたものといえよう. 曲面結び目には 1 次元結び目でいうところの Reidemeister の定理に相当する Roseman の定理がある. 著者はその Roseman の定理に相当する次の枠つき曲面結び目の定理を証明した. (証明は [N] を参照のこと.)

定理 3.1 ([N] 参照). $(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ をそれぞれ枠つき曲面結び目 $(F_1, s_1), (F_2, s_2)$ の線つきダイアグラムとする. $(F_1, s_1), (F_2, s_2)$ が同値な枠つき曲面結び目であることの必要十分条件は,

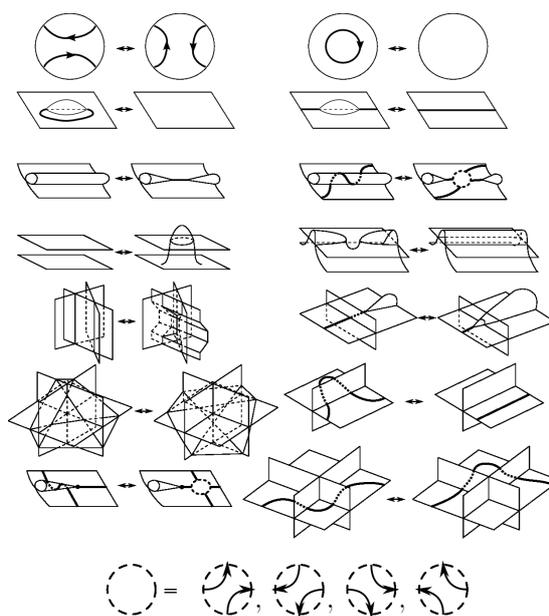


図 3.2: 「線」のかき換え (最上段) と線つきダイアグラムの局所変形 (2 段目以降). ただし, シートの上下の情報, 「線」の向きは省略している.

$(D_1, L_1), (D_2, L_2)$ が図 3.2 の局所変形とシートのアンビエントイソトピーと「線」のかき換え, \mathbb{R}^3 のアンビエントイソトピーの有限の列で互いに移りあうことである.

枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量 (rack cocycle invariant) の定義の概略を説明する. (詳細は [N] を参照のこと.) 枠つき曲面結び目のラックコサイクル不変量は, カンドルコサイクル不変量と同様状態和の形で定義される. カンドルコサイクル不変量との主な相違点は, カンドル 3 コサイクルの代わりに有限ラックのラック 3 コサイクルを用いている点とウエイトを乗せる点のカンドルコサイクル不変量の場合と比べて多い点が挙げられる. ラックコサイクル不変量の不変性の証明には定理 3.1 を用いて示す. カンドルコサイクル不変量と同様, ラックコサイクル不変量の値はラックコホモロジー類の代表元の取り方に依らない.

曲面結び目 F (枠つき曲面結び目 \mathcal{F}) のカンドル彩色数 (ラック彩色数) を $\text{col}(F)$ ($\text{col}(\mathcal{F})$) とかき, カンドル (ラック) コサイクル不変量を $\Phi_f(F)$ ($\Phi_f(\mathcal{F})$) とかくことにする. ただし, f はカンドル 3 コサイクル (ラック 3 コサイクル) とする. 特にカンドル 3 コサイクル (ラック 3 コサイクル) f が自明なものであるとき, カンドルコサイクル不変量 (ラックコサイクル不変量) はカンドル彩色数 (ラック彩色数) と一致することが知られている. これより, カンドルコサイクル不変量 (ラックコサイクル不変量) はカンドル彩色数 (ラック彩色数) の改良版であるといえる.

4 カンドルコサイクル不変量の多重化公式

この節では, まず一般の有限カンドルを用いた場合のカンドルコサイクル不変量の多重化公式 (定理 4.1) を述べる. 特に有限カンドルとして奇素数 p 位数の二面体カンドル R_p の場合 (定理 4.3), 四面体カンドル Q_4 の場合 (定理 4.4) について得られた結果を説明する.

曲面結び目の一般の有限カンドルを用いたカンドルコサイクル不変量の多重化公式は次のとおりである.

定理 4.1 ([N]). $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とし, $\mathcal{F}^{(n)}$ を枠 s に沿って n 重化して得られる曲面絡み目とする. X を有限カンドル, f を X のカンドル 3 コサイクルとする. このとき

$$\begin{aligned} \text{col}_X(\mathcal{F}^{(n)}) &= c_{n,1} \cdot \text{col}_{Y_1}(\mathcal{F}) + \cdots + c_{n,m} \cdot \text{col}_{Y_m}(\mathcal{F}) \\ \Phi_f(\mathcal{F}^{(n)}) &= \sum_{i_{n,1}=1}^{c_{n,1}} \Phi_{\tilde{f}_{i_{n,1}}}(\mathcal{F}) + \cdots + \sum_{i_{n,m}=1}^{c_{n,m}} \Phi_{\tilde{f}_{i_{n,m}}}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

である. ここで, X^n は通常の積集合に入れる演算とは別の演算を入れたラックであり, $X^n = c_{n,1}Y_1 \sqcup \cdots \sqcup c_{n,m}Y_m$ と軌道分解されているとする (注意 4.2 参照). \tilde{f} は f を用いて定義される X^n のラック 3 コサイクルである. また $\tilde{f}_{i_{n,k}}$ は, X^n の連結ラックへの分解に現れる $c_{n,k}$ 個の Y_k と同型なラックに番号を定めたときの \tilde{f} の $i_{n,k}$ 番目の Y_k への制限としている ($i_{n,k} = 1, \dots, c_{n,k}$).

注意 4.2. 実は X^n のラック演算の定義から, X^n の内部自己同型群 $\text{Inn}(X^n)$ は X の内部自己同型群 $\text{Inn}(X)$ の部分群となる. この事実と X の有限性から, X^n ($n = 1, 2, \dots$) を連結ラックに分解したときに現れる連結ラックは有限種類しか存在しないことが分かる. 即ちある Y_1, \dots, Y_m が存在して, X^n を連結ラックへの分解が $X^n \cong c_{n,1} \cdot Y_1 \sqcup \cdots \sqcup c_{n,m} \cdot Y_m$ と表せる. 詳細は [N] を参照のこと.

この定理は, $\mathcal{F}^{(n)}$ のカンドルコサイクル不変量の値が n に依らない有限種類のラックを用いた \mathcal{F} のラックコサイクル不変量で記述されることを意味している. つまり定理 4.1 は, X^n の軌道分解を決定することがカンドルコサイクル不変量の多重化公式を求める上で重要であることを示唆している.

次に奇素数 p 位数の二面体カンドル R_p 及び四面体カンドル Q_4 について得られた結果を述べる. まず, R_p の場合について述べる. 証明は [N] を参照されたい.

定理 4.3 ([N]). $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とし, φ を望月 3 コサイクルとする. (*[Mo]*)

(1) n が奇数のとき,

$$\text{col}_{R_p}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^{n-1} \text{col}_{R_p}(F) & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \\ \text{col}_{R_p}(F) & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

n が偶数のとき,

$$\text{col}_{R_p}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^n & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } p \text{ で割り切れるとき}) \\ p^{n-1} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } p \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

(2) n が奇数であるとき,

$$\Phi_\varphi(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} p^{n-1} \Phi_\varphi(F)|_{v \mapsto v^n} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れるとき}) \\ \Phi_\varphi(F)|_{v \mapsto v^n} & (\text{枠 } s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

定理 4.3 より, R_p 彩色数の多重化公式については完全に決定できた. また, 望月 3 コサイクルが $H_Q^3(R_p; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の生成元であること ([Mo]) に注意すると, カンドルコサイクル不変量の奇数重化公式については完全に決定できた.

次に, Q_4 の場合に述べる. Q_4 彩色数の多重化公式は次の通りである. 証明は [N] を参照されたい.

定理 4.4 ([N]). $\mathcal{F} = (F, s)$ を枠つき曲面結び目とする. このとき,

n が 3 で割り切れないとき,

$$\text{col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = \text{col}_{Q_4}(F) + \frac{4^{n-1} - 1}{3} \cdot \text{col}_Z(\mathcal{F}) \quad (n \text{ が } 3 \text{ で割り切れないとき})$$

である. ここで Z は $\{(x, y) \in Q_4^2 | x \neq y\}$ にラック演算を $(x, y) * (a, b) := (x * a, y * a)$ と定義した位数 12 の連結ラックである.

n が 3 で割り切れるとき,

$$\text{col}_{Q_4}(\mathcal{F}^{(n)}) = \begin{cases} 4^{n-1} & (s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \\ 4^n & (s \text{ が } H^1(F; \mathbb{Z}) \text{ の中で } 2 \text{ で割り切れないとき}) \end{cases}$$

である.

謝辞 「第 12 回 城崎新人セミナー」を企画・運営していただいた運営委員の皆様へ深く感謝申し上げます.

参考文献

- [CJKLS99] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *State-sum invariants of knotted curves and surfaces from quandle cohomology*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **5** (1999) 146–156
- [CJKLS03] J.S.Carter, D.Jelsovsky, S.Kamada, L.Langford, M.Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3947–3989
- [Mo] T.Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, J.Pure Appl. Algebra **179** (2003) 287–330
- [N] 成瀬 透, “曲面結び目のカンドルコサイクル不変量の多重化公式”, 修士論文, 京都大学数理解析研究所, 2015 年 1 月 <http://hdl.handle.net/2433/194277>
- [SS] S.Satoh, A.Shima, *The 2-twist spun trefoil has the triple point number four*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004) 1007–1024

遅延微分方程式とある超越方程式の根について

西口 純矢*

京都大学 大学院理学研究科 数学教室, 2015年2月

0 はじめに

本講演では、未知関数の導値がその過去の値にも依存する微分方程式である「遅延微分方程式」の紹介と、その定数解の漸近安定性を決定する「特性方程式」の解析について話した。この文書は上記についての報告である。

1 「遅れ」と微分方程式

「遅れ」をもつ微分方程式である「遅延微分方程式」のダイナミクスは通常の微分方程式のそれとは決定的に異なる。この意味で、「微分方程式とは何か」という問いを再考することには意味がある。

1.1 微分方程式

関数のある点における微分とは、その点における無限小変化に対してその関数がどのように無限小変化をするかという対応を表す線形作用素である。したがって、(通常)の微分方程式とは、あえて数学的に厳密な言い方をしなければ、ある変数を内包する未知の量がどのように無限小変化をするかというルールを記述するものである。微分方程式は変数が1つの実変数のときは常微分方程式 (ordinary differential equations; ODEs), 複数個の実変数のときは偏微分方程式とよばれる。内包された独立変数に対してその量である従属変数を対応させることにより未知関数が生じる。この意味で微分方程式は数学的には未知関数の偏導関数を含む関数方程式であると言える。

ここでは、未知の量を1つの実の独立変数 ξ の関数 $\xi \mapsto u(\xi)$ として考えることに意味があるという状況を考える。たとえば、自然法則や現実のモデルを微分方程式によって記述するときには「時間」という変数 t が含まれる。このような場合に興味のあることは、時間 t の変化で未知の量がどのように変化するかということである。これは、数学的には微分方程式の解が t の関数としてどのような関数であるかという問いに答えることに他ならない。このようにして、抽象空間 X と未知関数 $\xi \mapsto u(\xi) \in X$ に対して

$$u'(\xi) = f(\xi, u(\xi)) \quad (f: \mathbb{R} \times X \rightarrow \text{「}X \text{のベクトル空間」})$$

という ODE を得る。ただし、 $u'(\xi)$ は関数 $\xi \mapsto u(\xi) \in X$ の ξ における導値である。

*j-nishi@math.kyoto-u.ac.jp

1.2 関数微分方程式

n 次元実 Euclid 空間 \mathbb{R}^n における自励系の ODE は典型的である。このような方程式はスカラー量やそれらの結合系、またはベクトル量の無限小変化を記述するときに現れる。

\mathbb{R}^n 上の開集合上で定義されたベクトル場 f が定める ODE $u'(\xi) = f(u(\xi))$ は、初期条件 $u(0) = x \in \mathbb{R}^n$ を考えることにより \mathbb{R}^n 上の力学系を定める。関数微分方程式はこのような力学系理論の進展の中で認識されたものである。

定義 1 (cf. Hale & Verduyn Lunel [1]). τ を正の数とする。関数 $F: C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して、関数 $u(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を未知関数とする微分方程式

$$u'(\xi) = F(u_\xi) \quad (1)$$

を自励系の遅れ型関数微分方程式 (retarded functional differential equations; RFDEs) とよぶ。

ここで、 $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ は $[-\tau, 0]$ から \mathbb{R}^n への連続写像全体のなす線型空間であり、 $u_\xi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ は $u_\xi(\theta) = u(\xi + \theta)$ ($\theta \in [-\tau, 0]$) で定義される。

RFDE (1) においては、 ξ における導値 $u'(\xi)$ は ξ における値 $u(\xi)$ ではなく、 $[\xi - \tau, \xi]$ における未知関数の情報に依存している。すなわち、(1) の右辺の F は u_ξ の汎関数であり、関数微分方程式は通常の微分方程式とは異なる関数方程式である。

RFDE は遅れをもつ微分方程式である遅延微分方程式 (delay differential equations; DDEs) の数学的定式化である。Wright の方程式 [2]

$$y'(x) = -\alpha y(x-1)\{1+y(x)\} \quad (\alpha > 0 \text{ はパラメータ})$$

は 1 つの例である。ここで x と y はそれぞれ実の独立変数と従属変数で、 $y'(x)$ は $y(x)$ だけでなく $y(x-1)$ にも依存するという意味で遅れをもつ。これが RFDE の例であるということを見るには、対応するベクトル値汎関数 F を

$$F(\phi) = -\alpha\phi(-1)\{1+\phi(0)\}$$

と定めればよい。ただし、 $\tau=1$ で ϕ は $C([-1, 0], \mathbb{R})$ の元である。

方程式における遅れは物理学的または生物学的な由来をもつ。たとえば、ニューラルネットワークのように空間離散的に結合した系における情報伝達による遅れや、個体数の増減において子供が大人に成長するまでの遅れなどがある。

Wright の方程式における遅れは定数かつ離散的である。他には定数ではない状態依存の遅れや、積分のような分布的な遅れもある。

RFDE (1) に対して、汎関数 F が局所 Lipschitz の仮定の下で、初期条件 $u_0 = \phi$ ($\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$) の下での初期値問題は well-posed である。これにより (1) は $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 上の力学系を定める。このダイナミクスは無次元であり、偏微分方程式が定めるそれとは異なるものである。

2 定数解の漸近安定性

1 つの定数遅れをもつ滑らかな遅延微分方程式

$$x'(t) = f(x(t), x(t-\tau)) \quad (f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \tau > 0) \quad (2)$$

の定数解 $x^*(t) \equiv p \in \mathbb{R}^n$ の漸近安定性のパラメータ依存性について考える。これは、ベクトル値汎関数 $F(\phi) = f(\phi(0), \phi(-\tau))$ により RFDE である。汎関数の形は簡単であり、 F は Frechét 微分の意味でのよい滑らかさをもっている。この意味で DDE (2) については一般論の枠組みで多くのことがわかっている。

2.1 特性方程式の超越性

定数解の漸近安定性は次の特性方程式

$$\det(\lambda I + A - e^{-\lambda\tau} B) = 0 \quad (I \text{ は } n \times n \text{ の単位行列}) \quad (3)$$

の根の配置により決定される。ここで $A = -D_1 f(p, p)$, $B = D_2 f(p, p)$ であり、偏微分に関する Jacobi 行列である。方程式 (3) は λ の超越方程式であり無限個の根をもつ。これは通常の ODE の特性方程式が代数方程式であることとの著しい差異である。

ここでは A と B は同時三角化可能であるということを仮定する。すると、方程式 (3) は超越方程式

$$\lambda + \alpha - \beta e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \quad (4)$$

に帰着される。ただし、 α と β はそれぞれ A と B の固有値である。定数解が漸近安定であるための必要十分条件は (3) のすべての根の実部が負であることである。したがって、方程式 (4) のすべての根の実部が負であるための α, β, τ に関する必要十分条件を求めることであることが目標である。 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ のときは Hayes [3] が調べた。著者が知る限りでは、 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ の場合はまだ知られていない。

2.2 Lambert の W 関数

方程式 (4) を解析するアイデアは Lambert の W 関数のある座標系における「グラフのような表示」を用いることである。ここで、Lambert の W 関数とは複素関数 $z \mapsto ze^z$ の多価逆関数である：

$$W(\zeta) = \{z \in \mathbb{C} : ze^z = \zeta\} \quad (\zeta \in \mathbb{C}).$$

W 関数を用いると方程式 (4) の根全体の集合は $(1/\tau)W(\beta\tau e^{\alpha\tau}) - \alpha$ に等しい。

定義 2. f を複素関数とし、 D を複素平面の部分集合とする。実数値関数 g が存在して、

$$f(x + iy) = x + ig(x, y) \quad (x + iy \in D)$$

が成り立つとき、 f は D 上で graph-like であるという。

一般の関数が graph-like であることは当然のことながら期待できない。重要なことは、W 関数の座標表示が graph-like であるような複素平面の座標系を求めることである。

定義 3. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、 $\text{Arg}_W(z)$ を

$$\text{Arg}_W(z) = \begin{cases} \{\pi, -\pi\} & (z = -1), \\ \{-\pi\} & (z < -1), \\ \{\text{Arg}(z)\} & (z \notin (-\infty, -1]) \end{cases}$$

で定める。

これを用いて, $h(z)$ を $h(z) = \text{Arg}_W(z) + \Im(z)$ で定める. また, $\rho > 0$ に対して $H(\rho, x)$ を

$$H(\rho, x) = h(x + i\gamma(x, \rho)) \cup h(x - i\gamma(x, \rho))$$

で定める. ここで, $\gamma(x, \rho) = \sqrt{(\rho e^{-x})^2 - x^2}$ である.

補題 1. $H(\rho, \cdot)$ の逆関数 $H^{-1}(\rho, \cdot)$ は 1 価関数である. $[0, +\infty)$ 上で単調減少かつ $(-\infty, 0]$ 上で単調増加である.

$m \in \mathbb{Z}$ に対して, 部分集合 R_m を $R_m = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : h(z) \subset (-\pi, \pi] + 2m\pi\}$ と定める.

命題 1. $\zeta \neq 0$ に対して, $W(\zeta) \cap R_m$ は 1 点集合である. $W_m(\zeta)$ を $W(\zeta) \cap R_m = \{W_m(\zeta)\}$ で定めると,

$$W_m(\zeta) = H^{-1}(|\zeta|, \text{Arg}(\zeta) + 2m\pi) + \text{sgn}(\text{Arg}(\zeta) + 2m\pi) \cdot i\gamma(H^{-1}(|\zeta|, \text{Arg}(\zeta) + 2m\pi), |\zeta|)$$

が成り立つ.

ここで sgn は符号関数で, $x > 0$ のとき $\text{sgn}(x) = 1$, $x < 0$ のとき $\text{sgn}(x) = -1$ で $\text{sgn}(0) = 0$ である. これより, $\Re(W_0(\zeta)) = \max_{m \in \mathbb{Z}} \Re(W_m(\zeta))$ がわかる. ただし, W_0 が最も右側にあること自体は Shinozaki & Mori [4] によって得られている.

2.3 必要十分条件

命題 1 を用いて次を示すことができる.

定理 1. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ とし, $\beta \neq 0$ とする. 方程式 (4) のすべての根の実部が負であるための必要十分条件は, (i) $\Re(a) > |\beta|$, または (ii) $-|\beta| < \Re(a) \leq |\beta|$ かつ

$$\text{Arccos}(\cos(\Im(\alpha)\tau + \text{Arg}(\beta))) > \text{Arccos}(\Re(\alpha)/|\beta|) + \tau\sqrt{|\beta|^2 - \Re(\alpha)^2} \quad (5)$$

が成り立つことである.

α, β を固定して $\tau > 0$ をパラメータとしたときに定数解の漸近安定性がどのように変わるかということも重要である. これは不等式 (5) を τ の不等式と見ることである. これについて次を得る.

定理 2. $-|\beta| < \Re(a) \leq |\beta|$, $\Im(\alpha) > 0$ かつ $|\alpha| > |\beta|$ と仮定する. このとき, 方程式 (4) のすべての根の実部が負である $\tau > 0$ が存在するための α と β に関する必要十分条件は

- (i) $\text{Arg}(\beta) < 0$ かつ $\Re(\alpha) > \Re(\beta)$, または
- (ii) 正の整数 N が存在して, $\tau_N(\alpha, \beta) < h_1(|\beta|, \Re(\alpha))$

となることである.

注 1. τ に関する条件も得られるがここでは省略する.

ここで,

$$\tau_N(\alpha, \beta) = \frac{N\pi - \text{Arg}(\beta)}{\Im(\alpha)}, \quad h_1(\rho, x) = \frac{\pi - \text{Arccos}(x/\rho)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

である.

3 遅延フィードバック制御への応用

遅延フィードバック制御 (delayed feedback control; DFC) は ODE の軌道不安定な周期解を遅延フィードバック項を加えることで安定化させる手法であり, Pyragas [5] によって提案された. \mathbb{R}^n 上の滑らかな ODE $x'(t) = f(x(t))$ と軌道不安定な周期解 $\gamma(t)$ に対して, DDE

$$x'(t) = f(x(t)) + K(x(t-\tau) - x(t)) \quad (6)$$

を考える. ここで, K は $n \times n$ の実行列で, $\gamma(t)$ の周期 T に対して $\tau = mT$ ($m \in \mathbb{Z}$) である. $\gamma(t)$ は方程式 (6) の周期解でもある. DFC の目標は, $\gamma(t)$ が (6) の軌道安定な周期解となるような K と τ を見つけることである. ここでは, DFC による不安定な定常解 $x^*(t) \equiv p$ の安定化を考える. 著者の知る限りではこの問題は未解決である.

定理 2 より次を示すことができる.

定理 3. p の実部が 0 以上の固有値全体の集合が $\{\mu, \bar{\mu}\}$ ($\mu \notin \mathbb{R}$) であるとする. このとき, $x^*(t)$ を DFC で安定化させることができる.

参考文献

- [1] Hale, J. K. and S. M. Verduyn Lunel (1993): Introduction to functional differential equations. Applied Mathematical Sciences **99**. (Springer-Verlag, New York).
- [2] Wright, E. M. (1955): A non-linear difference-differential equation. J. Reine Angew. Math. **194**, 66–87.
- [3] Hayes, N. D. (1950): Roots of the transcendental equation associated with a certain differential-difference equation. J. London Math. Soc. **25**, 226–232.
- [4] Shinozaki, H. and T. Mori (2006): Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results. Automatica **42**, 1791–1799.
- [5] Pyragas, K. (1992): Continuous control of chaos by self-controlling feedback. Phys. Lett. A **170**, 421–428.

Universal covering space of the Hilbert scheme of n points of Enriques surface

Hayasi Taro*

department of mathematics of Osaka University

Abstract

We work over \mathbb{C} . The Hilbert scheme of n points of Enriques surface has a Calabi-Yau manifold as the universal covering. We prove that every small deformations of the Calabi-Yau manifold is induced by that of the Hilbert scheme of n points of Enriques surface, and count the number of isomorphism classes of the Hilbert schemes of n points of Enriques surfaces which has X as the universal covering space when we fix one for $n \geq 3$.

Theorem 0.1. *Let E and E' be two Enriques surfaces, $E^{[n]}$ and $E'^{[n]}$ the Hilbert scheme of n points of E and E' , X and X' the universal covering space of $E^{[n]}$ and $E'^{[n]}$, and $n \geq 3$. If $X \cong X'$, then $E^{[n]} \cong E'^{[n]}$, i.e. when we fix X , then there is just one isomorphism class of the Hilbert schemes of n points of Enriques surfaces such that they have it as the universal covering space. Furthermore if $X = X'$, then $E^{[n]} = E'^{[n]}$.*

Preliminaries

A $K3$ surface K is a compact complex surface with $K_K \sim 0$ and $H^1(K, \mathcal{O}_K) = 0$. An Enriques surface E is a compact complex surface with $H^1(E, \mathcal{O}_E) = 0$, $H^2(E, \mathcal{O}_E) = 0$, $K_E \not\sim 0$, and $2K_E \sim 0$. The universal covering of an Enriques surface is a $K3$ surface. A Calabi-Yau manifold X is an n -dimensional compact kähler manifold such that it is simply connected, there is no holomorphic k -form on X for $0 < k < n$ and there is a nowhere vanishing holomorphic n -form on X .

Let S be a nonsingular surface, $S^{[n]}$ the Hilbert scheme of n points of S , $\pi_S : S^{[n]} \rightarrow S^{(n)}$ the Hilbert-Chow morphism, and $p_S : S^n \rightarrow S^{(n)}$ the natural projection. We denote by D_S the exceptional divisor of π_S . Note that $S^{[n]}$ is smooth of $\dim_{\mathbb{C}} S^{[n]} = 2n$. Let Δ_S^n be the set of n -uples $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$ with

*tarou-hayashi@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

at least two x_i 's equal, S_*^n the set of n -uples $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$ with at most two x_i 's equal. We put

$$\begin{aligned} S_*^{(n)} &:= p_S(S_*^n), \\ \Delta_S^{(n)} &:= p_S(\Delta_S^n), \\ S_*^{[n]} &:= \pi_S^{-1}(S_*^{(n)}), \\ \Delta_{S_*}^n &:= \Delta_S^n \cap S_*^n, \\ \Delta_{S_*}^{(n)} &:= p_S(\Delta_{S_*}^n), \text{ and} \\ F_S &:= S^{[n]} \setminus S_*^{[n]}. \end{aligned}$$

Then we have $\text{Blow}_{\Delta_{S_*}^n} S_*^n / \mathcal{S}_n \simeq S_*^{[n]}$, F_S is an analytic closed subset, and its codimension is 2 in $S^{[n]}$ by Beauville [1, page 767-768]. Here \mathcal{S}_n is the symmetric group of degree n which acts naturally on S^n by permuting of the factors.

Let E be an Enriques surface, and $E^{[n]}$ the Hilbert scheme of n points of E . By Oguiso and Schröer [5, Theorem 3.1], $E^{[n]}$ has a Calabi-Yau manifold X as the universal covering space $\pi : X \rightarrow E^{[n]}$ of degree 2. Let $\mu : K \rightarrow E$ be the universal covering space of E where K is a $K3$ surface, S_K the pullback of $\Delta_E^{(n)}$ by the morphism

$$\mu^{(n)} : K^{(n)} \ni [(x_1, \dots, x_n)] \mapsto [(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n))] \in E^{(n)}.$$

Then we get a 2^n -sheeted unramified covering space

$$\mu^{(n)}|_{K^{(n)} \setminus S_K} : K^{(n)} \setminus S_K \rightarrow E^{(n)} \setminus \Delta_E^{(n)}.$$

Furthermore, let Γ_K be the pullback of S_K by natural projection $p_K : K^n \rightarrow K^{(n)}$. Since Γ_K is an algebraic closed set with codimension 2, then

$$\mu^{(n)} \circ p_K : K^n \setminus \Gamma_K \rightarrow E^{(n)} \setminus \Delta_E^{(n)}$$

is the $2^n n!$ -sheeted universal covering space. Since $E^{[n]} \setminus D_E = E^{(n)} \setminus \Delta_E^{(n)}$ where $D_E = \pi_E^{-1}(\Delta_E^{(n)})$, we regard the universal covering space $\mu^{(n)} \circ p_K : K^n \setminus \Gamma_K \rightarrow E^{(n)} \setminus \Delta_E^{(n)}$ as the universal covering space of $E^{[n]} \setminus D_E$:

$$\mu^{(n)} \circ p_K : K^n \setminus \Gamma_K \rightarrow E^{[n]} \setminus D_E.$$

Since $\pi : X \setminus \pi^{-1}(D_E) \rightarrow E^{[n]} \setminus D_E$ is a covering space and $\mu^{(n)} \circ p_K : K^n \setminus \Gamma_K \rightarrow E^{[n]} \setminus D_E$ is the universal covering space, there is a morphism

$$\omega : K^n \setminus \Gamma_K \rightarrow X \setminus \pi^{-1}(D_E)$$

such that $\omega : K^n \setminus \Gamma_K \rightarrow X \setminus \pi^{-1}(D_E)$ is the universal covering space and We denote the covering transformation group of $\pi \circ \omega$ by:

$$G := \{g \in \text{Aut}(K^n \setminus \Gamma_K) : \pi \circ \omega \circ g = \pi \circ \omega\}.$$

Then G is of order $2^n \cdot n!$, since $\deg(\mu^{(n)} \circ p_K) = 2^n \cdot n!$. Let σ be the covering involution of $\mu : K \rightarrow E$, and for

$$1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

we define automorphisms $\sigma_{i_1 \dots i_k}$ of K^n by following. For $x = (x_i)_{i=1}^n \in K^n$,

$$\text{the } j\text{-th component of } \sigma_{i_1 \dots i_k}(x) = \begin{cases} \sigma(x_j) & j \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ x_j & j \notin \{i_1, \dots, i_k\}. \end{cases}$$

Then $\mathcal{S}_n \subset G$, and $\{\sigma_{i_1 \dots i_k}\}_{1 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \subset G$. Let H be the subgroup of G generated by \mathcal{S}_n and $\{\sigma_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n}$.

We put

$$K_{*\mu}^n := (\mu^n)^{-1}(E_*^n),$$

where $\mu^n : K^n \ni (x_i)_{i=1}^n \mapsto (\mu(x_i))_{i=1}^n \in E^n$. Recall that $\mu : K \rightarrow E$ the universal covering with σ the covering involution. We further put

$$T_{*\mu ij} := \{(x_l)_{l=1}^n \in K_{*\mu}^n : \sigma(x_i) = x_j\},$$

$$\Delta_{K_{*\mu} ij} := \{(x_l)_{l=1}^n \in K_{*\mu}^n : x_i = x_j\},$$

$$T_{*\mu} := \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} T_{*\mu ij}, \text{ and}$$

$$\Delta_{K_{*\mu}} := \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{K_{*\mu} ij}.$$

By the definition of $K_{*\mu}^n$, H acts on $K_{*\mu}^n$, and by the definition of $\Delta_{K_{*\mu}}$ and $T_{*\mu}$, we have $\Delta_{K_{*\mu}} \cap T_{*\mu} = \emptyset$.

The universal covering map μ induces a local isomorphism

$$\mu_*^{[n]} : \text{Blow}_{\Delta_{K_{*\mu}} \cup T_{*\mu}} K_{*\mu}^n / H \rightarrow \text{Blow}_{\Delta_{E_*}^n} E_*^n / \mathcal{S}_n = E_*^{[n]}.$$

Here $\text{Blow}_A B$ is the blow up of B along $A \subset B$.

Proposition 0.2. $\mu_*^{[n]} : \text{Blow}_{\Delta_{K_{*\mu}} \cup T_{*\mu}} K_{*\mu}^n / H \rightarrow \text{Blow}_{\Delta_{E_*}^n} E_*^n / \mathcal{S}_n$ is the universal covering space, and $X \setminus \pi^{-1}(F_E) \simeq \text{Blow}_{\Delta_{K_{*\mu}} \cup T_{*\mu}} K_{*\mu}^n / H$.

Theorem 0.3. Let E be an Enriques surface, $E^{[n]}$ the Hilbert scheme of n points of E , $\pi : X \rightarrow E^{[n]}$ the universal covering space of $E^{[n]}$, and $n \geq 2$. Then there is a crepant resolution $\varphi_X : X \rightarrow K^n / H$ such that $\varphi_X^{-1}(\Gamma_K / H) = \pi^{-1}(D_E)$.

Proposition 0.4. For $n \geq 3$, the induced map $\rho^* : H^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C})$ is identity.

Recall that $\mu : K \rightarrow E$ is the universal covering of E where K is a $K3$ surface, and σ the covering involution of μ .

Proposition 0.5. *Let E be an Enriques surface which does not have numerically trivial involutions, $E^{[n]}$ the Hilbert scheme of n points of E , $\pi : X \rightarrow E^{[n]}$ the universal covering space of $E^{[n]}$, ρ the covering involution of π , and $n \geq 3$. Let ι be an involution of X which acts on $H^2(X, \mathbb{C})$ as id, then $\iota = \rho$.*

We suppose that E has numerically trivial involutions. By [4, Proposition 1.1], there is just one automorphism of E , denoted v , such that its order is 2, and v^* acts on $H^2(E, \mathbb{C})$ as id. For v , there are just two involutions of K which are liftings of v , one acts on $H^0(K, \Omega_K^2)$ as id, and another acts on $H^0(K, \Omega_K^2)$ as $-\text{id}$, we denote by v_+ and v_- , respectively. Then they satisfies $v_+ = v_- \circ \sigma$. Let $v^{[n]}$ be the automorphism of $E^{[n]}$ which is induced by v . For $v^{[n]}$, there are just two automorphisms of X which are liftings of $v^{[n]}$, denoted ς and ς' , respectively.

Lemma 0.6. *For ς and ς' , one acts on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as id, and another act on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$.*

We put $\varsigma_+ \in \{\varsigma, \varsigma'\}$ as acts on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as id and $\varsigma_- \in \{\varsigma, \varsigma'\}$ as acts on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$.

Proposition 0.7. *Suppose E has numerically trivial involutions. Let $E^{[n]}$ be the Hilbert scheme of n points of E , $\pi : X \rightarrow E^{[n]}$ the universal covering space of $E^{[n]}$, ρ the covering involution of π , and $n \geq 3$. Let ι be an involution of X which ι^* acts on $H^2(X, \mathbb{C})$ as id and on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$, and $\iota \neq \rho$. Then we have $\iota = \varsigma_-$.*

Theorem 0.8. *Let E be an Enriques surface, $E^{[n]}$ the Hilbert scheme of n points of E , $\pi : X \rightarrow E^{[n]}$ the universal covering space of $E^{[n]}$, and $n \geq 3$. If X has a involution ι which ι^* acts on $H^2(X, \mathbb{C})$ as id, and $\iota \neq \rho$. Then E has a numerically trivial involution.*

Since X and K^n/H are projective, K^n/H is a V-manifold, and π is a surjective, $\pi^* : H^{p,q}(K^n/H, \mathbb{C}) \rightarrow H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ is injective

By [4, Proposition 1.1], there is just one automorphism of E , denoted v , such that its order is 2, and v^* acts on $H^2(E, \mathbb{C})$ as id. For v , there are just two involutions of K which are liftings of v , one acts on $H^0(K, \Omega_K^2)$ as id, and another acts on $H^0(K, \Omega_K^2)$ as $-\text{id}$, we denote by v_+ and v_- , respectively. Then they satisfies $v_+ = v_- \circ \sigma$. Let $v^{[n]}$ be the automorphism of $E^{[n]}$ which is induced by v . For $v^{[n]}$, there are just two automorphisms of X which are liftings of $v^{[n]}$, denoted ς and ς' respectively. Then they satisfies $\varsigma = \varsigma' \circ \sigma$, and each order of ς and ς' is 2. From 0.6, one acts on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as id, and another act on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$. We put $\varsigma_+ \in \{\varsigma, \varsigma'\}$ as acts on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as id and $\varsigma_- \in \{\varsigma, \varsigma'\}$ as acts on $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$.

Theorem 0.9. *Let E and E' be two Enriques surfaces, $E^{[n]}$ and $E'^{[n]}$ the Hilbert scheme of n points of E and E' , X and X' the universal covering space of $E^{[n]}$ and $E'^{[n]}$, and $n \geq 3$. If $X \cong X'$, then $E^{[n]} \cong E'^{[n]}$, i.e. when we fix X , then there is just one isomorphism class of the Hilbert schemes of n points of Enriques surfaces such that they have it as the universal covering space. Furthermore if $X = X'$, then $E^{[n]} = E'^{[n]}$.*

Proof. For an involution of X which is the covering involution of some the Hilbert scheme of n points of Enriques surfaces acts on $H^2(X, \mathbb{C})$ as id , $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$, and $H^{2n}(X, \mathbb{C})^{2n-1,1}$ as $-\text{id}$. From Proposition 0.7, the automorphisms which acts on $H^2(X, \mathbb{C})$ as id , $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$, are only ρ and ς_- . From the definition of ς_- and Lemma 0.6, ς_- does not act on $H^{2n}(X, \mathbb{C})^{2n-1,1}$ as $-\text{id}$. Therefore an automorphism g of X which acts on $H^2(X, \mathbb{C})$ as id , $H^0(X, \Omega_X^{2n})$ as $-\text{id}$, and $H^{2n}(X, \mathbb{C})^{2n-1,1}$ as $-\text{id}$ is the covering involution ρ of $X \rightarrow E^{[n]}$. Thus we have an argument. \square

References

- [1] A. Beauville: Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. J. Differential Geom. 18 (1983), no. 4, 755-782.
- [2] B. Fantechi: Deformation of Hilbert schemes of points on a surface. Compositio Math. 98 (1995), 205-217.
- [3] S. Mukai: Numerically trivial involutions of Kummer type of an Enriques surface. (English summary) Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 4, 889-902. 14J28 (14J50)
- [4] S. Mukai, Y. Namikawa: Automorphisms of Enriques surfaces which act trivially on the cohomology groups. Invent. Math. 77 (1984), no. 3, 383-397.
- [5] K. Oguiso, S. Schröer: Enriques Manifolds. J. Reine Angew. Math. 661 (2011), 215-235.
- [6] K. Oguiso: A question of Doctor Malte Wandel on automorphisms of the punctual Hilbert schemes of K3 surfaces. arXiv:1402.4228.

On the descent of modular Calabi-Yau varieties arising from the Cynk-Hulek construction

平川 義之輔*

慶應義塾大学, 2015年2月

概要

本稿では, 谷山-志村予想の高次元化への1つのアプローチとして, ある種の Calabi-Yau 多様体の L 関数と楕円 Hecke 固有新形式の L 関数との関係を主張する Mazur と van Straten の予想を紹介した後, 現在までに知られている結果の紹介, 及び最近筆者により得られた結果 (当日の発表内容を拡張したもの) の紹介を行う.

1 Mazur と van Straten の予想

タイトルにある Calabi-Yau 多様体とは, 以下のような代数多様体のことである.

定義 1. 複素数体 \mathbb{C} 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が (狭義の) Calabi-Yau 多様体であるとは, 以下の2つが成り立つことである.

$$(i) \Omega_X^i(X) = 0 \ (1 \leq i \leq n-1), \ (ii) \Omega_X^n \simeq \mathcal{O}_X$$

また, 部分体 $F \subset \mathbb{C}$ 上の滑らかな n 次元射影代数多様体 X が Calabi-Yau 多様体であるとは, X の \mathbb{C} への基底変換 $X_{\mathbb{C}}$ が \mathbb{C} 上の Calabi-Yau 多様体となることである.

有理点を持つ1次元 Calabi-Yau 多様体は, 楕円曲線に他ならない. 谷山-志村予想とは, 有理数体 \mathbb{Q} 上の楕円曲線に関する以下のような予想 (現在は定理) である.

定理 1. \mathbb{Q} 上の任意の楕円曲線 E は保型的である. すなわち, 各 E に対して, ある重さ2の楕円 Hecke 固有新形式 f が存在し, $L(E, s) = L(f, s)$ が成り立つ.

谷山-志村予想の高次元 Calabi-Yau 多様体への拡張は極めて自然な問題であるが, この予想をより一般の代数多様体 (あるいはモチーフ) にも拡張した Langlands 予想の解決の見通しは立っていない. そこで, 保型的な Calabi-Yau 多様体を具体的に構成し, またそれらを考察することで, ある種の Calabi-Yau 多様体と楕円 Hecke 固有新形式との対応関係を理解することを試みる. これに対して, Mazur と van Straten により, 次のような予想が提示された.

予想 1. Fourier 係数が \mathbb{Q} に属する重さ $n+1$ の任意の楕円 Hecke 固有新形式 f に対して, ある n 次元 Calabi-Yau 多様体 X , 及び部分モチーフ $t^n(X) \subset h^n(X)$ が存在し, $L(t^n(X), s) = L(f, s)$ が成り立つ. すなわち, f の L 関数は X の L 関数の因子として実現される.

*hirakawa@keio.jp

注意 1. 楕円曲線の自然な高次元化には, Calabi-Yau 多様体以外にも Abel 多様体が知られているが, 予想 1 の Abel 多様体類似は一般には成立しないことを注意しておく. 例えば, Fourier 係数が \mathbb{Q} に属する重さ 3 の楕円 Hecke 固有新形式で, その L 関数が \mathbb{Q} 上の 2 次元 Abel 多様体の L 関数の因子としては決して得られないものが存在する. (cf. [ES])

$n \leq 2$ の場合には, 予想 1 を支持する結果が得られている.

定理 2. (i) 予想 1 は $n = 1$ のとき正しい.

(ii) ([ES]) Dirichlet L 関数に対する一般化された Riemann 予想を仮定すると, 予想 1 は $n = 2$ のとき正しい.

(i) は楕円曲線のモジュライ空間であるモジュラー曲線の Jacobi 多様体の考察, (ii) は楕円曲面構造を持つある種の 2 次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間である志村曲線の考察が核心である. しかし, 高次元 Calabi-Yau 多様体のモジュライ空間の構成は困難であり, 従って $n \leq 2$ の場合の方法を直接高次元化することも困難である.

2 Cynk と Hulek による帰納的な構成

一方で, \mathbb{Q} 上の楕円曲線のような保型的な代数多様体から代数幾何学的な操作を通じて Calabi-Yau 多様体 (とそれらの間の代数的対応) を構成することができれば, もとの代数多様体の保型性を經由して Calabi-Yau 多様体の保型性を証明できる可能性がある. 実際, Cynk と Hulek は, 以下に述べる方法で保型的な高次元 Calabi-Yau 多様体の族を帰納的に構成することに成功した.

まず, 2 つの楕円曲線 E_1, E_2 及びそれぞれの Abel 群構造に関する標準的な対合 ι_1, ι_2 に対して, 商多様体 $E_1 \times E_2 / \iota_1 \times \iota_2$ の極小特異点解消として 2 次元 Calabi-Yau 多様体 X_2 を得る. X_2 は自然に $E_1 / \iota_1 \times E_2 / \iota_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, その被覆変換を τ_2 とする. 次に, 楕円曲線 E_3 及び E_3 上の標準的な対合 ι_3 に対して, $X_2 \times E_3 / \tau_2 \times \iota_3$ の特異点解消として 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 を構成できる. X_3 も X_2 と同様に, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆と見なせるので, 以下同様にして n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n を構成できる.

定理 3. ([CH]) E_1, \dots, E_n を \mathbb{Q} 上の楕円曲線, f_1, \dots, f_n をそれぞれ $L(E_i, s) = L(f_i, s)$ を満たす楕円 Hecke 固有新形式とする. このとき, 上で構成した n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n は \mathbb{Q} 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L\left(\bigotimes_{i=1}^n f_i, s\right) \quad (n: \text{奇数})$$

$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = L\left(\bigotimes_{i=1}^n f_i, s\right) \quad (n: \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ})$$

ただし, $L\left(\bigotimes_{i=1}^n f_i, s\right)$ は f_i に対応する Galois 表現のテンソル表現の L 関数を表す.

系 4. ([CH]) 定理 3 の仮定の下で, さらに E_1, \dots, E_n はすべて \mathbb{Q} 上同型で, 類数 1 の虚 2 次体 K

上で K に虚数乗法を持つと仮定する. このとき, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} L(g_{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \quad (n : \text{奇数})$$

$$L(t^n(X_n/\mathbb{Q}), s) = \prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} L(g_{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times L(\chi_K, s - \frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}} \times \zeta(s - \frac{n}{2})^{\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}}$$

($n : \text{偶数}, t^n(X_n/\mathbb{Q}) \subset h^n(X_n/\mathbb{Q}) : \text{部分モチーフ}$)

ただし, $L(g_k, s)$, $L(\chi_K, s)$, 及び $\zeta(s)$ は, それぞれ重さ $k+1$ の楕円 Hecke 固有新形式の L 関数, K に付随する Dirichlet L 関数, 及び Riemann ζ 関数を表す.

3 \mathbb{Q} -楕円曲線と Weil 係数制限関手

定義 2. 代数体 F 上の楕円曲線 E が \mathbb{Q} -楕円曲線であるとは, E と $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な任意の楕円曲線と E 自身とが $\overline{\mathbb{Q}}$ 上同種であることである.

\mathbb{Q} 上の任意の楕円曲線は \mathbb{Q} -楕円曲線であるが, 逆は成り立たない. しかし, \mathbb{Q} -楕円曲線は \mathbb{Q} 上の楕円曲線とよく似た数論的な性質を持つ. 実際, 系 4 と全く同様にして以下の命題を証明することができる.

命題 5. E を虚 2 次体 K に虚数乗法を持つ $K(j_E)$ 上の \mathbb{Q} -楕円曲線, $E_1 = E, E_2, \dots, E_n$ を (重複を許した) E と $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 共役な楕円曲線, ψ , 及び $\bar{\psi}$ をそれぞれ $E/K(j_E)$ から定まる $K(j_E)$ の Hecke 指標, 及びその複素共役とする. このとき, 定理 3 と同様に構成した n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_n は $K(j_E)$ 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^n(X_n/K(j_E)), s) \doteq \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} L(\psi^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} L(\bar{\psi}^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \quad (n : \text{奇数})$$

$$L(t^n(X_n/K(j_E)), s) \doteq \prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} L(\psi^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} L(\bar{\psi}^{n-2i}, s-i)^{\binom{n}{i}} \times \zeta_{K(j_E)}(s - \frac{n}{2})^{\binom{n}{\frac{n}{2}}}$$

($n : \text{偶数}, t^n(X_n/K(j_E)) \subset h^n(X_n/K(j_E)) : \text{部分モチーフ}$)

ただし, $L(\psi, s)$, 及び $\zeta_{K(j_E)}(s)$ は, それぞれ ψ に付随する Hecke L 関数, 及び $K(j_E)$ 上の Dedekind ζ 関数を表し, \doteq は有限個の Euler 因子を除いた等号を表す.

そこで, 楕円曲線そのものの定義体は \mathbb{Q} に降下できなくとも, このように構成した Calabi-Yau 多様体 X_n が \mathbb{Q} 上のモデルを持てば, 系 4 では実現できなかった楕円 Hecke 固有新形式も X_n の L 関数の因子として実現できるであろうと期待される. 実際, Cynk と Schütt は以下の定理を証明した.

定理 6. ([CS]) 虚 2 次体 K の類数が 3 のとき, 命題 5 で楕円曲線 $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から構成した 3 次元 Calabi-Yau 多様体 X_3 は \mathbb{Q} 上のモデルを持ち, 以下が成り立つ.

$$L(h^3(X_3/\mathbb{Q}), s) = L(g_3, s)L(\psi, s-1)$$

ただし, $L(g_3, s)$, 及び $L(\psi, s)$ は, それぞれ重さ $3+1=4$ の楕円 Hecke 固有新形式の L 関数, 及び $E/\mathbb{Q}(j_E)$ から定まる Hecke 指標 ψ に付随する Hecke L 関数を表し, このような $L(g_3, s)$ は系 2.2 で得られたものたちとは重複しない.

定理 6 の証明の核心は、 X_3 の構成に用いる楕円曲線の直積 $E_1 \times E_2 \times E_3$ を、 E の Weil 係数制限関手による像 $\text{Res}_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$ と見なすことで、多様体の定義体を H あるいは $\mathbb{Q}(j_E)$ から \mathbb{Q} へ降下することである。しかし、一般には Weil 係数制限関手によって直積型の多様体の定義体を降下できたとしても、商多様体の特異点解消の定義体を降下できるとは限らないため、Cynk と Schütt による降下法は 4 次元以上の場合には上手く機能しない。

4 主結果

以下では、2 次元 Calabi-Yau 多様体上の固定点自由な群作用を用いることで、特異点解消を経由することなくより小さな体上の $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体を構成する方法を述べる。

F/K を $2n$ 次の Galois 拡大、 E を F 上の楕円曲線、 ι を E 上の標準的な対合とする。さらに、 E は F 上で定義された位数 2 の点 P を含むと仮定する。まず、 K 上 2 次の中間体 $K \subset K' \subset F$ を 1 つ取り、 $\text{Gal}(F/K') = \langle \sigma \rangle$ とする。すると、よく知られているように、商多様体 $\text{Res}_{F/K'}(E)/\iota \times \iota^\sigma$ の極小特異点解消 X_2 は K' 上の 2 次元 Calabi-Yau 多様体を定める。 $n = 1$ ならば、 X_2 が既に K 上で定義されているが、 $n \geq 2$ の場合も以下のようにして K 上の $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2n} を構成できる。2 次元 Abel 多様体 $(\text{Res}_{F/K'}(E))_F \simeq E \times E^\sigma$ 上の対合

$$(P_1, P_2) \mapsto (P_1 + P, -P_2 + P^\sigma)$$

が誘導する $(X_2)_F$ 上の不分岐対合 ϵ を考えると、 X_2 上の楕円曲面構造から ϵ は K' 上で定義されることが分かる。そこで、異なる n 個の体の埋め込み $\iota_i : K' \hookrightarrow F$ による ϵ の像 ϵ_i に対して $G = \{\epsilon_1^{p_1} \times \cdots \times \epsilon_n^{p_n} \mid \sum_{i=1}^n p_i = 0 \pmod{2}\}$ と定めると、自然に $G \subset \text{Aut}_F(\text{Res}_{F'/\mathbb{Q}}(X_2))$ と見なせるが、 G は $\text{Gal}(F/K)$ の作用に関して安定であるため、 K 上の滑らかな $2n$ 次元射影代数多様体 $X_{2n} = \text{Res}_{F'/\mathbb{Q}}(X_2)/G$ を得る。また、Cynk と Hulek による議論と同様にして X_{2n} が $2n$ 次元 Calabi-Yau 多様体であることも分かる。

以下が本稿の主結果である。

定理 7. E を $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の楕円曲線とする。また、 E は $\mathbb{Q}(j_E)$ 上に位数 2 の点を持ち、かつ $K(j_E)$ 上で類数 $2m$ ($m \leq n = [\mathbb{Q}(j_E) : \mathbb{Q}]$) の虚 2 次体 K の整数環に虚数乗法を持つと仮定する。このとき、 $E_{K(j_E)}$ から、上で述べた方法で構成された K 上の $2m$ 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2m} は \mathbb{Q} 上のモデルを持ち、さらに以下を満たす。

$$L(t^{2m}(X_{2m}/K(j_E)), s) \doteq \prod_{i=0}^{m-1} L(\psi^{m-2i}, s-i)^{\binom{m}{i}} \times \prod_{i=0}^{m-1} L(\bar{\psi}^{m-2i}, s-i)^{\binom{m}{i}} \times \zeta_{K(j_E)}(s - \frac{m}{2})^{\binom{m}{\frac{m}{2}}}$$

$$(t^m(X_m/K(j_E)) \subset h^m(X_m/K(j_E)) : \text{部分モチーフ})$$

ただし、 ψ 及び $\bar{\psi}$ は $E/K(j_E)$ から定まる $K(j_E)$ の Hecke 指標及びその複素共役である。

今後は、§3 と同様に \mathbb{Q} -楕円曲線 E から構成した Calabi-Yau 多様体 X_{2m} に対して、部分モチーフ $t^{2m}(X_{2m}/K(j_E))$ を \mathbb{Q} 上のモチーフに降下し、除いてしまった有限個の Euler 因子も含めてその L 関数 $L(t^{2m}(X_{2m}/\mathbb{Q}), s)$ を楕円 Hecke 固有新形式の L 関数で記述することで、定理 6 を高次元化することが課題である。

謝辞

今回、素晴らしい環境の中での貴重な発表の機会を下さった第12回城崎新人セミナー運営委員の皆様、深く感謝申し上げます。また、貴重なコメントを下さった聴講者の皆様、特に、当日発表した主結果の拡張に関する的確なコメント下さった谷田川友里氏と武田裕康氏に、深く感謝申し上げます。

参考文献

- [CH] S. Cynk and K. Hulek, *Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds*, *Canad. Math. Bull.*, **50** (4), 2007, 486–503.
- [CS] S. Cynk and M. Schütt, *Generalized Kummer constructions and Weil restrictions*, *Journal of Number Theory*, **129**, 2009, 1965–1975.
- [ES] N. D. Elkies and M. Schütt, *Modular forms and K3 surfaces*, *Advances in Mathematics*, **240**, 2013, 106–131.

重複 Wiener-Itô 積分について

星野 浄生*

大阪府立大学大学院理学系研究科博士前期課程 1 年, 2015 年 2 月

1 はじめに

ブラウン運動に関する微積分について述べる. 特に, ウィーナー積分とその重複積分について扱う. ブラウン運動のほとんどすべてのパスは連続であるが至る所微分不可能かつ非有界変動であり, 通常の微積分を行うことはできない. そこで確率積分の概念が必要になるが, 中でも被積分関数がランダムでない場合はウィーナー積分と呼ばれるものとなる. ウィーナー積分の n 次の重複積分 I_n の空間を K_n とすると K_n はウィーナー積分のエルミート多項式で級数展開され, ブラウン運動からなる関数の \mathcal{L}^2 空間は $\{K_n | n \geq 0\}$ で直交直和分解される (ウィーナー - 伊藤定理). ウィーナー - 伊藤定理が導出される一つの大きなポイントは重複積分の構成の仕方にある. そのアイデアを追い, 考察を行う. また, ウィーナー - 伊藤定理の良く知られた応用例としてマルチンゲール表現定理を述べる.

2 主定理

定理 (ウィーナー - 伊藤)

T を正数, $(B_t)_{t \in [0, T]}$ を確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の \mathbb{R}^d 値ブラウン運動, \mathcal{F}^B を, $(B_t)_{t \in [0, T]}$ により誘導される σ -field とする. このとき,

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P|_{\mathcal{F}^B}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n$$

ここで, $K_0 = \{[c] \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P) | \exists \tilde{c} \in [c] \tilde{c} : \text{constant}\}$, $K_n = I_n(\mathcal{L}_{sym}^2[0, T]^n)$ ($n \geq 0$).

3 ブラウン運動

定義 1 (1 次元ブラウン運動)

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間 (全測度 1 の測度空間)

$(B_t)_{t \in [0, \infty)}$: 拡大実数値-確率変数 (確率空間上の可測写像) 列

$(B_t)_{t \in [0, \infty)}$ が 1 次元ブラウン運動 (B.M.) \Leftrightarrow

- i) $B_0(\omega) = 0$ a.s.
- ii) 任意の $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ に対し

*gckjf413@gmail.com

- $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立
- iii) 任意の $0 \leq s < t < \infty$ に対し
 $B_t - B_s$ の分布は $N(0, t - s)$
- iv) $B(\cdot, \omega)$ は連続 a.s.

定義 2 (d 次元ブラウン運動)

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間

$(B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}))_{t \in [0, \infty)}$: d 次元拡大実ベクトル値-確率変数列

$(B_t)_{t \in [0, \infty)}$ が d 次元 B.M. \Leftrightarrow

- i) $\forall i$ $(B_t^{(i)})_{t \in [0, \infty)}$ は 1 次元 B.M.
- ii) $(B_t^{(1)})_{t \in [0, \infty)}, \dots, (B_t^{(d)})_{t \in [0, \infty)}$ は独立

定理 3

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間

$(B_t)_{t \in [0, \infty)}$: d 次元 B.M.

$P(\{\omega \in \Omega | B(\omega) \text{ は連続 かつ 至る所微分不可能 かつ任意区間上非有界変動}\}) = 1$

4 ウィーナー積分

定義 4 (ウィーナー積分)

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間

$(B_t)_{t \in [0, \infty)}$: d 次元 B.M.

$0 \leq a < b$

$\mathcal{L}_d^2[a, b] := \mathcal{L}_d^2([a, b], \mathcal{L}_{[a, b]}, \lambda|_{\mathcal{L}_{[a, b]}})$

$\mathcal{S}_d^2[a, b] := \{[f] \in \mathcal{L}_d^2[a, b] \mid \exists \tilde{f} \in [f] \tilde{f} \text{ は step function}\}$

$I_1: \mathcal{L}_d^2[a, b] \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を

$$I_1([f]) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r a_j^{(i)} (B_{t_j}^{(i)} - B_{t_{j-1}}^{(i)}), f = \sum_{j=1}^r a_j 1_{[t_{j-1}, t_j]} \in \mathcal{S}_d^2[a, b]$$

$(k \rightarrow \infty) \lim I_1([f_k]), (f_k)_{k \geq 0}$ は $\mathcal{S}_d^2[a, b]$ の点列で $(k \rightarrow \infty) \lim f_k = f$ で定める. $\int_a^b f(t) dB_t := I_1([f])$ を f のウィーナー積分という

5 重複ウィーナー-伊藤積分

(Ω, \mathcal{F}, P) : 確率空間

$(B_t)_{t \in [0, \infty)}$: d 次元 B.M.

$0 \leq a < b, n > 0$

定義 5 (*off-diagonal step function*)

step function $f: [a, b]^n \rightarrow R^d$ が *off-diagonal* \Leftrightarrow

$r > 0, a = t_0 < \dots < t_r = b, (a_{j_1, \dots, j_n})_{j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, r\}}: R^d$ の点列で

$$f = \sum_{j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, r\}, \# \{j_1, \dots, j_n\} = n} a_{j_1, \dots, j_n} 1_{\prod_{k=1}^n [t_{j_k-1}, t_{j_k}]}$$

と表される

定義 6 (重複ウィーナー-伊藤積分)

$$\mathcal{L}_d^2[a, b]^n := \mathcal{L}_d^2([a, b]^n, (\mathcal{L}_n)_{[a, b]^n}, (\lambda_n)|_{(\mathcal{L}_n)_{[a, b]^n}})$$

$$\mathcal{OS}_d^2[a, b]^n := \{[f] \in \mathcal{L}_d^2[a, b]^n \mid \exists \tilde{f} \in [f] \tilde{f} \text{ は } off - diagonal\}$$

$I_n : \mathcal{L}_d^2[a, b]^n \rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を
 $I_n(f) = W_n(f)$, $f \in \mathcal{OS}_d^2[a, b]^n$
 $(k \rightarrow \infty) \lim I_n(f_k)$, $(f_k)_{k>0}$ は $\mathcal{OS}_d^2[a, b]^n$ の点列で $(k \rightarrow \infty) \lim f_k = f$
 で定める

※ $n=1$ のときは断りなく n を省略する

定義 7 (対象化)

$S_n : n$ 次対象群, $f \in \mathcal{L}_d^2[a, b]^n$
 $\sigma \in S_n$ に対し, $f_\sigma : [a, b]^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^d}$; $f_\sigma(t_1, \dots, t_n) = f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$

f が対象 $\Leftrightarrow \forall \sigma \in S_n f = f_\sigma$

$$\mathcal{L}_{d, sym}^2[a, b]^n := \{[f] \in \mathcal{L}_d^2[a, b]^n \mid \exists \tilde{f} \in [f] \tilde{f} : \text{対象}\}$$

$\hat{\cdot} : \mathcal{L}_d^2[a, b]^n \rightarrow \mathcal{L}_{d, sym}^2[a, b]^n$; $\hat{f} = \frac{1}{n!} (\sigma \in S_n) \sum f_\sigma$
 \hat{f} を f の対象化という

定理 8

任意の $f \in \mathcal{L}_d^2[a, b]^n$ に対し,

- ・ $f \in \mathcal{L}_{d, sym}^2[a, b]^n \Leftrightarrow \hat{f} = f$
- ・ $I_n(\hat{f}) = I_n(f)$
- ・ $E(I_n(f)) = 0$
- ・ $\|I_n(f)\|_{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)}^2 = n! \|f\|_{\mathcal{L}_d^2[a, b]^n}^2$

6 ウィーナー-伊藤定理

以下, $T > 0$ を固定する

定義 9 (ポリノミアルカオス)

$$\mathcal{F}^B := \sigma(B_t \mid t \in [0, T]) := \sigma((t \in [0, T]) \cup B_t^{-1}(\mathcal{B}_n))$$

$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P|_{\mathcal{F}^B})$ の部分集合列 $(\tilde{J}_n)_{n \geq 0}$ を

$$\tilde{J}_0 = \{[c] \in \mathcal{L}_1^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid \exists \tilde{c} \in [c] \tilde{c} : constant\}, n \geq 0 \text{ に対し,}$$

$$\tilde{J}_n = \left\{ \prod_{j=1}^k I(f_j) \mid k \leq n \text{ かつ } f_1, \dots, f_k \in \mathcal{L}_d^2[0, T] \right\} \cup \tilde{J}_0$$

で定め, $(J_n)_{n \geq 0}$ を $J_n = \overline{\mathcal{V}(\tilde{J}_n)}$ で定める

$(n \rightarrow \infty) \lim J_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$ の要素をポリノミアルカオスという

定義 10 (ホモジニアスカオス)

$(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を

$$K_0 = J_0$$

$$K_n = (J_{n-1})^\perp \text{ on } J_n, n > 0$$

で定める

K_n の要素をオーダー n のホモジニアスカオスという

定義 11 (エルミート多項式系)

$v > 0$

γ_v : パラメータ v の 1 次元ガウス測度 *i.e.*

$$\gamma_v : \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]; \gamma_v(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{x^2}{2v}} dx$$

$(H_n(\cdot, v))_{n \geq 0}$ を

$$H_n(\cdot, v) : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}; H_n(x, v) = (-v)^n e^{\frac{x^2}{2v}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2v}}$$

で定める

$\{H_n(\cdot, v) | n \geq 0\}$ は $\mathcal{L}^2(\mathcal{L}, \gamma_v)$ の直交系で,

これをエルミート多項式系という

$$\cdot \hat{H}_n(\cdot, v) := \frac{H_n(\cdot, v)}{\sqrt{n! v^n}} \text{ とすると}$$

$\{\hat{H}_n(\cdot, v) | n \geq 0\}$ は $\mathcal{L}^2(\mathcal{L}, \gamma_v)$ の完全正規直交系 (C.O.N.S.)

定義 12

(X, \mathcal{F}, μ) : 測度空間

$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}_d^2(X^n, \mathcal{F}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ に対し,

$$\bigotimes_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j_1, \dots, j_n \leq d} (f_1)_{j_1}(x_1) \dots (f_n)_{j_n}(x_n) \quad (\in \mathcal{L}^2(X^n, \mathcal{F}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n}))$$

で定義する

補題 13

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P|_{\mathcal{F}^B}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n$$

補題 14

$P_n : \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P|_{\mathcal{F}^B})$ から K_n への直交射影作用素 ($n \geq 0$)

$$n, k \geq 0, n_1, \dots, n_k \geq 0, \sum_{j=1}^k n_j = n$$

$\{f_1, \dots, f_k\} : \mathcal{L}_d^2[0, T]^n$ の 0 でない直交列

$$\begin{aligned} \text{このとき, } P_n \left(\prod_{j=1}^k I(f_j)^{n_j} \right) &= \prod_{j=1}^k H_{n_j}(I(f_j); \|f_j\|^2) \\ &= I_n \left(\bigotimes_{j=1}^k f_j^{\otimes n_j} \right) \end{aligned}$$

補題 15

$\mathbf{N} := \{(n_k)_{k \geq 0} \mid \forall k \ n_k \geq 0 \text{ かつ } \#\{k \mid n_k > 0\} : \text{有限}\}$

各 $(n_k) \in \mathbf{N}$ に対し,

$$\mathcal{H}_{(n_k)} := \prod_{k=1}^{\infty} \hat{H}_{n_k}(I(e_k); 1)$$

1) $\{\mathcal{H}_{(n_k)} \mid (n_k) \in \mathbf{N}\}$ は $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P|_{\mathcal{F}^B})$ の C.O.N.S.

2) $\forall n \geq 0 \ \{\mathcal{H}_{(n_k)} \mid (n_k) \in \mathbf{N} \text{ かつ } \sum_{k=1}^{\infty} n_k = n\}$ は K_n の C.O.N.S.

補題 16

$n > 0$

$I_n : \mathcal{L}_{d, sym}^2[0, T]^n \rightarrow K_n$ は全単射

(特に, $\mathcal{L}_{d, sym}^2[0, T]^n = (\text{ユニタリー}) K_n$)

以上の補題から次を得る

定理 (ウィーナー-伊藤定理)

$K_0 = \{[c] \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \mid \exists \tilde{c} \in [c] \ \tilde{c} : \text{constant}\}$

$K_n = I_n(\mathcal{L}_{d, sym}^2[0, T]^n) \ (n \geq 0)$

このとき,

$$\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P|_{\mathcal{F}^B}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n$$

特に,

$$\forall \phi \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}^B, P|_{\mathcal{F}^B}) \ \exists!(c, f_1, f_2, \dots) \in K_0 \times \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_{d, sym}^2[0, T]^n \ \phi = c + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$$

7 応用例

ウィーナー-伊藤定理の応用例の一つとして, 以下がある

定理 (マルチンゲール表現定理)

$(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$ を $(B_t)_{t \in [0, T]}$ により誘導されるフィルトレーション,

$(M_t)_{t \in [0, T]}$ を 2 乗可積分 $(\mathcal{F}_t^B)_{t \in [0, T]}$ -マルチンゲールで $M_0 = 0$ とする.

このとき, $(M_t)_{t \in [0, T]}$ の連続バージョン $(\tilde{M}_t)_{t \in [0, T]}$ が存在し,

ある $f \in \mathcal{L}_{ad}^2([0, T] \times \Omega)$ で

$$\tilde{M}_t \in \int_0^t f(s) dB_s \quad , t \in [0, T]$$

と表される. ここで, 式の右辺は伊藤積分で,

$\mathcal{L}_{ad}^2([0, T] \times \Omega) = \{[f] \in \mathcal{L}^2([0, T] \times \Omega) \mid \exists \tilde{f} \in [f] \ \tilde{f} \text{ は発展的可測}\}$.

参考文献

[R] Hui-Hsiung, K., Introduction to Stochastic Integration, (2006), 147–184.

高エネルギーを探せ

八木義宗*

京都大学数学教室修士2年, 2015年2月

1 Introduction

まず次の問題を考える. G を loop のない有限グラフとする. 多重辺は許す (図 2). 次の操作を行う:

- (1) 辺と点の対に + か - を割り振る. (図で書き表す際は辺の両端に +, - を書き込む.)
- (2) 一つの点から出る辺との対で - のものは高々 1 つ. また各辺とその端点との対で - のものは高々 1 つ.

そして, 次の言葉を用意する. 点が高エネルギーであるとは, その点とその点を境界点に持つ任意の辺との対は + であること. また, 辺が高エネルギーであるとは, その辺と境界点との対が両方とも + である.

例 1.1. 図 3, 図 4 の例を見ると, G 上に高エネルギーが存在するかは G の構造に依ることが分かる.

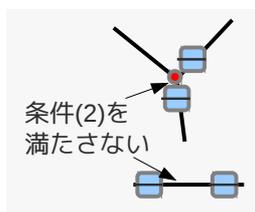


図 1: 条件 (2) を満たさない例

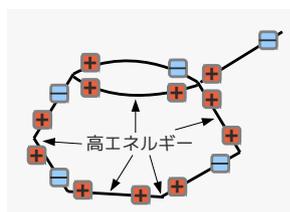


図 2: loop なし有限グラフに符号を割り振る

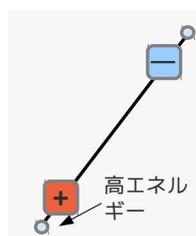


図 3: 区間の場合必ず高エネルギーが存在

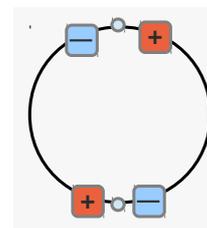


図 4: S^1 上は高エネルギーを持たないように出来る

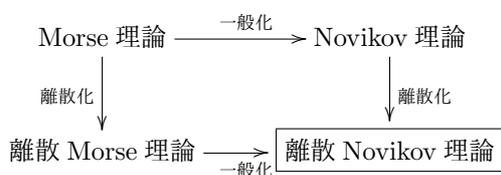
問題 G が高エネルギーを持たないようにするための必要十分条件は何か.

この問いは直接的に答えることが出来る. 興味があれば Appendix を参照せよ. ここではより強い形で示す. 即ち, どのように符号を与えれば高エネルギーの個数を最小に出来るかを, 幾何学の言葉を用いて表現する. また上記の問いはグラフという 1 次元の空間であるが, 実はこの問題は幾何学の枠組みにのるよう高次元の問題に拡張でき, 拡張した際に少なくとも種数 g の閉曲面 ($g \geq 1$) に対しては同様の議論が利用できる証明を与える.

上記の問題は幾何学の知識を必要としないが, 高次元に拡張するには問題の背景となる離散 Novikov 理

*nerve729@yahoo.co.jp

論を説明する必要がある。離散 Novikov 理論は次の図式のように Morse 理論が大基である：



Morse 理論は多様体上の“良い”関数の臨界点¹を調べることで空間の位相構造を調べる理論である。一方 Novikov 理論は、関数ではなく closed 1-form²を用いて空間の構造を調べる。多様体³ではなく一般の CW 複体⁴に対し“良い”関数を導入し空間のホモトピー型を調べるのが離散 Morse 理論である。R. Forman は [NFo] において、Novikov 理論と離散 Morse 理論を組み合わせた離散 Novikov 理論の一つの枠組みを与えた。本稿の目標は、多様体上で成立する結果が離散の場合でも成り立つか確認することである。多様体においては次の定理が知られている：

定理 1.2. (*L. Lusternik, L. Schinirelmann*)

閉多様体 M 上の C^∞ 関数 f に対し、 $\text{Crit}(f)$ で f の臨界点全体を表す時

$$\#\text{Crit}(f) \geq \text{cat}(M).$$

但し、位相空間 X に対し $\text{cat}(X) := \min \{k \mid \{F_1, F_2, \dots, F_k\}; X \text{ の開被覆で可縮.}\}$

例 1.3. 例えば円周 S^1 は図 5 のように最少 2 枚の開区間で覆えるので、 $\text{cat}(S^1) = 2$ である。従って、 S^1 上の滑らかな関数は少なくとも 2 点は臨界点を持つことが分かる。

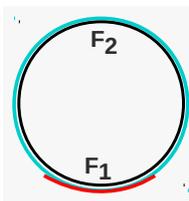


図 5: $\text{cat}(S^1) = 2$ を実現する開区間の取り方

これは関数に対しての結果であるが、closed 1-form に対しては次の結果が知られている：

定理 1.4. ([Far]) 閉多様体 M 上の closed 1-form に関しては、Morse 1-form ω に制限すると⁵、 $\text{Zero}(\omega)$ で ω の零点全体⁶を表す時

$$\#\text{Zero}(\omega) \geq \text{cat}(M, [\omega]).$$

但し、 $[\omega]$ は ω のコホモロジー類⁷を表す。 $\text{cat}(M, [\omega])$ は 3 章で定義する。

¹即ち関数の微分が消える点 (\mathbb{R} 上の関数では $f'(x) = 0$ なる x)。

²closed 1-form は局所的に関数の微分として表されるものである。臨界点を考えるには関数の微分さえ与えられれば十分である。

³例えば円周や球面、ドーナツ型のような滑らかな形の空間。

⁴例えば三角形や四面体など折れ曲がった図形などでも良い

⁵より一般の条件で M. Farber は示したが、ここではこの形で引用する。

⁶先程も注意したように closed 1-form は局所的には関数の微分で表せる。従って、closed 1-form の零点は局所的に取れる関数の臨界点となる。

⁷コホモロジー類とは closed 1-form 全体を適当な同値関係で割って出来る空間 $\{\text{closed 1-form}\} / \sim$ の元のことであり、 $[\omega]$ は ω で代表される元を表す。

この定理を離散化すると次のようになる:

問題 有限正則 CW 複体 X 上の “離散 Morse 1-form” ω は少なくとも $cat(X, [\omega])$ 個の “critical cell” を持つか.

この問いに対して得られた結果が次である:

定理 1.5. G を 1次元有限正則 CW 複体⁸ とする. G 上の任意の離散 Morse 1-form ω は, 少なくとも $cat(G, [\omega])$ 個の critical cell を持つ.

定理 1.6. $g \geq 1$ とする. 種数 g の閉曲面 Σ_g の正則セル分解における任意の離散 Morse 1-form ω は, 少なくとも $cat(\Sigma_g, [\omega])$ 個の critical cell を持つ.

以下で “離散 Morse 1-form”, “critical cell”, “ $cat(X, [\omega])$ ” を定義し, 定理 1.5 の証明を与える.

2 離散 Novikov 理論

本稿の離散 Novikov 理論の記述は最低限かつ厳密ではない. 正確な定義, 議論は [NFo] を参照せよ. X を n 次元正則 CW 複体とする. そして

$$0 \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(X) \rightarrow 0$$

を実数係数の鎖複体とする. $C_*(X) := \bigoplus_p C_p(X)$ とする. 離散 Morse 1-form を定義するために離散 form を定義する:

定義 2.1. ([NFo]) 各 $d \geq 0$ に対し,

$$\Omega^d(X) := \{ \omega : C_*(X) \rightarrow C_{*-d}(X); \text{local な線形写像} \}.$$

と定める. 各元 $\omega \in \Omega^d(X)$ を **離散 d -form** と呼ぶ.

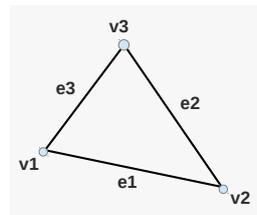
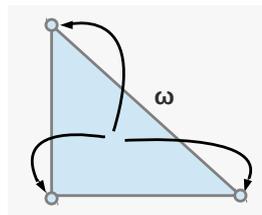


図 6: 各 cell を local な写像で送 図 7: S^1 のある regular cell decomposition とその閉包内の cell の線型和 composition

例 2.2. 図 7 のような円周 S^1 の正則 cell 分解を考えた時,

$$\omega(e_1) = 2v_1 - 3v_2, \omega(e_2) = v_2 + 2v_3, \omega(e_3) = -3v_3 + 2v_1$$

$$\omega(v_i) = 0 \quad (\forall i = 1, 2, 3)$$

で定まる線型写像 ω は離散 1-form である.

⁸即ち loop を持たない有限グラフである.

多様体上での微分形式を思い出すと、微分形式の次数を1つ上げる外微分なる線型写像が存在した。離散 form に対しても適切に“微分” $D: \Omega^*(X) \rightarrow \Omega^{*+1}(X)$ が定義される。 $D\omega = 0$ なる離散 1-form ω を **離散 closed 1-form** という。

記号 ω が離散 1-form なら、任意の p と任意の p -cell $\alpha^{(p)}$ に対し $\omega(\alpha^{(p)}) = \sum_{\{\gamma^{(p-1)}; \alpha \text{ の面 } \}} c_{\alpha\gamma} \cdot \gamma (c_{\alpha\gamma} \in \mathbb{R})$ と表せる。この時、 $c_{\alpha\gamma}$ は α と γ の向きに依る。そこで、 $\omega(\alpha^{(p)} > \gamma^{(p-1)}) := \langle \partial\alpha, \gamma \rangle c_{\alpha\gamma}$ と定める。これは α, γ の向きによらず、cell の対にのみ依る量である。従って、この量が正か0以下かを考えることは意味を持つ。

以上を踏まえ離散 Morse 1-form を定義する：

定義 2.3. ([NFo]) X 上の離散 closed 1-form ω が **Morse** であるとは、次を満たすこと：
任意の p , 任意の X の p -cell α に対し、

$$(1) \#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid \omega(\beta > \alpha) \leq 0\} \leq 1$$

$$(2) \#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid \omega(\alpha > \gamma) \leq 0\} \leq 1.$$

定義 2.4. ([NFo]) ある p -cell が離散 Morse 1-form の **critical p -cell** であるとは、上の2つの条件式における ≤ 1 を両方 $= 0$ に変えた条件式が成り立つこと。

注意 2.5. 条件 Morse と critical cell は1章の問題の条件(2)と高エネルギーが対応している。

R. Forman は離散 Novikov-Morse 不等式を示した ([NFo]). 系として定理 1.5 で用いる次の補題が示せる：

補題 2.6. X を n 次元正則 CW 複体とし、 ω を X 上の離散 Morse 1-form とする。そして、 $c_p(\omega)$ で ω の critical p -cell の個数を表す。この時、 $\sum_{p=0}^n (-1)^p c_p(\omega)$ は X のオイラー数 $\chi(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \dim C_p(X)$ に等しい。

注意 2.7. この補題から、 G が critical cell を持たない離散 Morse 1-form を許すことと S^1 にホモトピー同値であることは同値であることが分かる。 G が S^1 にホモトピー同値ならば critical cell を持たない離散 Morse 1-form を許すことは Appendix 第1, 2段落を参照。 G が $S^1 \vee \dots \vee S^1$ (l 個 ($l \geq 2$) の S^1) にホモトピー同値ならば、補題 2.6 より $c_0(\omega) - c_1(\omega) = \chi(G) = 1 - l \leq -1$ なので、 $\#Crit(\omega) \geq c_1(\omega) \geq 1$ となり必ず critical cell を持つ。これで1章の問題に答えられた。

3 Farber-Lusternik-Schnirelman category $cat(X, \xi)$

X を有限 CW 複体とし、 $\xi \in H^1(X; \mathbb{R})$ とする。 ω を ξ を代表する continuous closed 1-form とする⁹。

定義 3.1. ([Far]) 対 (X, ξ) に対し定まる量 $cat(X, \xi)$ を次で定める：

$$cat(X, \xi) := \min \{k \mid \{F, F_1, F_2, \dots, F_k\}; X \text{ の開被覆. } F_j \text{ たちは可縮で, } F \text{ は次を満たす}\};$$

(*) N を任意の自然数とする。 $t \in [0, 1]$ としたとき、ホモトピー $h_t: F \rightarrow X$ で次を満たすものが存在する：

- (1) h_0 は包含 $F \hookrightarrow X$.
- (2) 任意の $x \in F$ に対して $\gamma_x: [0, 1] \rightarrow X$ を $\gamma_x(t) = h_t(x)$ で定めると

$$\int_{\gamma_x} \omega \leq -N.$$

⁹continuous closed 1-form は標準的なものではないが、ここでは定義を与えない。本稿では多様体上で例を与えるが、closed 1-form と対応して構成できる continuous closed 1-form の連続な道に沿った積分値は一致する。詳しくは [Far] を参照。

例 3.2. 円周上の exact 1-form df ($f \in C^\infty(S^1)$) に対しては, θ を角度座標とした時

$$\int_{S^1} df = \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\theta} d\theta = f(2\pi) - f(0) = 0$$

となる. 従って df に対しては, $cat(X, \xi)$ の条件 (\star) を満たす開集合 F は空集合である. 即ち $cat(S^1, [df]) = cat(S^1)$ となる. 一方, closed 1-form $d\theta/2\pi$ に対しては

$$\int_{2\pi}^0 \frac{d\theta}{2\pi} = \left[\frac{\theta}{2\pi} \right]_{2\pi}^0 = -1$$

より, 適当な向きに N 回転させるホモトピーの flow に沿った $d\theta/2\pi$ の積分値は $-N$ となる. 従って $F = S^1$ と取れ, $cat(S^1, [d\theta/2\pi]) = 0$ となる.

注意 3.3. (主に [Far]) 明らかに $cat(X, \xi) \leq cat(X)$. また, 位相空間 X が連結で $\xi \neq 0$ ならば, $cat(X, \xi) \leq cat(X) - 1$. さらに, X が弧状連結, 局所可縮でパラコンパクト¹⁰ ならば, $cat(X) \leq \dim(X) + 1$ となる. 実は, $cat(X, \xi)$ はホモトピー不変量である. 即ち $\phi: X_1 \rightarrow X_2$ をホモトピー同値写像とし, $\xi_2 \in H^1(X_2; \mathbb{R})$, $\xi_1 := \phi^* \xi_2 \in H^1(X_1; \mathbb{R})$ とすると $cat(X_1, \xi_1) = cat(X_2, \xi_2)$ となる.

4 定理 1.5 の証明

G が連結の場合に示せば, G が非連結の場合は各連結成分での結果を併せることで主張が従う. そこで, 以下では G は連結とする. その時, ある整数 $l \geq 0$ で $G \sim_H S^1 \vee \dots \vee S^1$ (l コの S^1) なるものが存在する. 但し, $l = 0$ を G がある tree にホモトピー同値であることと思う.

$\xi = 0$ のときは, 離散 Morse 不等式 ([MFo]) より,

$$\begin{aligned} c_0(\omega) &\geq b_0(G) = 1 \quad (\because G \text{ は連結}) \\ c_1(\omega) &\geq b_1(G) = b_1(S^1 \vee \dots \vee S^1) = l \end{aligned}$$

なので $\#Crit(\omega) \geq 1 + l$ である. 従って, $G \sim_H tree$ の時は, $cat(G, 0) = cat(G) = 1 \leq \#Crit(\omega)$ より良い. $l \geq 1$ の時は, 注意 3.3 より, $cat(G, 0) = cat(G) \leq \dim(G) + 1 = 2 \leq 1 + l \leq \#Crit(\omega)$ より良い. 故に, $\xi = 0$ の時は主張が成り立つ. そこで, 以下では $\xi \neq 0$ とする. $l = 1$, 即ち, $f: S^1 \xrightarrow{\sim_H} G$ の時は, $cat(X, \xi)$ のホモトピー不変性より, $cat(G, \xi) = cat(S^1, f^* \xi) = 0 \leq \#Crit(\omega)$ より良い.

$l \geq 2$ の時を考える. 注意 2.7 より, $\#Crit(\omega) \geq 1$ である. 一方, $\xi \neq 0$ より, 注意 3.3 から, $cat(G, \xi) \leq cat(G) - 1 \leq \dim(G) = 1$ となる. 故に, $\#Crit(\omega) \geq cat(G, \xi)$. 以上で定理の主張が示せた.

5 Appendix: 1章の問題の直接的な証明

G 上高エネルギーを持たないように出来ることと S^1 にホモトピー同値であることは同値である. まず, G はいくつかの loop が交わったものと仮定して良い. 実際, G が tree の場合は必ず高エネルギーを持つことが示せ (図 8), また各 loop に繋がっている tree の部分は loop に繋がっている部分を + にして, そこから + と - を交互に割り振っていけば高エネルギーを持たないように出来る (図 9).

さて, G が S^1 にホモトピー同値ならば, + と - を交互に割り振れば高エネルギーを持たないように出来る (図 10).

¹⁰連結な有限 CW 複体はこの条件を満たす.

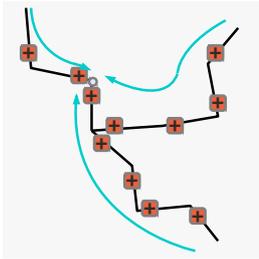


図 8: tree は必ず高エネルギーを持つ

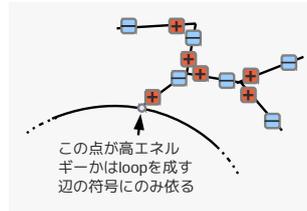


図 9: 枝は除ける

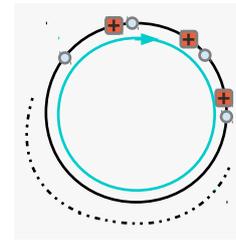


図 10: S^1 上は高エネルギーを持たないように出来る

逆に, G が高エネルギーを持たないとする. 背理法を用いる. G が $S^1 \vee \dots \vee S^1$ (1 個 ($l \leq 2$) の S^1) にホモトピー同値であるとする. G が高エネルギーを持たない事から, ある loop L_1 に着目すると, $+$ と $-$ が交互にならなければならない. 実際, もしそうでないとすると, 図 11 のように必ず条件 (2) を満たさず矛盾する.

ここで 2 の場合に分けて考える. 別の loop L_2 が L_1 といくつかの辺を共有している時 (図 12), 先程と同様に G が高エネルギーを持たない事から $+$ と $-$ が交互に並ぶ. しかしこの時, L_1 と L_2 に $-$ から $+$ に進む方向で向きを与えると, ちょうど 2 つの loop の分岐点で条件 (2) を満たさず矛盾. 一方 L_1 と L_2 がある頂点のみを共有する場合 (図 13) は, 共有する点 v を境界点を持つ L_2 の辺 e_1, e_2 との対 $(e_1, v), (e_2, v)$ は, v とそれを境界点を持つ L_1 の一方の辺との対が $-$ であることから, 条件 (2) より共に $+$ でなければならない. すると, 条件 (2) を満たし $+$ と $-$ が交互にはならないので, L_2 上に高エネルギーが存在する. これは G が高エネルギーを持たないことに矛盾.

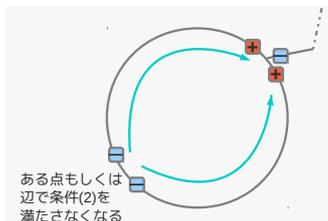


図 11: $+, -$ が交互に並ぶ

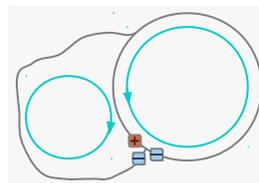


図 12: 枝別れ部分で矛盾

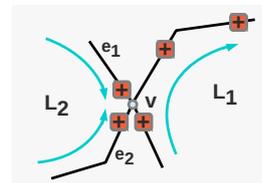


図 13: L_2 側は両方 $+$

参考文献

- [Far] M. Farber, *Topology of Closed One-Forms*, Mathematical Surveys and Monographs, volume 108, AMS (2004).
- [MFo] R. Forman, *Morse Theory for Cell Complexes*, Adv. Math., **134** (1998), pp. 90-145.
- [NFo] R. Forman, *Combinatorial Novikov-Morse Theory*, Int J. Math, 13,333 (2002).

曲面上の階数 1 の層の特性サイクル

谷田川 友里*

東京大学大学院数理科学研究科, 2015 年 2 月

1 序

発表では、正標数の曲面上の層の特性サイクルについての結果を紹介した。ここでいう特性サイクルとは標数 0 の \mathcal{D} 加群論における特性サイクルとの類似で、余接束上のサイクルとして定義されることが期待されるものである。

U を標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上のなめらかな代数多様体とし、そのなめらかなコンパクト化 $U \hookrightarrow X$ で境界 $D = X - U$ が X の単純正規交叉因子になっているような場合を考える。 Λ を標数が p と異なる有限体とし、 \mathcal{F} を U 上のなめらかな階数有限の Λ 加群の層とする。 X が曲線の場合には次のような定義が知られている。

定義 1.1. X が代数曲線のと看、

$$\text{Char}(X, U, \mathcal{F}) = -([T_X^* X] + \sum_{x \in D} (\text{rank} \mathcal{F} + \text{Sw}_x \mathcal{F}) [T_x^* X])$$

を (X, U, \mathcal{F}) の特性サイクルとよぶ。ここで、右辺に出てくる $T_X^* X$ と $T_x^* X$ はそれぞれ X 上の余接束 $T^* X$ の零切断と点 x でのファイバーを表わし、 $\text{Sw}_x \mathcal{F}$ はスワン導手と呼ばれる分岐の不変量を表している。

また、特性サイクルがみたしてほしい性質の 1 つとして指数公式とよばれるオイラー数 $\chi_c(U, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{2 \dim X} \dim H_c^i(U, \mathcal{F})$ との関係式がある。 X が曲線の場合には Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式として知られている。

定理 1.2 ([SGA7] Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式). X が固有的な代数曲線のと看次が成り立つ:

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = (\text{Char}(X, U, \mathcal{F}), T_X^* X)$$

ここで式の右辺は交点数を表している。

この特性サイクルについて X が曲面の場合には 2 つの異なる構成法による定義 ([K2], [Sa3]) が知られている。発表ではそれらの関係についてわかったことを紹介した。2 つの特性サイクルは前者が対数的余接束上定義されているのに対し、後者は余接束上定義されているため比較が難しい。そのため、2 つの特性サイクルを同じ余接束上のサイクルとして比較したい。

本稿では X が 2 次元以上の場合に必要な高次分岐理論における不変量について簡単に解説したあと、発表で紹介した主結果の一部である、[K2] による特性サイクルと同値といえるような余接束上の特性サイクルの構成について述べる。

*yatagawa@ms.u-tokyo.ac.jp

2 分岐フィルトレーション

分岐理論における重要な概念のひとつとして分岐フィルトレーションがある。分岐群とは完備離散付値体 K 上のガロア群に定まるフィルトレーションで、体の拡大の分岐を測るようなものである。剰余体が完全な場合の理論は [Se] にくわしくまとめられている。

ここでは剰余体が完全とは限らない標数 $p > 0$ の完備離散付値体について定義された分岐群について簡単に解説する ([K1], [M])。標数が正とは限らない場合の分岐群については [K1], [AS] を参照されたい。

以下では K を標数が正の完備離散付値体 (例えば $k(s)((t))$) とする。 K 上の最大アーベル拡大のガロア群の代わりに双対である $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ にフィルトレーションを定義する。まず、 $W_s(K)$ を K の長さ s のヴィット環とすると、 0 以上の各整数 n に対し

$$\mathrm{fil}_n W_s(K) = \{(a_{s-1}, \dots, a_0) \in W_s(K); p^i v_K(a_i) \geq -n\}$$

でフィルトレーションを入れる ([B] Proposition 1)。右辺に出てくる v_K は K の正規付値 $v_K : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ である。また 1 以上の各整数 m に対し、

$$\mathrm{fil}'_m W_s(K) = \mathrm{fil}_{m-1} W_s(K) + V^{s-s'} \mathrm{fil}_m W_{s'}(K)$$

でフィルトレーションを入れる。 $F : W_s(K) \rightarrow W_s(K)$ をフロベニウスとすると、アルティン-シュライヤー-ヴィット理論による写像

$$W_s(K) \rightarrow W_s(K)/(F-1)W_s(K) \simeq H^1(K, W_s(\mathbb{F}_p)) \simeq H^1(K, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$$

と $H^1(K, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_n H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ の合成

$$\delta_s : W_s(K) \rightarrow W_s(K)/(F-1)W_s(K) \simeq H^1(K, W_s(\mathbb{F}_p)) \simeq H^1(K, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad (1)$$

を考える。 $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の分岐フィルトレーション $\{\mathrm{fil}_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{n \geq 0}$ 、 $\{\mathrm{fil}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\}_{m \geq 1}$ はこの写像を使って、

$$\begin{aligned} \mathrm{fil}_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &= H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})(\mathrm{non} - p) + \bigcup_{s \geq 1} \delta_s(\mathrm{fil}_n W_s(K)) \\ \mathrm{fil}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &= H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})(\mathrm{non} - p) + \bigcup_{s \geq 1} \delta_s(\mathrm{fil}'_m W_s(K)) \end{aligned}$$

と定義される。これらの分岐フィルトレーションは [Se] における上付きの分岐フィルトレーションの一般化で、剰余体が完全な場合には 2 つの分岐フィルトレーションは指数が 1 ずれたところで一致する。2 つのフィルトレーションのうち上のものは対数的な分岐フィルトレーションと呼ばれ、このあとで対数的微分加群と結びつけられる。下のものは対数的でない微分加群と結びつけられる。一般の場合、定義からわかるとおり、

$$\mathrm{fil}_{n-1} H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset \mathrm{fil}'_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset \mathrm{fil}_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad (2)$$

という関係が成り立つ。 $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の元 χ に対し、 $\chi \in \mathrm{fil}_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ となるような最小の n を χ のスワン導手といい $\mathrm{sw}(\chi)$ とかく。 $\chi \in \mathrm{fil}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ なる最小の m を $\mathrm{sw}'(\chi)$ とかく。このとき (2) より $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の元 χ に対し、 $\mathrm{sw}'(\chi) = \mathrm{sw}(\chi) + 1$ か $\mathrm{sw}'(\chi) = \mathrm{sw}(\chi)$ のいずれかが成り立つ。 $\mathrm{sw}(\chi) > 0$ の場合に、前者が成り立つとき、 χ は I 型であるといい、後者が成り立つとき χ は II 型であるという。

3 スワン導手の精密化

前節で $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}(G_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の元 χ に対しスワン導手の定義 ([K2], [M]) を復習した。この節では χ を完備離散付値体 K の絶対ガロア群 G_K の指標と見たとき、分岐しているようなもの ($\text{sw}(\chi) > 0$ であるようなもの) に対し、スワン導手よりも多くの情報をもつ精密化されたスワン導手の定義を復習する ([K2], [M])。精密化されたスワン導手は対数的な場合、対数的微分加群の元として定義され、対数的でない場合、通常の微分加群の元として定義される。スワン導手や精密化されたスワン導手はこのあと特性サイクルを定義する際に用いられる。

χ を $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の元とし、前節で定義した $W_s(K)$ と $H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ のフィルトレーションを考える。 Ω_K^1 を K^p 上の微分加群とする。このとき、 π を K の素元 (例えば $K = F((t))$ の場合には t) とし、 Ω_K^1 のフィルトレーション $\{\text{fil}_n \Omega_K^1\}_{n \geq 0}$ 、 $\{\text{fil}'_m \Omega_K^1\}_{m \geq 1}$ を

$$\begin{aligned} \text{fil}_n \Omega_K^1 &= \left\{ \frac{\alpha + \beta d \log \pi}{\pi^n}; \alpha \in \Omega_{\mathcal{O}_K}^1, \beta \in \mathcal{O}_K \right\} \\ \text{fil}'_m \Omega_K^1 &= \frac{1}{\pi^m} \Omega_{\mathcal{O}_K}^1 \end{aligned}$$

で定める。ここで $d \log \pi$ は $\frac{d\pi}{\pi}$ を表している。写像

$$-F^{s-1}d : W_s(K) \rightarrow \Omega_K^1; (a_{s-1}, \dots, a_0) \mapsto -\sum_{i=0}^{s-1} a_i^{p^i-1} da_i$$

を考えると、この写像は $W_s(K)$ のフィルトレーションを Ω_K^1 の同じ番号のフィルトレーションにうつすため、

$$\begin{aligned} \varphi_s^{(n)} &: \text{gr}_n W_s(K) \rightarrow \text{gr}_n \Omega_K^1, \\ \varphi_s'^{(m)} &: \text{gr}'_m W_s(K) \rightarrow \text{gr}'_m \Omega_K^1 \end{aligned}$$

が誘導される。さらに次が成り立つ。

命題 3.1 ([M] Remark 3.2.12, [M] Proposition 3.2.3). $n > 0$ とする。また $m > 1$ かつ $p \neq 2$ 、あるいは $m > 2$ とする。このとき、次の図式を可換にするような単射 $\text{gr}_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \hookrightarrow \text{gr}_n \Omega_K^1$ と $\text{gr}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \hookrightarrow \text{gr}'_m \Omega_K^1$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \text{gr}_n W_s(K) & \xrightarrow{\varphi_s^{(n)}} & \text{gr}_n \Omega_K^1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{gr}_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \\ & \searrow & \nearrow \\ \text{gr}'_m W_s(K) & \xrightarrow{\varphi_s'^{(m)}} & \text{gr}'_m \Omega_K^1 \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{gr}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \end{array}$$

ここで $\text{gr}_n W_s(K) \rightarrow \text{gr}_n H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 、 $\text{gr}'_m W_s(K) \rightarrow \text{gr}'_m H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は (1) の δ_s によって誘導される写像である。

$\text{sw}(\chi) = n > 0$ 、 $\text{sw}'(\chi) = m$ とするとき、これらの単射による像を χ の精密化されたスワン導手といい、それぞれ $\text{rsw}(\chi)$ 、 $\text{rsw}'(\chi)$ とかく。(命題より $p = 2$ で対数的でない場合には少し定義を修正する必要があるが、それはここでは述べないことにする。)

4 特性サイクル

X を標数 $p > 0$ の代数閉体 k 上の連結な代数曲面 (例えば \mathbb{A}_k^2) とする。 D を X の単純正規交叉因子とし $\{p_i\}_{i \in I}$ を D の生成点たちとする。 Λ を標数が p と異なる有限体とし、 \mathcal{F} を $U = X - D$ 上のなめらかな階数 1 の Λ 加群の層とする。代数多様体のガロア理論より、 \mathcal{F} から、 U の代数的基本群 $\pi_1(U, \bar{\eta})$ の指標が定まる。これを $\chi \in H_{\text{ét}}^1(U, \Lambda^\times) = \text{Hom}(\pi_1(U, \bar{\eta}), \Lambda^\times) \subset H_{\text{ét}}^1(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ とかくことにする。最後の包含関係のところは $\Lambda^\times \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を 1 つ固定しておくことで部分群とみている。今、 X の p_i での局所環の完備化は完備離散付値環になり、その商体を K_i とおく。自然な射

$$H_{\text{ét}}^1(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(K_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

による χ の $H^1(K_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ への制限を $\chi|_{K_i}$ とかくことにする。ここで、この射に現れるうしろの 2 つのコホモロジーはガロアコホモロジー群を表している。

[K2] の特性サイクルについて述べる前に、clean と非退化という概念について復習する ([K2], [Sa2])。 D_i を p_i を生成点とする D の連結成分とする。このとき、線形和 R, R' を

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i \in I} \text{sw}(\chi|_{K_i}) D_i \\ R' &= \sum_{\text{sw}'(\chi|_{K_i}) > 1} \text{sw}'(\chi|_{K_i}) D_i \end{aligned}$$

で定める。 Z を R, R' の台とすると、[K2]、[M] よりそれぞれ $\Omega_{X/k}^1(\log D)(R)|_Z, \Omega_{X/k}^1(R')|_Z$ の大域切断 $\text{rsw}(\chi), \text{rsw}'(\chi)$ で、 D の各生成点 p_i での芽が $\text{rsw}(\chi|_{K_i}), \text{rsw}'(\chi|_{K_i})$ に一致するようなものがただ一つ存在する。これらが D の閉点 x で 0 にならないときそれぞれ χ は点 x で clean である、非退化であるという。特性サイクルのことばでいえば clean や非退化という概念は、特性サイクルの定義に D の閉点での閉ファイバーの項の重複度が 0 になるということの意味する。

以下、本稿では χ が D のすべての閉点で clean な場合のみを考える。実際には、2 つの特性サイクルの一致をいうためには clean の場合のみ考えれば十分である。

定義 4.1 ([K2] (3.4.4)). χ は clean とする。 $\text{sw}(\chi|_{K_i}) > 0$ なる $i \in I$ に対し、 $L_i \subset T^*X(\log D)$ を $\Omega_{X/k}^1(\log D)$ の部分 \mathcal{O}_{D_i} 加群 $\mathcal{O}_{D_i}(-R) \cdot \text{rsw}(\chi)|_{D_i}$ で定まる D_i 上の直線束とする。 (X, D) 上の対数的余接束 $T^*X(\log D) = \text{SpecV}(\Omega_{X/k}^1(\log D))$ の零切断を $T_X^*X(\log D)$ とするとき、 (X, U, \mathcal{F}) の特性サイクルを

$$\text{Char}(X, U, \mathcal{F}) = [T_X^*X(\log D)] + \sum_{i \in I} \text{sw}(\chi|_{K_i}) [L_i] \quad (3)$$

で定める。

X が固有的な場合、 \mathcal{F} のオイラー数は、この特性サイクルと零切断 $T_X^*X(\log D)$ の交点数に一致する ([Sa1])。

[Sa3] の特性サイクルは X の余接束 T^*X 上のサイクルとして定義される。そのため、2 つのサイクルの比較には、この特性サイクルの定めるサイクル類の T^*X への引き戻しをサイクル類を持つような特性サイクルを T^*X 上に構成する必要がある。

χ は D のすべての閉点で clean とする。 χ が clean なとき一般には χ は非退化とは限らない。 D_i 上の直線束 $L_i \subset T^*X$ を、 $\text{sw}'(\chi|_{K_i}) = 1$ の場合には D_i の余法束 $T_{D_i}^* = \text{SpecV}(\Omega_{D_i/k}^1)$ とし、 $\text{sw}'(\chi|_{K_i}) > 1$ の場合には $\Omega_{X/k}^1$ の $\mathcal{O}_{D_i}(-R') \cdot \text{rsw}'(\chi)|_{D_i}$ を含むような \mathcal{O}_{D_i} 上の直和成分で定まるようなものとする。 X 上の余接束 T^*X の零切断を T_X^*X で表すとき、 T^*X 上に特性サイクルを

$$\text{Char}'(X, U, \mathcal{F}) = [T_X^*X] + \sum_{i \in I} \text{dt}(\chi|_{K_i}) [L_i] + \sum_{x \in |D|} n_x [T_x^*X] \quad (4)$$

で定義する。 $\text{dt}(\chi|_{K_i})$ は $\text{sw}'(\chi|_{K_i}) = 1$ のとき 1 で、 $\text{sw}'(\chi|_{K_i}) > 1$ のとき $\text{sw}'(\chi|_{K_i})$ となるような数である。 n_x の定義はここでは省略する。

定理 4.2. χ が clean なとき、(3) の定めるサイクル類の $CH_2(T^*X)$ への引き戻しと (4) の定めるサイクル類は一致する。

X が固有的なとき、(3) が Grothendieck-Ogg-Shafarevich 公式の式をみたすことから次が従う。

系 4.3. X が固有的な代数曲面のとき次が成り立つ:

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = (\text{Char}'(X, U, \mathcal{F}), T_X^* X)$$

このとき定理 4.2 より、(4) は (3) と同じオイラー数の計算式を与えるという意味で (3) と同値なサイクルということができる。

謝辞

今回の城崎新人セミナーに参加させていただいたことを運営委員のみなさまにこの場を借りて感謝いたします。また、数々の興味深い講演をしてくださった参加者の皆様とポスター発表を聞いてくださった皆様、コメントをくださった皆様にこの場を借りて感謝いたします。

参考文献

- [AS] A. Abbes and T. Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Am. J. Math.* **124** (5) (2002), 879–920.
- [B] J. L. Brylinski, Théorie du corps de classes de Kato et revêtements abéliens de surfaces, *Ann. Inst. Fourier* **33** (1983), no. 3, 23–738.
- [K1] K. Kato, Swan conductors for characters of degree one in the imperfect residue field case, Algebraic K -theory and algebraic number theory, *Contemp. Math.* **83** (1989), 101–131.
- [K2] K. Kato, Class field theory, \mathcal{D} -modules, and ramification on higher dimensional schemes, part I, *Am. J. of Math.* Vol. **116**, No. 4 (1994), 757–784.
- [M] S. Matsuda, On the Swan conductor in positive characteristic, *Am. J. of Math.* Vol. **119**, No. 4 (1997), 705–739.
- [Se] J.-P. Serre, *Local fields*, *Graduate Texts in Mathematics* **67**, Springer, 1979.
- [Sa1] Saito, T., Wild ramification and the characteristic cycle of an ℓ -adic sheaf, *J. Inst. Math. Jussieu* **8** (2009), 769–829.
- [Sa2] T. Saito, Wild Ramification and the Cotangent Bundle, arXiv:1301.4632v6.
- [Sa3] T. Saito, Characteristic cycle and the Euler number of a constructible sheaf on a surface, *Kodaira Centennial issue of the Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo*, vol 22, 2015 pp. 387–442.
- [SGA5] Grothendieck, A., rédigé par Bucur, I., Formule d’Euler-Poincaré en cohomologie étale, *Cohomologie ℓ -adique et Fonctions L*, *SGA 5*, Springer Lecture Notes in Math. 589 (1977), 372–406.
- [SGA7] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1967–69, I, dirigé par A. Grothendieck, II par P. Deligne et N. Katz, SLN 288, 340, Springer-Verlag, 1972, 1973.

Moment-angle complex について

矢野 達哉*

大阪府立大学大学院理学系研究科, 2014 年 3 月

このたびは城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました。この場を借りて運営委員の方々にお礼申し上げます。

1 はじめに

moment-angle complex $Z_K(D^2, S^1)$ は抽象単体複体 K によって定まる, 2次元球体 D^2 と 1次元球面 S^1 の積で構成される. D^2 と S^1 を位相空間 X とその部分位相空間 A で置き換えたものは多面体積 (generalized moment-angle complex) $Z_K(X, A)$ と呼ばれ, トーリックトポロジーやホモトピー論の分野で研究されている. 本稿では多面体積の定義から始め, 以下の定理の証明を紹介する.

定理 1 (Grujić and Welker). K を $[m]$ 上の抽象単体複体とし, 任意の $i \in [m]$ に対して $\{i\} \in K$ とする. このとき, K の Alexander dual が vertex decomposable ならば $Z_K(D^n, S^{n-1})$ は球面の一点和にホモトピー同値である.

ここで, n 次元球体 $D^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, $(n-1)$ 次元球面 $S^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ とする.

2 準備

定義 1. $V \subset [m] = \{1, 2, \dots, m\}$ に対して K が $[m]$ 上の抽象単体複体であるとは以下をみたすことである.

1. $K \subset 2^V$.
2. 任意の $v \in V$ に対して $\{v\} \in K$ である.
3. $\sigma \in K$ かつ $\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in K$ である.

$V(K) = V$ を K の点集合と呼ぶ. また, $\sigma \in K$ に対して $\sigma \subset \tau$ なる $\tau \in K$ が存在しないとき, σ を facet と呼ぶ.

※以後, K は $[m]$ 上の抽象単体複体を表す.

*su301034@edu.osakafu-u.ac.jp

定義 2. 位相空間の列 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ と $\sigma \in K$ に対して

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = Y_1^\sigma \times \cdots \times Y_m^\sigma \quad \text{where} \quad Y_i^\sigma = \begin{cases} X_i & \text{if } i \in \sigma, \\ A_i & \text{if } i \notin \sigma. \end{cases}$$

とするとき, 多面体積 (generalized moment angle complex) $Z_K(\underline{X}, \underline{A})$ を以下で定義する.

$$Z_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m.$$

※任意の i に対して $(X_i, A_i) = (X, A)$ ならば, $Z_K(\underline{X}, \underline{A}) = Z_K(X, A)$ とかく.

定義 3. K の Alexander dual K° を以下で定義する.

$$K^\circ = \left\{ \sigma \subset [m] \mid [m] \setminus \sigma \notin K \right\}.$$

Remark.

$$(K^\circ)^\circ = K.$$

定義 4. $\sigma \in K$ に対して

$$\text{link}_K(\sigma) := \left\{ \tau \in K \mid \tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cup \sigma \in K \right\}, \text{del}_K(\sigma) := \left\{ \tau \in K \mid \tau \cap \sigma = \emptyset \right\}, \text{star}_K(\sigma) := \left\{ \tau \in K \mid \tau \cup \sigma \in K \right\}$$

※ $\text{link}_K(\sigma), \text{del}_K(\sigma)$ を $[m] \setminus \sigma$ 上の抽象単体複体とみなす.

Remark. $\text{del}_K(\sigma) \cup \text{star}_K(\sigma) = K$, $\text{del}_K(\sigma) \cap \text{star}_K(\sigma) = \text{link}_K(\sigma)$.

補題 2. $v \in [m]$

$$(\text{link}_K(v))^\circ = \text{del}_{K^\circ}(v), \quad (\text{del}_K(v))^\circ = \text{link}_{K^\circ}(v)$$

証明 容易. \square

定義 5. K が vertex decomposable であるとは以下のどちらかを満たすことである.

1. $K = \emptyset$ または $K = 2^{V(K)}$
2. 以下を満たす $v \in V(K)$ が存在する.
 - (a) $\text{del}_K(v)$ と $\text{link}_K(v)$ が vertex decomposable である
 - (b) $\text{link}_K(v)$ の facet は $\text{del}_K(v)$ の facet ではない

上の v を **shedding vertex** という.

定義 6.

$$K^{(i)} := \left\{ \sigma \subset [m] \mid \exists F \in K : \text{facet}(|F| \geq i+1, \sigma \subset F) \right\}$$

定義 7. K が sequentially Cohen-Macaulay over \mathbb{Z} (SCM/ \mathbb{Z}) であるとは以下を満たすことである.

- 任意の $i \geq 0$, 任意の $j < i$, 任意の $\sigma \in K$ に対して $\tilde{H}_j(\text{link}_K(\sigma)^{(i)}; \mathbb{Z}) = 0$.

事実 1.

$$\text{vertex decomposable} \implies \text{sequentially Cohen-Macaulay over } \mathbb{Z}$$

3 離散 Morse 理論

定義 8. X を compact regular CW 複体とする. 有向グラフ $G_X = (V_X, E_X)$ を以下で定義する.

$$V_X := \{c \mid c: X \text{ の closed cell}\}, \quad E_X := \{c \rightarrow c' \mid c, c' \in V_X, c' \subseteq c, \dim(c) = \dim(c') + 1\}$$

※ $\dim(c) :=$ 胞体 c の次元, $c \rightarrow c' := (c, c') \in V_X \times V_X$

V_X, E_X をそれぞれ有向グラフ $G_X = (V_X, E_X)$ の点集合, 枝集合 と呼ぶ.

Remark. $Z_K(D^n, S^{n-1})$ は compact regular CW 複体である.

定義 9. $G_X = (V_X, E_X)$ を X の有向グラフとする.

$E_X \supseteq \mathcal{M}_X : G_X$ の **matching** $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V_X$ の任意の点は \mathcal{M}_X の枝に多くとも 1 回のみあらわれる.

$E_X^{\mathcal{M}_X} := (E_X \setminus \mathcal{M}_X) \cup \{c' \rightarrow c \mid c \rightarrow c' \in \mathcal{M}_X\}$ とする.

$\mathcal{M}_X : \mathbf{acyclic} \stackrel{\text{Def}}{\iff} E_X^{\mathcal{M}_X}$ が cycle を含まない.

※ $v_1, v_2, \dots, v_n \in V_X$ に対して, $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ という列が $v_1 = v_n$ を満たすならば, これを cycle という.

$$\text{Crit}(\mathcal{M}) := \{c \in V_X \mid \text{任意の } c' \rightarrow c'' \in \mathcal{M} \text{ に対して } c \neq c', c \neq c''\}$$

$\text{Crit}(\mathcal{M})$ の要素を **critical cell** と呼ぶ.

定理 3. X を compact regular CW 複体とし, \mathcal{M}_X を G_X の acyclic matching とする.

$$X \simeq X^{\mathcal{M}_X}$$

ここで, $X^{\mathcal{M}_X}$ は次元 i の critical cell $c \in \text{Crit}(\mathcal{M}_X)$ を $(i-1)$ -skeleton $X^{\mathcal{M}_X}$ に $f_c^{\mathcal{M}_X}$ で接着した CW 複体である.

※ $f_c^{\mathcal{M}_X}$ を定義していないが, 詳しい定義は [VW] を参照.

4 主定理の証明

補題 4,5,6,7 は証明を省略する. 証明は [VW] を参照. 以降,

$$\begin{aligned} e_+^i &= \{(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, 0, \dots, 0) \in S^{n-1} \mid x_i \geq 0\} \\ e_-^i &= \{(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, 0, \dots, 0) \in S^{n-1} \mid x_i \leq 0\} \\ e_\bullet^n &= D^n \end{aligned}$$

とする.

補題 4. $\mathcal{M}_{D^n} = \{e_-^{i+1} \rightarrow e_+^i \mid 0 \leq i \leq n-2\} \cup \{e_\bullet^n \rightarrow e_+^{n-1}\}$ は acyclic matching である.

$1 \leq i \leq m$ に対して,

$$\mathcal{M}_i = \begin{cases} \{c \rightarrow c' \in E_{Z_K(D^n, S^{n-1})} \mid c_1 \rightarrow c'_1 \in \mathcal{M}_{D^n}\} & \text{if } i = 1, \\ \{c \rightarrow c' \in E_{Z_K(D^n, S^{n-1})} \mid c, c' \in \text{Crit}(\bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{M}_k), c_i \rightarrow c'_i \in \mathcal{M}_{D^n}\} & \text{if } i \geq 2. \end{cases}$$

と定義し,

$$\mathcal{M}_{Z_K(D^n, S^{n-1})} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{M}_i$$

とする. このとき, 以下がわかる.

補題 5. $\mathcal{M}_{Z_K(D^n, S^{n-1})}$ は acyclic matching である.

※この補題 5 により $Z_K(D^n, S^{n-1}) \simeq Z_K(D^n, S^{n-1})^{\mathcal{M}_{Z_K(D^n, S^{n-1})}}$ がわかる.

補題 6. K を $[m]$ 上の抽象単体複体とし, 任意の $i \in [m]$ に対して $\{i\} \in K$ とする. また, K の Alexander dual が vertex decomposable とし, m を K° の shedding vertex とする. このとき,

$$i : Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1})$$

は零ホモトープである (i.e. $i \simeq *$).

定理 1 の証明

m に関する帰納法により示す.

$m=1$ の場合 任意の K は Alexander dual が vertex decomposable である.

$$\text{Crit}(\mathcal{M}_{Z_K(D^n, S^{n-1})}) = \begin{cases} \{e_-^0\} & \text{if } \{1\} \in K, \\ \{e_-^0, e_+^{n-1}\} & \text{if } \{1\} \notin K. \end{cases}$$

である. よって,

$$Z_K(D^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} e_-^0 & \text{if } \{1\} \in K, \\ e_-^0 \cup e_+^{n-1} \simeq S^{n-1} & \text{if } \{1\} \notin K. \end{cases}$$

よって, $m=1$ のときは示された.

$m \geq 2$ の場合 ある $\Omega \subset [m]$ に対して, $K^\circ = 2^\Omega$ である場合,

$$K = \{\sigma \cup \tau \mid \sigma \in \Delta^\Omega, \tau \in \partial \Delta^{[m] \setminus \Omega}\}$$

である.

$$Z_K(D^n, S^{n-1}) \approx \bigcup_{i=\#\Omega+1}^m D^n \times \cdots \times D^n \times \underbrace{S^{n-1}}_{i \text{ 番目}} \times D^n \times \cdots \times D^n$$

である.

したがって, $Z_K(D^n, S^{n-1}) \simeq S^{nr-1}$ である.

K° が shedding vertex m を持つとする.

$$Z_K(D^n, S^{n-1}) = \text{colim} \left\{ Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \xleftarrow{i} Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{j} Z_{\text{star}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \right\}$$

i, j は inclusion とする.

$[m-1]$ 上の抽象単体複体 L に対して \bar{L} は $[m]$ 上の抽象単体複体とする. Projection lemma より,

$$Z_K(D^n, S^{n-1}) \simeq \text{hocolim} \left\{ Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \xleftarrow{i} Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{j} Z_{\text{star}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \right\}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) &= Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1} \\ Z_{\overline{K \setminus m}}(D^n, S^{n-1}) &= Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1} \\ Z_{\text{star}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) &= Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n \end{aligned}$$

である.

補題 7. $(X, A), (D, S)$ を CW 対とし, $A \xrightarrow{i} X, S \xrightarrow{j} D$ はそれぞれ零ホモトープであるとする. このとき,

$$\text{hocolim} \left\{ X \times S \xleftarrow{i \times 1} A \times S \xrightarrow{1 \times j} A \times D \right\} \simeq \frac{X \times S}{* \times S} \vee \Sigma(A \wedge S) \vee \frac{A \times D}{A \times *}$$

よって,

$$Z_K(D^n, S^{n-1}) \simeq \frac{Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1}}{* \times S^{n-1}} \quad (1)$$

$$\vee \Sigma(Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \wedge S^{n-1}) \quad (2)$$

$$\vee \frac{Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n}{Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times *} \quad (3)$$

$$(1) (Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1}) / (* \times S^{n-1})$$

$m : K^\circ$ の shedding vertex $\implies \text{link}_{K^\circ}(m) : \text{vertex decomposable} \iff (\text{del}_K(m))^\circ : \text{vertex decomposable}$

より, 帰納法の仮定から $Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \simeq$ 球面の一点和 である. よって,

$$Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1} \simeq \text{球面の一点和} \times S^{n-1}.$$

よって,

$$(Z_{\text{del}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times S^{n-1}) / (* \times S^{n-1}) \simeq \text{球面の一点和}.$$

$$(2) \Sigma(Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \wedge S^{n-1})$$

$m : K^\circ$ の shedding vertex $\implies \text{del}_{K^\circ}(m) : \text{vertex decomposable} \iff (\text{link}_K(m))^\circ : \text{vertex decomposable}$

より, 帰納法の仮定から, $Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \simeq$ 球面の一点和 である. よって,

$$\Sigma(Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \wedge S^{n-1}) \simeq \text{球面の一点和}.$$

$$\begin{aligned} (3) & \frac{Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n}{Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times *} \\ & \frac{Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n}{Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times *} \\ & = \text{colim} \left\{ * \leftarrow Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times * \xrightarrow{\text{包含写像}} Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n \right\} \\ & \simeq \text{hocolim} \left\{ * \leftarrow Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times * \xrightarrow{\text{包含写像}} Z_{\text{link}_K(m)}(D^n, S^{n-1}) \times D^n \right\} \\ & \simeq * \end{aligned}$$

□

参考文献

- [VW] V.Grujić, V.Welker, “Discrete Morse theory for moment-angle complexes of pairs (D^n, S^{n-1}) ”, arXiv:1212.2028v2, 2012.

シンプレクティック商特異点のクレパント解消と Cox 環

山岸 亮*

京都大学数学教室, 2015 年 2 月

本稿ではシンプレクティック商特異点と呼ばれる代数多様体を導入し、そのクレパント解消を Cox 環を用いて構成する手法を紹介する。

1 定義と諸結果

偶数次元 \mathbb{C} -ベクトル空間 \mathbb{C}^{2n} を考える。その座標を $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ とすると、 \mathbb{C}^{2n} 上に自然な正則シンプレクティック形式 $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ が定まる。 $G \subset GL(2n, \mathbb{C})$ を有限部分群とすると G は \mathbb{C}^{2n} に線形に作用するが、ここでは次で定義されるシンプレクティックな作用のみを考える。

$$g \in GL(2n, \mathbb{C}) \text{ がシンプレクティックに作用} \stackrel{\text{def}}{\iff} g^*\omega = \omega \iff g \in Sp(2n, \mathbb{C})$$

つまり G としては $Sp(2n, \mathbb{C})$ の有限部分群を考える。 \mathbb{C}^{2n} の G による商空間 \mathbb{C}^{2n}/G には自然にアフィン代数多様体の構造が入る。対応する環は不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]^G$ であり、商写像 $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}/G$ は部分環の包含写像に対応する。 G が非自明の時 \mathbb{C}^{2n}/G は特異点を持ち、これをシンプレクティック商特異点と呼ぶ。

例(A_1 -特異点) $n = 1, G = \langle g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$
 g の作用 ($x_1 \mapsto -x_1, y_1 \mapsto -y_1$) がシンプレクティックであることはすぐにわかる。不変式環を具体的に計算すると、

$$\mathbb{C}[x_1, y_1]^G = \mathbb{C}[x_1^2, x_1y_1, y_1^2] \cong \mathbb{C}[u, v, w]/(uw - v^2)$$

となって \mathbb{C}^2/G は原点に孤立特異点を持つ二次曲面だとわかる。 □

$n = 1$ の場合 $Sp(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})$ であり、有限部分群 G は以下のように完全に分類されている：

G	位数	タイプ
巡回群	$l + 1$	A_l ($l \geq 1$)
二項正二面体群	$4l$	D_l ($l \geq 4$)
二項正四面体群	24	E_6
二項正八面体群	48	E_7
二項正二十面体群	120	E_8

*ryo-yama@math.kyoto-u.ac.jp

これらの G による商特異点 \mathbb{C}^2/G は ADE-特異点などと呼ばれていて詳しく研究されている。

特異点が与えられたときその特異点解消を考えることが自然であるが、特にその中でもクレパント解消と呼ばれるものに焦点を当てる。

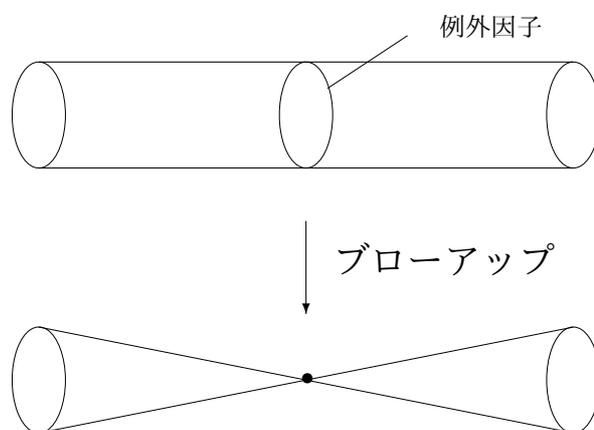
定義 代数多様体間の写像 $\pi: X \rightarrow Y$ が Y のクレパント解消

- $\stackrel{def}{\iff}$ (1) X :非特異
 (2) $\pi^{-1}(Y - \text{Sing}(Y)) \rightarrow Y - \text{Sing}(Y)$ が同型
 (3) π は proper 射
 (4) $K_X = \pi^*K_Y$ (K_X, K_Y はそれぞれ X, Y の標準因子)

□

(1)~(3) は通常の特異点解消の定義で、(4) がクレパント性に対応している。

例 A_1 -特異点の場合は特異点におけるブローアップがクレパント解消を与える (下図) :



クレパント解消によって潰れる因子を例外因子と呼ぶ。一般には例外因子はいくつかの既約成分から成る。他の ADE-特異点についても特異点でのブローアップを繰り返してクレパント解消が得られることが知られてる。

クレパント解消を考える動機付けとしては、1つは極小モデル理論との関連である。クレパント解消は \mathbb{C}^{2n}/G の非特異極小モデルにあたるので、それを探するのは自然であると思われる。もう1つは McKay 対応との関連である。McKay 対応とはクレパント解消の幾何学的性質と G の表現論的性質を結びつける対応であり、2次元の場合 (ADE-特異点の場合) はそのような対応があることが知られている。これを高次元に拡張することが1つの目標である。

クレパント解消は一般には存在しないし、存在しても一意的とは限らない。しかし、2次元の場合は次の事実が知られている。

事実 ADE-特異点はただ1つクレパント解消が存在する。

高次元においては、どの G について \mathbb{C}^{2n}/G がクレパント解消を持つかは完全に分類されておらず、現在知られている (線形表現として既約な) G は以下の4種類しかない :

G	n
S_n	1 以上
$S_n \times \Gamma^{\times n}$	1 以上
$G_4 = Q \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	2
$Q \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_4$	2

ただし、 S_n は n 次対称群、 Γ は $SL(2, \mathbb{C})$ の有限部分群、 Q は四元数群、 D_4 は正二面体群を表している。

2 Cox 環の導入

この節では \mathbb{C}^{2n}/G がクレパント解消を持つと仮定し、その 1 つ $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^{2n}/G$ を固定する。 E_1, \dots, E_m を π の既約例外因子全体とすると、 X 上の因子の線形同値類の成すアーベル群 $\text{Pic}(X)$ は \mathbb{Z}^m と同型になることが知られており、 $\text{Pic}(X)_{\mathbb{R}} := \text{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とおけばこれは E_1, \dots, E_m を基底にもつ \mathbb{R} -ベクトル空間となる。

$D \in \text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ に対し、 \mathbb{C} -ベクトル空間 $H^0(X, D) = \{f \in \mathbb{C}(X)^{\times} \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$ を考える。このとき、 D に付随して代数多様体 $X_D := \text{Proj}(\bigoplus_{k=0}^{\infty} H^0(X, kD))$ が定まる。 X_D は自然に \mathbb{C}^{2n}/G への写像を併せ持つことに注意する。

次に、movable cone と呼ばれる $\text{Pic}(X)_{\mathbb{R}}$ の部分集合 $\text{Mov}(X)$ について考える。これは基底点集合の余次元が 2 以上であるような因子から成り、原点を頂点とする凸錐を成す。 $\text{Mov}(X)$ は更に (ここでは定義を説明しないが) チャンバーと呼ばれる有限個の凸錐に分割される。各チャンバーに対し、その中から因子 D を取ってくる毎に X_D を考えることができる (実は X_D は D の取り方に依存しない) が、シンプレクティック商特異点の一般的な性質として次の事実がある：

事実 上の対応 $D \mapsto X_D$ は次の全単射を与える：

$$\{\text{Mov}(X) \text{ の中のチャンバー}\} \cong \{\mathbb{C}^{2n}/G \text{ のクレパント解消}\}$$

□

ここで X の Cox 環を次のように定義する：

$$\text{Cox}(X) := \bigoplus_{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m} H^0(X, a_1 E_1 + \dots + a_m E_m) t_1^{a_1} \cdots t_m^{a_m}$$

ただし、 t_1, \dots, t_m は次数を明示するために付けられた不定元である。上記の事実から $\text{Cox}(X)$ を計算できれば \mathbb{C}^{2n}/G の全てのクレパント解消が構成できることになる。ここからは Cox 環を線形表現 G だけの情報から (初めに固定した X を構成すること無しに) 具体的に求める方法を説明する。

G の元 g は \mathbb{C}^{2n} の固定部分空間 $(\mathbb{C}^{2n})^g$ の余次元が 2 の時シンプレクティックリフレクションと呼ばれる。 π の例外既約因子の集合 $\{E_1, \dots, E_m\}$ とシンプレクティックリフレクションの共役類の集合は自然な 1 対 1 対応があることが知られている (McKay 対応の一種)。 $g_i \in G$ ($i = 1, \dots, m$) を E_i に対応する共役類の代表元とする。巡回群 $\langle g_i \rangle \subset G$ は自然に双対空間 $(\mathbb{C}^{2n})^{\vee}$ に作用し、これは 1 次元表現に分解される： $(\mathbb{C}^{2n})^{\vee} = V_1 \oplus \dots \oplus V_{2n}$ 。

g_i の位数を r_i とし、 ζ を 1 の原始 r_i 乗根とすると、ある整数 $0 \leq a_1, \dots, a_{2n} < r_i$ が存在して g_i は各 V_j に ζ^{a_j} 倍で作用する。この時、有理関数体 $\mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})$ 上の付値 $v_i : \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n}) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を $v_i(x_j) = a_j$ ($x_j \in V_j$) によって定義する ($(\mathbb{C}^{2n})^\vee$ 上で定義すれば $\mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})$ 全体に拡張される)。一方で、 v_{E_i} を X の関数体 $\mathbb{C}(X)$ 上の E_i に関する因子的付値とする。 X と \mathbb{C}^{2n}/G は開集合上で同型なので $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n}/G) = \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})^G \subset \mathbb{C}(\mathbb{C}^{2n})$ となることに注意する。2つの付値 v_i と v_{E_i} は次のような関係がある：

命題([K],[IR])

$$v_{E_i} = \frac{1}{r_i} v_i|_{\mathbb{C}(X)}$$

□

この結果を用いると、不変式環 $R := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]^G$ の生成系から Cox 環の生成系を与えることができる。 R の生成系 ϕ_1, \dots, ϕ_k で次の条件を満たすものを考える：

「任意の $f \in R$ に対して、 ϕ_1, \dots, ϕ_k についての単項式 f_1, \dots, f_l が存在して $f = f_1 + \dots + f_l$ かつ全ての i, j について $v_i(f) \leq v_i(f_j)$ 」。

クレパント解消の Cox 環が有限生成であるという一般論によって、このような生成系がいつでも取れることがわかる。次の結果が成り立つ：

定理 ϕ_1, \dots, ϕ_k を上記の条件を満たす R の生成系とする。この時、

$$\{\phi_j t_1^{-\frac{1}{r_1} v_1(\phi_j)} \dots t_m^{-\frac{1}{r_m} v_m(\phi_j)}\}_{j=1, \dots, k} \cup \{t_1, \dots, t_m\}$$

は $\text{Cox}(X)$ の生成系となる。

□

$\text{Cox}(X)$ を計算できると $\text{Mov}(X)$ のチャンバーの構造も計算することもできる。[DW] では $G = Q \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} D_4$ (第1節のリスト参照) の場合について Cox 環からクレパント解消が 81 個あることを示している。

3 クレパント解消を持たない場合

既に述べたように \mathbb{C}^{2n}/G はクレパント解消を持つとは限らない。しかし、この場合でも前節の構成に意味を与えることができる。極小モデル理論の結果から、 \mathbb{C}^{2n}/G の (相対) 極小モデル $X(\rightarrow \mathbb{C}^{2n}/G)$ が常に存在することが知られている。この場合極小モデルとは、クレパント解消の定義において、非特異性の代わりに \mathbb{Q} -分解的末端の特異点という比較的マイルドな特異点も許したものを指す。極小モデルに対しても Cox 環を同様に定義することができる。一般の \mathbb{C}^{2n}/G に対して前節の構成を実行すると、極小モデルの Cox 環が計算される。つまり、クレパント解消だけでなく、より一般に極小モデルを G から具体的に計算できることになる。

参考文献

[DW] M. Donten-Bury and J. A. W\'isniewski. On 81 symplectic resolutions of a 4-dimensional quotient by a group of order 32. in preparation, 2014.

- [IR] Y. Ito and M. Reid, The McKay correspondence for finite subgroups of $SL(3, \mathbf{C})$, in *Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)*, 221-240, de Gruyter, Berlin.
- [K] D. Kaledin, McKay correspondence for symplectic quotient singularities, *Invent. Math.* **148** (2002), no. 1, 151–175.

Brezis-Kato の正則性定理の拡張

山口 晋*

大阪市立大学理学研究科数物系専攻修士1年, 2015年2月

1 はじめに

楕円型偏微分方程式論の正則性定理の1つであり, 参考文献 [3] の付録にも収録されている「Brezis-Kato の定理」を扱う. 参考文献 [3] では Dirichlet 境界条件での Brezis-Kato の定理が収録されている. つまり, 次の定理が扱われている:

定理 1.1. Ω を \mathbb{R}^N ($N \geq 3$) の滑らかな有界領域とし, $a(x) \in L^{N/2}(\Omega)$ とする. また $u = u(x) \in H_0^1(\Omega)$ は以下の方程式の弱解とする:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = a(x)u(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

このとき, $q < \infty$ となる任意の実数に対して $u \in L^q(\Omega)$ となる.

本稿では Neumann 境界条件での Brezis-Kato の定理も扱う. つまり, 次の定理を考える:

定理 1.2. Ω を \mathbb{R}^N ($N \geq 3$) の滑らかな有界領域とし, $a(x) \in L^{N-1}(\partial\Omega)$ とする. また $u = u(x) \in H^1(\Omega)$ は以下の方程式の弱解とする:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = a(x)u(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

ここで, ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルを表す. このとき, $q < \infty$ となる任意の実数に対して $u \in L^q(\partial\Omega)$ となる.

2 定理 1.1 の証明の概略

$s \geq 0, L \geq 0$ を定数とし, $\varphi := u \min\{|u|^{2s}, L^2\} \in H_0^1(\Omega)$ をテスト関数とする. これを $-\Delta u = au$ の両辺に掛けて, 部分積分をすると

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u \min\{|u|^{2s}, L^2\}) dx = \int_{\Omega} au^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx$$

*m14saF029@ex.media.osaka-cu.ac.jp

となる. また

$$\min\{|u|^{2s}, L^2\} = \begin{cases} |u|^{2s} & \text{in } A := \{x \in \Omega; L \geq |u|^s\} \\ L^2 & \text{in } \{x \in \Omega; |u|^s \geq L\} \end{cases}$$

に注意して計算すると以下の不等式を得る:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx + \frac{s}{2} \int_A |\nabla(|u|^2)|^2 |u|^{2s-2} dx \leq \int_{\Omega} |a||u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx \quad (1)$$

ここで, $u \in L^{2s+2}(\Omega)$ を仮定する. (1) を用いて $\int_{\Omega} |\nabla(u \min\{|u|^s, L\})|^2 dx$ を上から評価する. このとき, Hölder 不等式などを用いて評価していく. \int_{Ω} すると, 次を得る:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u \min\{|u|^s, L\})|^2 dx \leq M \quad (\text{ただし, } M \text{ は } L \text{ に依存しない定数}) \quad (2)$$

(2) を用いると

$$\int_A |\nabla(|u|^{s+1})|^2 dx \leq M \quad (3)$$

(3) はすべての $L \geq 0$ に対して成立するので, $L \rightarrow \infty$ とすれば

$$|u|^{s+1} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \quad (\text{ソボレフの埋め込みによる})$$

ゆえに, $u \in L^{\frac{2N}{N-2}(s+1)}(\Omega)$

$s_0 = 0, 2s_{i+1} + 2 = \frac{2N}{N-2}(s_i + 1) (i \geq 1)$ とすれば (「Moser iteration method」) $q < \infty$ に対して $u \in L^q(\Omega)$ となる.

3 定理 1.2 の証明の概略

$s \geq 0, L \geq 0$ を定数とし, $\varphi := u \min\{|u|^{2s}, L^2\} \in H^1(\Omega)$ をテスト関数とする. これを $-\Delta u + u = 0$ の両辺に掛けて, 部分積分をすると

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u \min\{|u|^{2s}, L^2\}) dx + \int_{\Omega} u^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx = \int_{\partial\Omega} au^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dS_x$$

となる. 定理 1.1 と同様に計算すると次の不等式を得る:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx + \frac{s}{2} \int_A |\nabla(|u|^2)|^2 |u|^{2s-2} dx + \int_{\Omega} u^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx \leq \int_{\partial\Omega} |a||u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dS_x \quad (4)$$

ここで, $u \in L^{2s+2}(\Omega)$ を仮定する. このとき $\int_{\Omega} |\nabla(u \min\{|u|^s, L\})|^2 dx + \int_{\Omega} |u \min\{|u|^s, L\}|^2 dx$ を評価していくと次の不等式を得る:

$$\int_{\Omega} |\nabla(u \min\{|u|^s, L\})|^2 dx + \int_{\Omega} |u \min\{|u|^s, L\}|^2 dx \leq M \quad (\text{ただし, } M \text{ は } L \text{ に依存しない定数}) \quad (5)$$

(5) を用いると

$$\int_A |\nabla(|u|^{s+1})|^2 dx + \int_A (|u|^{s+1})^2 dx \leq M \quad (6)$$

(6) はすべての $L \geq 0$ に対して成立するので, $L \rightarrow \infty$ とすれば

$$|u|^{s+1} \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \quad (\text{ソボレフの埋め込みによる})$$

ゆえに, $u \in L^{\frac{2N}{N-2}(s+1)}(\Omega)$

$s_0 = 0, 2s_{i+1} + 2 = \frac{2N}{N-2}(s_i + 1) (i \geq 1)$ とすれば (「Moser iteration method」) $q < \infty$ に対して $u \in L^q(\Omega)$ となる. トレースソボレフの埋め込みから $u \in L^q(\partial\Omega) (q < \infty)$ となる.

4 謝辞

第 12 回城崎新人セミナーに参加させていただきありがとうございました. 運営委員の皆様には心より感謝申し上げます. 招待講演の先生方や他大学の参加者と交流することができてとても有意義な時間を過ごすことができました.

参考文献

- [1] H.Brezis and T.Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials* 137-151, J.Math.Pures Appl, 1979
- [2] 宮島静雄, ソボレフ空間の基礎と応用, 共立出版, 2006.
- [3] M.Struwe, *Variational Methods – Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamilton System –*, Springer, 1996.

非線形シュレディンガー方程式の定在波解の漸近安定性

山添 祥太郎 *

京都大学大学院 情報学研究科, 2015 年 2 月

1 導入

次のポテンシャル付き非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + V(x)u + \beta(|u|^2)u & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{NLS})$$

ここで $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_d}^2$ は Laplacian, $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数, $u_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は初期関数, $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ は未知関数である. (NLS) は物理学において様々な非線形波動現象を記述する際に現れる. 典型的な例としては, $\beta(s) = \lambda s$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) のとき, (NLS) は光ファイバー中の光波の伝播を表す方程式として広く用いられている. また, 量子力学においては Bose-Einstein 凝縮している粒子の時間発展を記述する方程式 (Gross-Pitaevskii 方程式) として知られている.

(NLS) を, Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R}^d)$ に値をとる連続関数の空間 $C(\mathbb{R}_t, H^1(\mathbb{R}_x^d))$ で考える. (NLS) の非自明な解であって $u(t, x) = e^{i\omega t} \phi_\omega(x)$ ($\phi_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d)$) と書かれるものを定在波解という. ここで $\omega > 0$ は実数のパラメータである. さらに, 定在波解のうち作用汎関数

$$S_\omega(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 + B(|u(x)|^2) + \omega|u(x)|^2) dx$$

を最小化するものを基底状態という. ただし $B(s) = \int_0^s \beta(s') ds'$ とおいた. V と β に関する適切な仮定のもとで, ω について滑らかな基底状態の族が存在することが知られている [1][6].

基底状態が存在するとき, その基底状態が “安定” かどうかという問題が自然に現れる. 安定な状態は, 物理的には実際に観測できる状態であると解釈できるので, 安定性の問題は数学的な興味のみならず物理的・工学的にも重要な意味を持つ. 安定性の概念の一つに軌道安定性と呼ばれるものがある. 基底状態 $e^{i\omega t} \phi_\omega$ が軌道安定であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して

$$\inf_{\gamma \in \mathbb{S}^1} \|u_0 - e^{i\gamma} \phi_\omega\|_{H^1} < \delta \Rightarrow \inf_{\gamma \in \mathbb{S}^1} \|u(t) - e^{i\gamma} \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon \quad (t > 0)$$

となることを言う. ここで, $u(t)$ は初期関数 u_0 に対する (NLS) の解である. 基底状態の軌道安定性については, 1980 年代以降, 盛んに研究されており [2][6], 特に $d \|\phi_\omega\|_{L^2}^2 / d\omega > 0$ が軌道安定性のための良い十分条件として知られている [10].

軌道安定性の研究からしばらくして, 基底状態に近い初期関数に対する (NLS) の解は $t \rightarrow \infty$ において基底状態と漸近自由な項との和のようにふるまうことが Soffer-Weinstein[8] により示され

*yamazoe@amp.i.kyoto-u.ac.jp

た. この意味での安定性を漸近安定性という. これは, 軌道安定性より精密な結果である. Soffer-Weinstein の結果では, 基底状態の周りでの線形化作用素の固有値の分布に対して制約があった. 最近になって, この制約は Cuccagna-Mizumachi[5], Cuccagna[3][4] などにより緩められ, 漸近安定性の成立のための一般的な条件が知られるようになった. ポスターセッションでは, Cuccagna[3] による漸近安定性の結果を発表者の研究経過を交えて紹介した.

2 主定理と証明の概略

Cuccagna[3] による漸近安定性の定理を述べ, その証明の概略を記す. 定理の主張を述べるにあたり, いくつかの仮定を置く.

(A) V と β に関する仮定

(A-1) $\beta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \beta(0) = 0$.

(A-2) ある $p \in (1, 5)$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とある $C_k > 0$ に対して

$$\left| \frac{d^k}{ds^k} \beta(s^2) \right| \leq C_k |s|^{p-k-1} \quad (|s| \geq 1)$$

が成り立つ.

(A-3) $V \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. また, すべての多重指数 $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^3$ に対して, ある $C_\alpha > 0, a_\alpha > 0$ が存在して $|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha e^{-a_\alpha |x|}$ が成り立つ.

(B) ある開区間 $\mathcal{O} \subset (0, \infty)$ と基底状態の族 $\{\phi_\omega\}_{\omega \in \mathcal{O}} \subset H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ が存在する. さらに, 写像 $\mathcal{O} \ni \omega \mapsto \phi_\omega \in H^1$ は C^1 級であって, すべての $\omega \in \mathcal{O}$ に対して $d \|\phi_\omega\|_{L^2}^2 / d\omega > 0$ が成り立つ. (軌道安定性の十分条件)

(C) 線形化作用素のスペクトルに関する仮定

(C-1) \mathcal{H}_ω を基底状態の周りの線形化作用素とする. 厳密な定義は定理 1 の証明の概略を参照. \mathcal{H}_ω の持つ対称性から, 0 は \mathcal{H}_ω の固有値であって, \mathcal{H}_ω の固有値は虚軸について対称に分布することが証明できる. \mathcal{H}_ω の固有値は有限個であって, すべて実数であると仮定する. 正の固有値を $\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_m(\omega)$ ($0 < \lambda_1(\omega) \leq \dots \leq \lambda_m(\omega) < \omega$), $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく. \mathcal{O} 上, 固有値の多重度は一定であると仮定する. さらに, 各 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して, ω に依らない $N_j \in \mathbb{N}$ が存在して

$$N_j \lambda_j(\omega) < \omega < (N_j + 1) \lambda_j(\omega)$$

がすべての $\omega \in \mathcal{O}$ に対して成り立つと仮定する. $N := N_1$ とおく.

(C-2) 多重指数 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{Z}^m$ が $|\mu| \leq 2N + 3$ を満たすならば, $\mu \cdot \lambda(\omega) \neq \omega$.

(C-3) 固有値の相異なる部分列 $(\lambda_{j_l}(\omega))_{l=1}^k \subset (\lambda_j(\omega))_{j=1}^m$, $\lambda_{j_1}(\omega) < \dots < \lambda_{j_k}(\omega)$ と $|\mu| \leq 2N + 3$ を満たす多重指数 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{Z}^k$ に対して

$$\mu_1 \lambda_{j_1}(\omega) + \dots + \mu_k \lambda_{j_k}(\omega) = 0 \iff \mu = 0$$

が成り立つ.

(C-4) $L_+ := -\Delta + V + \omega + \beta(\phi_\omega^2) + 2\beta'(\phi_\omega^2)\phi_\omega^2$ はただ 1 つの負の固有値を持ち, $\text{Ker } L_+ = \{0\}$.

(C-5) \mathcal{H}_ω は $0, \pm i\lambda_j$ ($j = 1, \dots, m$) 以外に固有値を持たない. また, $\pm\omega$ は \mathcal{H}_ω のレゾナンスではない. ここで, $\pm\omega$ が \mathcal{H}_ω のレゾナンスであるとは, ある $F \in \bigcap_{S>1/2} L^{2, -S} \setminus L^2$ が存在して, 方程式 $\mathcal{H}_\omega F = \pm\omega F$ が超関数の意味で満たされることをいう.

(D) Fermi の黄金律 (3) が成立.

定理 1 (Cuccagna[3]). $d \geq 3$ とし, (A)-(D) を仮定する. このとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\varepsilon := \inf_{\gamma \in \mathbb{S}^1} \|u_0 - e^{i\gamma} \phi_\omega\|_{H^1} < \varepsilon_0$ なる初期関数 $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, ある $\omega_\pm = \omega + O(\varepsilon)$, $\theta(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h_\pm = O(\varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - e^{i\theta(t)} \phi_{\omega_\pm} - e^{it\Delta} h_\pm\|_{H^1} = 0$$

が成り立つ.

注意 2. 上記の仮定についていくつかの補足を述べる.

- (B) の $\omega \mapsto \phi_\omega$ の滑らかさに関する仮定は, 多くの場合に実際に成り立つことが証明されている [7, Theorem 18].
- (C-2), (C-3) は非共鳴条件と呼ばれ, 定理 1 の証明において Birkhoff の定理を適用する際に本質的に用いられる.
- (C-4) について, L_+ が唯一つの負固有値を持つという条件は, 線形安定な束縛状態 (bound state) が基底状態のみしかないことを意味している. L_+ が二つ以上の負固有値を持つ場合については Tsai[9] による結果が知られている.
- (C-4) について, $\text{Ker } L_+ = \{0\}$ の仮定は (NLS) が並進対称性を持たないことに関係している. $V \equiv 0$ の場合にはこの仮定は満たされず, 移動する基底状態が現れる. この場合にも定理 1 に対応する結果が成り立つことが, 最近, Cuccagna[4] によって証明された.

証明の概略. 証明には Hamilton 系の理論が用いられる. 証明は大きく 4 つのパートに分かれる. 証明の第 1 段では, (NLS) の解 u とその複素共役 \bar{u} をペアにして, (NLS) を次の発展方程式系と見なす.

$$i\partial_t U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (-\Delta U + V(x)U + \beta(|U|^2)U). \quad (\text{NLS-2})$$

ここで $U := (u, \bar{u})^T$ と置いた. これは

$$H(u) := \int_{\mathbb{R}^3} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2 + B(|u|^2)) \, dx$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系である. 次に, (NLS-2) を基底状態 $\Phi_\omega := (\phi_\omega, \phi_\omega)^T$ の周りで線形化する. 線形化作用素 \mathcal{H}_ω は

$$\mathcal{H}_\omega := (-\Delta + V + \omega + \beta(\phi_\omega^2) + \beta'(\phi_\omega^2)\phi_\omega^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta'(\phi_\omega^2)\phi_\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と表される.

第 2 段では, \mathcal{H}_ω のスペクトル分解を用いて (NLS-2) の解の空間に座標を入れる. まず $\omega_0 > 0$ を $\|\phi_{\omega_0}\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ となるように取り固定する. 仮定 (B) より, $\varepsilon_0 > 0$ を十分小さく選ぶと, このような ω_0 はただ一つ存在することが分かる. 仮定 (C-1) より, \mathcal{H}_ω のスペクトルは

$$\sigma(\mathcal{H}_\omega) = \{0, \pm\lambda_1(\omega), \dots, \pm\lambda_m(\omega)\} \cup \sigma_c(\mathcal{H}_\omega), \quad \sigma_c(\mathcal{H}_\omega) = (-\infty, -\omega] \cup [\omega, \infty)$$

と表される. また, 仮定 (B) を用いれば, 固有値 0 は非単純であって, その Jordan chain の長さは 2 であることが証明できる. 従って, $L^2(\mathbb{R}^d)$ を \mathcal{H}_ω の連続スペクトル成分へ射影した空間を $L_c^2(\omega)$ と書くと,

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \text{gKer}(\mathcal{H}_\omega) \oplus \left(\bigoplus_{\pm} \bigoplus_{j=1}^m \text{Ker}(\mathcal{H}_\omega \mp \lambda_j) \right) \oplus L_c^2(\omega)$$

なる分解を得る. これを用いて, (NLS-2) の解 $U(t)$ を

$$U(t) = \exp \left(i\theta(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \left(\Phi_{\omega(t)} + \sum_{j=1}^m \left(z_j(t)\xi_j + \bar{z}_j(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_j \right) + P_c(\omega(t))f(t) \right) \quad (1)$$

と分解する. ここで, ξ_j は λ_j の固有関数, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_j$ は $-\lambda_j$ の固有関数, $f(t) \in L_c^2(\omega_0)$ である. また, $\omega(t), \theta(t)$ はある実数値関数であって, (1) において $\text{gKer}(\mathcal{H}_\omega)$ の項が現れないという条件から定められる. 基底状態の近傍における $\omega(t), \theta(t)$ の一意存在は陰関数定理によって保障されている. さらに, $P_c(\omega)$ は L^2 から $L_c^2(\omega)$ への射影作用素であって, ω と ω_0 が十分近いとき, $P_c(\omega)$ は $L_c^2(\omega_0)$ から $L_c^2(\omega)$ への同型写像となる. (1) により, $\omega(t), z_j(t), f(t)$ の漸近挙動について次の 3 つの主張が示されれば, 定理の証明が完了する.

- (i) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \omega(t) = \omega_{\pm}$.
- (ii) $t \rightarrow \pm\infty$ のとき, $f(t)$ はある自由 Schrödinger 方程式の解に漸近する.
- (iii) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z(t) = 0$.

(i) は (iii) の系として得られるので, (ii) および (iii) の証明が目標である.

第 3 段では, 第 2 段で得られた座標系 (θ, ω, z_j, f) に対し座標変換を施し, Hamiltonian を扱いやすい形に変換する. このステップは 2 つの段階からなる. まず, Darboux の定理を用いて基底状態のある近傍で正準共役な座標変数を得る. 次に, 得られた正準共役な座標に対して Birkhoff の定理を適用する. これは, Hamiltonian が次の 3 つの項の和で表されるような正準変換の存在を主張するものである.

- Birkhoff 標準形と呼ばれる, z_1, \dots, z_m に関するある多項式
- f について 2 次の項
- z, f について十分次数の高い剰余項

第 4 段で (ii) と (iii) を証明する. (ii) は Strichartz 評価を用いる良く知られた手法で示される. (iii) を示すのが問題である. 第 3 段で得られた Hamiltonian の標準形の表示を用いると, $z(t) := (z_1(t), \dots, z_m(t))$ について閉じた, 次の微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^m \lambda_j(\omega_0) |z_j(t)|^2 = -2 \sum_{r > \omega_0} r \Im \left\langle R_{\mathcal{H}_{\omega_0}}^+(r) G(z), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} G(z) \right\rangle_{L^2} + (\text{higher order terms}). \quad (2)$$

ここで, $R_{\mathcal{H}_{\omega_0}}^+(r) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\mathcal{H}_{\omega_0} - r)^{-1}$ はレゾルベントの境界値, $G(z) := \sum_{\lambda(\omega_0) \cdot \alpha = r} z^\alpha G_\alpha$, $\lambda(\omega_0) := (\lambda_1(\omega_0), \dots, \lambda_m(\omega_0))$ であって, G_α は Hamiltonian の Birkhoff 標準形に現れる \mathbb{C}^2 -値の関数である. また, (2) の r についての和は ω_0 と N に依存して決まるある有限集合をわたる. ここで, (2) の右辺について, ある正の定数 Γ が存在して次の不等式が成立することを仮定する.

$$\sum_{r > \omega_0} r \Im \left\langle R_{\mathcal{H}_{\omega_0}}^+(r) G(z), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} G(z) \right\rangle_{L^2} \geq \Gamma \sum_{\lambda(\omega_0) \cdot \alpha > \omega_0} |z^\alpha|^2. \quad (3)$$

この不等式を Fermi の黄金律と呼ぶ。この仮定のもとで、(2) より $z_j(t)$ の $t \rightarrow +\infty$ における減衰が従う。(NLS) の時間反転に関する対称性から $t \rightarrow -\infty$ における減衰も示される。以上により定理が示された。□

注意 3. Fermi の黄金律 (D) は generic には成立することが知られている [3, Remark 10.6][4, Remark 13.13] が、具体的にどのような場合に成立するのかは、発表者の知る限りまだよく分かっていないようである。 \mathcal{H}_ω の正の固有値がすべて単純なとき、(3) は見かけ上より弱い条件

$$\Im \left\langle R_{\mathcal{H}_\omega}^+(r)G(z), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} G(z) \right\rangle_{L^2} > 0 \quad (z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\})$$

と同値である。この条件は $\text{supp } G_1$ ($G = (G_1, G_2)^T$) が $\pm\sqrt{r-\omega_0}$ を含むかどうかに関係していることが最近の計算で分かった。

参考文献

- [1] H. Berestycki and P. L. Lions, Nonlinear scalar field equations I - Existence of a ground state, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **82** (1983), 313-345.
- [2] T. Cazenave and P. L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), 549-561.
- [3] S. Cuccagna, The Hamiltonian Structure of the Nonlinear Schrödinger Equation and the Asymptotic Stability of its Ground States, *Comm. Math. Phys.* **305** (2011), 279-331.
- [4] S. Cuccagna, On asymptotic stability of moving ground states of the nonlinear Schrödinger equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), 2827-2888.
- [5] S. Cuccagna and T. Mizumachi, On Asymptotic Stability in Energy Space of Ground States for Nonlinear Schrödinger Equations, *Comm. Math. Phys.* **284** (2008), 51-77.
- [6] H. A. Rose and M. I. Weinstein, On the bound states of the nonlinear Schrödinger equation with a linear potential, *Physica. D* **30** (1988), 207-218.
- [7] J. Shatah and W. Strauss, Instability of Nonlinear Bound States, *Comm. Math. Phys.* **100** (1985), 173-190.
- [8] A. Soffer and M. I. Weinstein, Multichannel Nonlinear Scattering for Nonintegrable Equations, *Comm. Math. Phys.* **133** (1990), 119-146.
- [9] Tai-Peng Tsai, Asymptotic dynamics of nonlinear Schrödinger equations with many bound states, *J. Diff. Eqns.* **192** (2003), 225-282.
- [10] M. I. Weinstein, Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), 51-68.

Noether problem for some groups

横田真秀*

京都大学理学研究科数学教室, 2014年2月

本講演では、Noether problem (以下 NP) と呼ばれる問題についての部分的な結果を述べる。

1 NP とは

はじめに、NP とはどのような問題であるかを説明する。 K を体、 G を有限群とし、 n を G の位数とする。 K 上 n 変数の有理関数体 $K(x_g)$ を考えると、この体には変数を置換する形で自然に G が作用する。ここで $K(x_g)$ の G -不変体を取り、これを $K(G)$ で表す。

例 1.1. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ であるとき、 $\sigma : x_1 \mapsto x_\sigma \mapsto x_1$ であるから $K(G)$ の元は 2 変数の入れ替えで不変な 2 変数有理式、すなわち対称式である。したがって $K(G) = K(x_1 + x_\sigma, x_1 x_\sigma)$ と明示的に表される。(Gal($K(x_1, x_\sigma)/K(G)$) $\cong G$ を確かめることは容易である。)

先の例では $K(G)$ を具体的に書き下すことができたが、 G が少し大きくなると $K(G)$ を具体的に書き下すことは一般には難しい。そこで、 $K(G)$ は K 上有理的 (純超越的) か? というのを考える。これが Permutation Noether Problem (以下 PNP) と呼ばれるものである。

先の例では、具体的に $K(G)$ を K に 2 元を添加した形で書けたので、 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対応する PNP は K によらず肯定的である、ということになる。

この問いの答えは G の性質のみならず K の性質にも依存し、一般に K が広い (十分に根を持つ) ほど、多くの G に対して肯定的な結果を持つ。また、現時点で「 $\bar{K}(G)$ は \bar{K} 上有理的であるが $K(G)$ は K 上有理的でない」を満たす G の例や、「任意の K に対して $K(G)$ が K 上有理的でない」を満たす G の例が見つかっている。ただし、私は G の性質と結果との対応を見たいため、以降では K は非常に良いものであるとの仮定をおく。具体的には標数を 2, 3 でないとし、 e を G の exponent とするとき、1 の原始 e 乗根は K に含まれているとする (このくらいの仮定を置けば、今のところ、実質的に K が代数閉体である場合と同様であると考えられる。)

なお、単に NP といった場合、より一般に、群の作用が単なる変数の置換でない場合も含むことがあり、群 G が $K(x_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ に対し

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^m (\rho(g))_{i,j} x_j$$

の形で作用する Linear NP、同様に G が $K(x_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ に対し

$$g(x_i) = c_{g,i,j} \prod_{j=1}^m (\rho(g))_{i,j} x_j$$

の形で作用する monomial NP などがあり、それらの間には密接な関係があるが、本セッションの対象としては主に PNP を考え、以降単に NP といった場合は PNP を指すとする。

*maho-y@math.kyoto-u.ac.jp

2 準備・主定理

NP を考えるにあたり、重要な定理が以下のものである。

定理 2.1. ρ を G の忠実表現とする。 ρ に対応する Linear NP が肯定的ならば、 G に対する NP も肯定的である。

一般に忠実表現をうまくとればその次数は n よりもはるかに小さくできるので、この theorem は非常に有用である。

まず、この theorem を使うことで、 G が Abel 群である場合については対応する NP はほぼ自明に肯定的な結果が得られることが確認される (忠実表現 ρ が必ず 1 次既約表現の直和と同値であるから)。この結果を受けて、感覚的に「 G の構造が Abel 群に近い、つまり G の非可換性が弱ければ、 $K(G)$ の有理性を示すのは易しいのではないか。」という予想が立つ。ここで非可換性が弱いという性質を数学的にどう表すかが問題になるが、先の theorem もあるので今回は「忠実表現の次数」を非可換性を測る指標として採用する。一つ一つの既約表現因子が小さい群ほど与しやすいであろう、という考え方である。

この方向からのアプローチに関しての一つの大きな結果が、次に記す Kang 氏らの結果である。

定理 2.2. G が 3 次以下の忠実表現 ρ を持つならば、対応する NP は肯定的である。

また Kang 氏は G を 2-群に限定した場合の結果として、より強い以下の定理を証明している。

定理 2.3. G が 2-群であり 5 次以下の忠実表現 ρ を持つならば、対応する NP は肯定的である。

Theorem?? を一般化しようというのが私の試みである。具体的には、 G の忠実表現として 3 次以下の表現の代わりに 3 次以下の表現の直和まで認めて同様のことが言えないか、というものである。直和になってもほぼ同じ方針で有理性が証明できるのではないか、という素朴な直感もあるだろうが、実際には表現が直和の形になっているからといってそれぞれの表現に対して不変体を求めてその結果をうまくくっつければいい、というわけにはいかないため、先の定理の証明をなぞってもうまくいかない。それに関する私の結果の一つが以下のものである。

定理 2.4. G が 3 次以下の表現の直和の形の忠実表現 ρ を持ち、 G の位数偶数の元が全て ρ で対角行列に移るならば、対応する NP は肯定的である。

以降ではこの theorem の証明の概略を記す。

3 主定理の証明の概略

主定理を証明するにあたり、まず、「 G が具体的に 1 つ与えられ、その有理性を証明せよとなったとき、どう証明するか」という手順を明確にしよう。

その手順は、忠実表現の次数等によらず、およそ以下のようなものである。

1. 忠実表現 ρ をうまくとる。
2. $H \triangleleft G$ をうまくとる。
3. $K(y_i) = K(x_i)^H$ となるような y_i をとる。
4. $K(u_i) = K(y_i)$ を満たし、 G/H の u_i への作用が簡単な形で表されるような u_i をうまくとる。
5. G に G/H を、 x_i に u_i を代入する。

6. 問題が十分簡単な場合 (有理性が既に示されている場合) に帰着されていれば証明完了。そうでなければ 2. に戻る。

手順 2~5 を経るたびに G の位数は小さくなっていくから、この手順が止まりさえしなければ有理性の証明ができることになる。ところが手順 1,2,4 の「うまくとる」と書いた部分には障害があり、これは好き勝手にとるわけにはいかない。すなわち、手順 2 で都合の悪い正規部分群を選んでしまったために手順 4 で u_i をうまくとれない、ということが起こりえる。通常 G が与えられているときはその構造を参考にしつつ経験則に基づいて H を選び、試行錯誤的に証明を考えるのであるが、この選び方として「証明手順が止まらない一般的な選び方」があるのではないか、という考え方が、証明の根本である。

まず先の証明手順で述べた 2.~6. の 1 周を「簡約化手順」と呼ぶ。そして、簡約化手順の列 $\{R_i\}_{i=1}^n$ と群・表現の性質の列 $\{P_i\}_{i=1}^m$ で以下を満たすものをとる。

- (i) 証明開始時点で任意の (G, ρ) は P_1 を満たす。
- (ii) P_i を満たす (G, ρ) に R_i が行える場合、それを行って得られる新しい (G, ρ) も P_i を満たす。
- (iii) P_i を満たす (G, ρ) に R_i がそれ以上行えない場合、 (G, ρ) は P_{i+1} を満たす。 ($1 \leq i \leq m-1$)
- (iv) P_m を満たす (G, ρ) で R_m の簡約化手順が行えないものは、定理の仮定の下では自明なもののみである。

このリストが作られれば (このリストを作るのが証明の山であり、発想自体は別段突飛でないといえよう。)、それはすなわち任意の群に対し有理性を示す方法を示したことになる。そしてそれは実際に可能である (具体的には論文を参照のこと。)

4 今後の課題

この定理は 3-群に関する主張「 G が 3-群であり、忠実表現として 3 次以下 (1 次または 3 次) の表現の直和であるようなものがとれるならば対応する NP は肯定的である。」を含んでいる。そして証明の流れを見ると、これは p -群に一般化できるだろうという予想、すなわち、 p -群に対しその忠実表現として p 次以下 (1 次または p 次) の表現の直和であるようなものがとれるならば対応する NP は肯定的であろうという予想が自然に立つ。

ただし実際に証明を試みると簡約化手順のリストを作るのが $p=3$ のとき以外は難しく、より一般的な手法の発見が求められるところである。

また、主定理の仮定の後半部分を外せないだろうか? という考えも自然であるが、これについてもまだ証明できていない。(同様の方法で $\{P_i\}_{i=1}^m$ の列を改善するだけで証明するのは困難であるように思われる。)

参考文献

- [1] [AHK1] H. Ahmad, M. Hajja, M. Kang, Rationality of some projective linear actions, J. Algebra 228 (2000) 643–658.
- [2] [BB1] Fedor Bogomolov, Christian Böhning, Isoclinism and stable cohomology of wreath products

- [3] [CHK1] Huah Chu, Shou-Jen Hu, Ming-chang Kang, Y.G. Prokhorov, Noether ' s problem for groups of order 32
- [4] [CHKK1] Huah Chu, Shou-Jen Hu, Ming-chang Kang, Boris E. Kunyavskii, Noether ' s Problem and the Unramified Brauer Group for Groups of Order 64
- [5] [H1] M. Hajja, Rationality of finite groups of monomial automorphisms of $K(x,y)$, J. Algebra 109 (1987) 46–51.
- [6] [HK1] M. Hajja, M. Kang, Finite group actions on rational function fields, J. Algebra 149 (1992) 139–154.
- [7] [HK2] M. Hajja, M. Kang, Three-dimensional purely monomial group actions, J. Algebra 170 (1994) 805–860.
- [8] [HK3] M. Hajja, M. Kang, Some actions of symmetric groups, J. Algebra 177 (1995) 511–535.
- [9] [HKK1] Akinari Hoshi, Ming-chang Kang, Boris E. Kunyavskii, Noether's Problem and Unramified Brauer Groups
- [10] [HKK2] A. Hoshi, M. Kang, H. Kitayama, Quasi-monomial actions and some 4-dimensional rationality problems
- [11] [HR1] A. Hoshi, Y. Rikuna, Rationality problem of three-dimensional purely monomial group actions
- [12] [Ka1] M. Kang, Noether ' s problem for dihedral 2-groups II, Pacific J. Math. 222 (2005) 301–316.
- [13] [Ka2] M. Kang, Rationality problem for some meta-abelian groups, J. Algebra 322 (2009) 1214-1219
- [14] [KMZ1] Ming-chang Kang, Ivo M. Michailov, Jian Zhou, Noether's problem for the groups with a cyclic subgroup of index 4
- [15] [KP1] M. Kang, B. Plans, Reduction theorems for Noether ' s problem
- [16] [Sa1] Saltman D. J., Noether ' s problem over an algebraically closed field
- [17] [Se1] J.P. Serre, Linear Representations of Finite Groups
- [18] [Ya1] Aiichi Yamasaki, Isoclinism Families of Groups of Order 256, Munuscript in preperation