

結び目理論から生まれたゲームとその仲間達

清水理佳*

広島大学大学院理学研究科

概要

結び目理論から生まれたゲーム、領域選択ゲームの背景や関連ゲーム等について解説する。領域選択ゲームおよび領域点灯ゲームは、河内明夫教授、岸本健吾氏との joint work である。

1 領域交差交換

結び目図式とは、 S^3 内の結び目を S^2 に射影して各交点に上下の情報を与えたものである。上下の情報が与えられた交点を交差点と呼ぶ。結び目図式 D をある交差点 c で交差交換するとは、 c の上下の情報を入れ替えることである。結び目図式によって分割された S^2 のそれぞれの部分を領域という。結び目図式 D を領域 R で領域交差交換するとは、図 1 のように R の境界上の全ての交差点で一斉に交差交換することである。任意の結び目図式の任意の交差点における交差交換が、有限回の領域交差交換によって実現できるというこ



図 1: 領域交差交換

とが [6] で示されている。(絡み目図式においてこのことが成り立つための必要十分条件は、2 成分絡み目については [3] で、 n 成分については [2] で示されている。) 任意の結び目図式は、有限回の交差交換によってほどけた結び目を表す図式に変形できるということが知られている。すなわち、結び目図式における交差交換は結び目解消操作である。任意の交差交換は領域交差交換で実現できるから、結び目図式における領域交差交換も結び目解消操作である (図 2 参照)。与えられた結び目図式から、ほどけた結び目の図式を得るために必要な



図 2: 結び目解消操作

交差交換 (あるいは領域交差交換) の最小回数を、結び目解消数 (あるいは領域結び目解消数) という。結び目解消数は古くから現在に至るまで活発に研究されており、領域結び目解消数についても交点数との関係等が研究され始めている ([4], [6]).

*shimizu1984@gmail.com

2 領域選択ゲーム

この章では前章の結果を応用して出来たゲーム、領域選択ゲームについて解説する。(領域選択ゲームは河内明夫教授、岸本健吾氏との共同発明であり、大阪市立大学から特許出願中である。) 図3のように、結び目射影図の各交点に、ON/OFFの状態をもつランプを置く。これをランプ付き結び目射影図と呼ぶ。ランプ付き結び目射影図において、領域を選択するとその境界上のランプのON/OFFが切り替わるような仕組みを考える。領域選択ゲームとは、図3のように、与えられたランプ付き結び目射影図に対して領域を選択していき、全てのランプを点灯させることをゴールとするゲームである。前章の結果から、任意のランプにおいて、有限回の領域の選択によってON/OFFを切り替えられるということがわかる。よって、領域選択ゲームとは、任意のランプ付き結び目射影図に対して必ずクリアできるゲームである。(絡み目射影図では、ホップの絡み目の標準射影図でランプが片方だけ点灯しているもの等、クリアできないものもある。) 結び目射影図の交点(ま

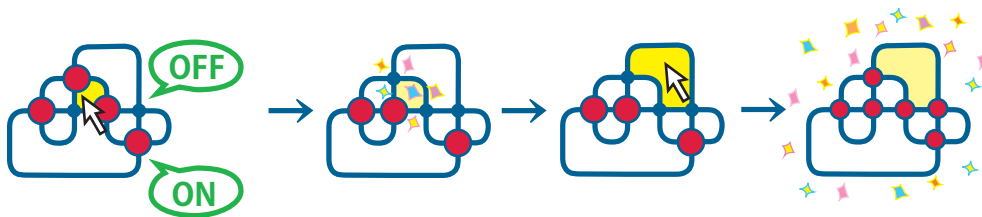


図3: 領域選択ゲーム

たは結び目図式の交差点) がちょうど3つの領域に囲まれているとき、その交点は可約な交点(または可約な交差点)であるという。可約な交点を持つ結び目射影図を可約な結び目射影図といい、可約な交点を持たない射影図を既約な射影図という(結び目図式についても同様)。言い換えると、既約な結び目射影図とはどの交点もちょうど4つの領域に囲まれているような射影図のことである。例えば、図1において、 D は既約な結び目図式、 E は可約な結び目図式である。 n 個の交差点を持つ既約な結び目図式において、任意のいくつかの交差点を、 $(n/2 + 1)$ 回以下の領域交差交換で交差交換できる([6])。よって n 個の交差点を持つ既約な結び目射影図を用いた領域選択ゲームは $(n/2 + 1)$ 以下の手数でゲームをクリアできる。具体的に与えられたランプ付き結び目射影図に対しては、incidence 行列という行列([3])を用いてゲームの解(領域)を決定する方法もある。また、図形的な攻略法もある。これらについては河内明夫教授、岸本健吾氏と著者の共著の本[7]で詳しく紹介している。領域選択ゲームは *Region Select* という名前でスマートフォンのアプリにもなっている。また、大阪市立大学数学研究所のホームページ[10]でも公開している。

3 関連したゲーム

領域選択ゲームに関連したゲームを紹介する。

3.1 領域点灯ゲーム

まず、領域選択ゲームの双対版である領域点灯ゲームを紹介する。結び目射影図を4価の平面グラフと見て、図4のように双対グラフを用意する。結び目射影図の領域は双対グラフの頂点に対応し、辺は辺に、交点は領域に対応しているから、双対グラフにおいて頂点を選択するとその周りの領域の点灯状態が切り替わるという仕組みになる。領域点灯ゲームとは、図5のように結び目射影図の双対グラフで領域が適当に点灯・消灯している状態に対して、頂点を選択していき全ての領域を点灯させるゲームである。

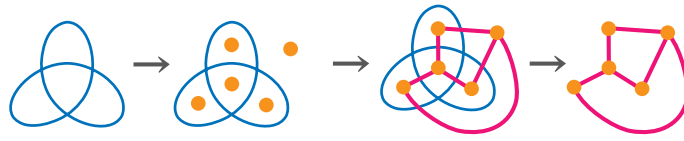


図 4: 双対グラフの作り方

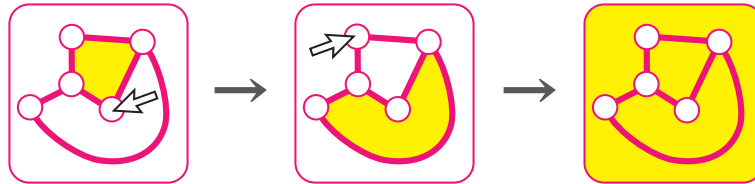
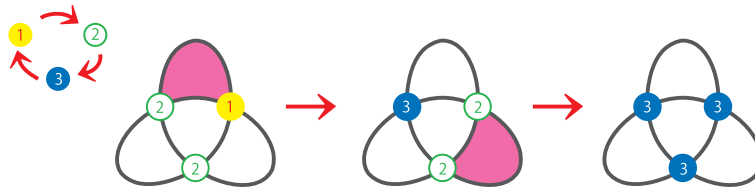


図 5: 領域点灯ゲーム

3.2 n 色の領域選択ゲーム

領域選択ゲームでは, ランプが ON/OFF の状態を持っていた. その後 Ahara, Suzuki によって n 色の状態を持つランプを用いても, 必ずクリアできるということが示された ([1]). つまり, 与えられた n 色ランプ付き結び目射影図の領域を選択していき, 巡回して色が変わるランプを全て同じ色に (あるいは指定された色に) することができる (図 6).

図 6: n 色の領域選択ゲーム

3.3 整数の領域選択ゲーム

さらに, 整数ランプを用いても必ずクリアできるということも [1] で Ahara, Suzuki によって示されている. 各ランプが整数の値を持った結び目射影図に対し, 領域を選び「-5 を作用させる (境界上の全てのランプに-5 を足す)», 「3 を作用させる」, といった具合に足し算をしていき, 全てのランプを 0 にしたらゲーム終了である. この他にも, 松本知子氏によって提案された弧選択ゲーム ([9]) 等, 様々な関連ゲームが生まれている. また, 領域選択ゲームを用いたスイッチングシステムが河内明夫教授, 岸本健吾氏と著者によって共同発明され, 特許出願中である. 領域選択ゲームの, 幼児の図形認識力に与える影響についても研究が始まったところである.

謝辞

第 10 回城崎新人セミナーに招待していただき, また大変お世話になりました運営委員の皆様, 特に畑中美帆さんに心より感謝いたします. 参加者の皆様とは色々なお話ができて, とても楽しく充実した時間を過ごさせていただきました.

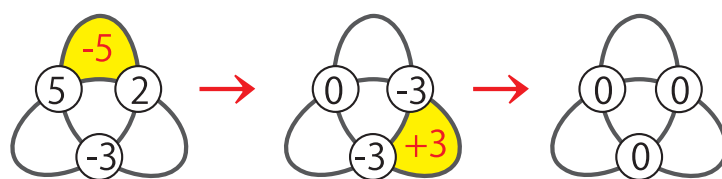


図 7: 整数の領域選択ゲーム

参考文献

- [1] K. Ahara and M. Suzuki, *An integral region choice problem on knot projection*, J. Knot Theory Ramifications **21**, 1250119 (2012).
- [2] Z. Cheng, *When region crossing change an unknotting operation?*, preprint (<http://arxiv.org/abs/1201.1735>).
- [3] Z. Cheng and H. Gao, *On region crossing change and incidence matrix*, Science China Math, **55** (2012), 1487–1495.
- [4] S. Vikash and P. Madeti, *A sharp upper bound for region unknotting number of torus knots*, preprint (<http://arxiv.org/abs/1211.6909>).
- [5] A. Shimizu, *A game based on knot theory*, Asia Pacific Mathematics Newsletter, **2** (2012), 22–23.
- [6] A. Shimizu: *Region crossing change is an unknotting operation*, to appear in J. Math. Soc. Japan (<http://arxiv.org/abs/1011.6304>).
- [7] 河内明夫, 岸本健吾, 清水理佳, 結び目理論とゲーム, 朝倉書店 (出版予定).
- [8] 清水理佳, 結び目理論をゲームに応用する, 数学通信 第 17 巻 第 1 号 (2012), 6–10.
- [9] 松本知子, 結び目理論によるパズル解析, 平成 23 年度山口大学理学部数理科学科卒業論文, <http://www.skaji.org/lectures/undergraduate>
- [10] 領域選択ゲーム, <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/news/gamehp/gametop.html>
- [11] 領域選択ゲーム (こどもよう), <http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/news/gamehp/c3game/game3/top.html>