和歌山大学教育学部

2011年度 離散数学 (後期火曜3限)
補足資料

目 次

この補足資料について **2**

1 線形代数学から. **3**

1.1 双対空間と複素共役空間. 3

1.2 商 vector 空間. 11

1.3 tensor 積. 19

この補足資料について

これは, 2011 年度和歌山大学教育学部で開講される「離散数学」の講義を進める際に, 講義内容の前提となるべき内容であるが, それを講義資料の中にまとめるには難しすぎるもの, あるいは, 予め学習している必要があり, 改めて講義資料にまとめると必要以上に量が膨大となるものを, 別にまとめたものである. 言うなれば, 「講義資料」が教科書のようなものと考えると, 「補足資料」はその付録, あるいは補遺として書かれるものである. 従って, 講義資料のように, 例や問はほとんど用意していない. 「補足資料」の内容は, 講義では「講義資料」の内容と比べてそれほど丁寧には説明しない予定であるので, 「講義資料」に加えてこの内容まで完全に理解するのはなかなか大変かもしれないが, 余力のある人は, 是非自分で手を動かして理解を目指してほしい.

都合により, この補足資料も講義と同時進行で作成していく予定である. 新たに原稿を付け加える場合には, 講義時に連絡する予定である. また, 原稿が更新されるごとに目次も更新されるので, 必要に応じて表紙を差し替えてもらえると幸いである.

これも都合により, 本文中にほとんど図を載せない予定である. また, ページ数の具合により, 随所に余白を挿入する予定である. 講義時に板書等で与えた図等をその余白に書き込むのもよいであろう.

なお, この補足資料の最新版を以下の Web ページにて公開する予定である.

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kikuchi/parttime/wakayama2011/dis/2011dis.html

最終版は 2012 年 1 月末か 2 月初めに完成する予定である.

1　線形代数学から.

1.1　双対空間と複素共役空間.

ここでは, 複素 vector 空間の双対空間と, 複素共役空間を定義する.

V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. このとき, V 上の線形写像 $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ を V 上の**線形形式**と呼ぶ. V 上の線形形式 f, g および $a \in \mathbb{C}$ について, 和 $f + g$, scalar 倍 af を次で定義する.

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (af)(v) = a(f(v)),\ v \in V.$$

すると, $f + g$, af はいずれも V 上の線形形式になる. いま, V 上の線形空間全体のなす集合を V^* で表すとする. このとき, V^* はこの加法と scalar により $\mathbb{C}$ 上の vector 空間になる. さらに, V が有限次元であるときは, V^* はより良い性質をもつ.

定理 1.1 V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間とし, V^* を V 上の線形空間全体のなす $\mathbb{C}$ の vector 空間とする. このとき, V^* も有限次元であり, $\dim V^* = \dim V$ が成り立つ.

証明. $V = \{0\}$ のときは, $f \in V^*$ とするとき, V の元は $v = 0$ しか存在しないから, $f(v) = f(0) = 0 = 0(v)$ となる. よって, $V^* = \{0\}$ となり, $\dim V^* = 0 = \dim V$ である. そこで, $V \neq \{0\}$ とし, $n = \dim V$ とする. いま, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ を V の基底とする. このとき, $f_j : V \longrightarrow \mathbb{C}\ (1 \leq j \leq n)$ を次で定義する.

$$f_j(v) = x_j, \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \in V.$$

これが V 上の線形形式であることを示す. いま, $w = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k \in V$, $a \in \mathbb{C}$ とする. すると, $v + w = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) v_k$, $av = \sum_{k=1}^{n} (a x_k) v_k$ であるから, 次が得られる.

$$f_j(v+w) = x_j + y_j = f_j(v) + f_j(w), \quad f_j(av) = a x_j = a f_j(v).$$

ゆえに, f_j は V 上の線形形式である. 特に, $f_j(v_k) = \delta_{j,k}\ (1 \leq j, k \leq n)$ である. そこで, $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V^*$ が V^* の基底であることを示す. いま, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ とし, $\sum_{j=1}^{n} a_j f_j = 0$ であるとする. すると, $1 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k について, 次が成り立つ.

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j \right) (v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_j (f_j(v_k)) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{j,k} = a_k.$$

従って, $f_1, \ldots, f_n$ は線形独立である. 次に, V 上の任意の線形形式 $f \in V^*$ が $f_1, \ldots, f_n$ の線形結合で表されることを示す. $1 \leq j \leq n$ なる任意の整数 j について, $c_j = f(v_j) \in \mathbb{C}$ とする. ここで, $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ とする. このとき, 任意の $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k v_k \in V$ について, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j \left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j x_k f_j(v_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j x_k \delta_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k f(v_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k \right) = f(x).
\end{aligned}
$$

ゆえに, $f = g$ が成り立つ. 従って, V^* の任意の元は $f_1, \ldots, f_n$ の線形結合で表されることが分かる.

以上により, $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V^*$ は V^* の基底であることが分かる. 従って, $\dim V^* = n = \dim V$ である. ■

定義 1.2 V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. このとき, V 上の線形形式全体のなす vector 空間 V^* を V の**双対 vector 空間**, あるいは単に**双対空間**と呼ぶ. さらに, V が有限次元で, $\dim V = n$ とし, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ を V の基底とするとき, $f_j(v_k) = \delta_{j,k}$ $(1 \leq j, k \leq n)$ なる V^* の基底 $\{f_1 \ldots, f_n\} \subset V^*$ を $\{v_1, \ldots, v_n\}$ の**双対基底**と呼ぶ.

2 つの vector 空間の間の線形写像があるとき, それらの双対空間の間の線形写像が自然に定義される.

定理 1.3 V, W を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする. このとき, 任意の $g \in W^*$ に対して, $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ を次のように定義する.

$$
f = g \circ F. \tag{1.1}
$$

このとき, $f \in V^*$ であり, ${}^tF : W^* \longrightarrow V^*$ を ${}^tF(g) = f = g \circ F$ とすると, ${}^tF$ は線形写像である.

証明. $x, x' \in V$, $c \in \mathbb{C}$ とする. すると, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
f(x + x') &= (g \circ F)(x + x') = g(F(x + x')) = g(F(x) + F(x')) \\
&= g(F(x)) + g(F(x')) = (g \circ F)(x) + (g \circ F)(x') = f(x) + f(x'), \\
f(cx) &= (g \circ F)(cx) = g(F(cx)) = g(c(F(x))) \\
&= c(g(F(x))) = c((g \circ F)(x)) = c(f(x)).
\end{aligned}
$$

よって, f は V 上の線形形式である.

次に, ${}^tF : W^* \longrightarrow V^*$ が線形写像であることを示す. いま, $g, g' \in W^*$, $a \in \mathbb{C}$ とする. このとき, $x \in V$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}({}^tF(g+g'))(x) &= ((g+g')\circ F)(x) = (g+g')(F(x)) = g(F(x)) + g'(F(x)) \\ &= (g\circ F)(x) + (g'\circ F)(x) = ({}^tF(g))(x) + ({}^tF(g'))(x) \\ &= ({}^tF(g) + {}^tF(g'))(x), \\ ({}^tF(ag))(x) &= ((ag)\circ F)(x) = (ag)(F(x)) = a(g(F(x))) \\ &= a((g\circ F)(x)) = a({}^tF(g)(x)) \\ &= (a{}^tF(g))(x).\end{aligned}$$

ゆえに, ${}^tF(g+g') = {}^tF(g) + {}^tF(g')$, ${}^tF(ag) = a{}^tF(g)$ となり, ${}^tF$ が線形写像であることが分かる. ■

定義 1.4 定理 1.3 における ${}^tF : W^* \longrightarrow V^*$ を $F : V \longrightarrow W$ の**双対写像**と呼ぶ.

V, W がともに有限次元であるときは, F の表現行列と, ${}^tF$ の表現行列には, 著しい関係がある.

定理 1.5 V, W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim V = n$, $\dim W = m\,(m, n > 0)$ とし, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ をそれぞれ V, W の基底, $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V^*$, $\{g_1, \ldots, g_m\} \subset W^*$ をそれぞれ $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ の双対基底とする. いま, $F : V \longrightarrow W$ を線形写像, A を $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ に関する F の表現行列とし, B を F の双対写像 ${}^tF : W^* \longrightarrow V^*$ の $\{g_1, \ldots, g_m\}$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ に関する表現行列とする. このとき, B は A の転置行列 ${}^tA$ と一致する.

<u>証明</u>. $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n}\end{pmatrix}$ とする. すると, $1 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k について, $F(v_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^m a_{j,k}w_j$ となる. また, $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m}\end{pmatrix}$ とすると, $1 \leq j \leq m$ なる任意の整数 j について, ${}^tF(g_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^n b_{k,j}f_k$ となる. よって, 次が得られる.

$$\begin{aligned}b_{k,j} &= \sum_{l=1}^n b_{l,j}\delta_{l,k} = \sum_{l=1}^n b_{l,j}f_l(v_k) = \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}f_l\right)(v_k) = ({}^tF(g_j))(v_k) \\ &= (g_j\circ F)(v_k) = g_j(F(v_k)) = g_j\left(\sum_{l=1}^m a_{l,k}w_l\right) = \sum_{l=1}^m a_{l,k}g_j(w_l) = \sum_{l=1}^m a_{l,k}\delta_{j,l} = a_{j,k}.\end{aligned}$$

従って, $B = {}^tA$ となる. ■

次に, 複素 vector 空間の複素共役空間を与える.

定義 1.6 V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. このとき, $\overline{V}$ を集合として V と同じものとし, $v \in V$ を $\overline{V}$ の元と考えるときは $\overline{v} \in \overline{V}$ と表すことにする. このとき, $\overline{v}$, $\overline{v}' \in \overline{V}$ および $c \in \mathbb{C}$ について, 和および scalar 倍を次のように定義する.

$$\overline{v} + \overline{v}' = \overline{v + v'}, \tag{1.2}$$

$$c \cdot \overline{v} = \overline{\overline{c}v}. \tag{1.3}$$

この加法と scalar 倍をもつ集合 $\overline{V}$ を V の**複素共役 vector 空間**, あるいは単に**複素共役空間**と呼ぶ.

定理 1.7 V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. このとき, 定義 1.6 における $\overline{V}$ は (1.2), (1.3) をそれぞれ加法, scalar 倍としたとき, $\mathbb{C}$ 上の vector 空間になる.

<u>証明</u>. $\overline{V}$ が加法 (1.2), scalar 倍 (1.3) に関して, vector 空間の公理をみたしていることを示せばよい. $\overline{v}, \overline{v}', \overline{v}'' \in \overline{V}$, $c, c' \in \mathbb{C}$ とする. このとき, 次が得られる.

$$\overline{v} + \overline{v}' = \overline{v + v'} = \overline{v' + v} = \overline{v}' + \overline{v},$$

$$\begin{aligned}(\overline{v} + \overline{v}') + \overline{v}'' &= \overline{v + v'} + \overline{v}'' = \overline{(v + v') + v''} = \overline{v + (v' + v'')} \\ &= \overline{v} + \overline{v' + v''} = \overline{v} + (\overline{v}' + \overline{v}''),\end{aligned}$$

$$c \cdot (\overline{v} + \overline{v}') = c \cdot \overline{v + v'} = \overline{\overline{c}(v + v')} = \overline{\overline{c}v + \overline{c}v'} = \overline{\overline{c}v} + \overline{\overline{c}v'} = c \cdot \overline{v} + c \cdot \overline{v}',$$

$$(c + c') \cdot \overline{v} = \overline{(\overline{c + c'})v} = \overline{(\overline{c} + \overline{c}')v} = \overline{\overline{c}v + \overline{c}'v} = \overline{\overline{c}v} + \overline{\overline{c}'v} = c \cdot \overline{v} + c' \cdot \overline{v},$$

$$\begin{aligned}c \cdot (c' \cdot \overline{v}) &= c \cdot \overline{\overline{c}'v} = \overline{\overline{c}(\overline{c}'v)} = \overline{(\overline{c} \cdot \overline{c}')v} = \overline{\overline{cc'}v} = (cc') \cdot \overline{v} \\ &= (c'c) \cdot \overline{v} = \overline{\overline{c'c}v} = \overline{(\overline{c}'\overline{c})v} = \overline{\overline{c}'(\overline{c}v)} = c' \cdot \overline{\overline{c}v} = c' \cdot (c \cdot \overline{v}),\end{aligned}$$

$$1 \cdot \overline{v} = \overline{\overline{1}v} = \overline{1v} = \overline{v}.$$

また, 任意の $\overline{v} \in \overline{V}$ について, 次が成り立つ.

$$\overline{v} + \overline{0} = \overline{v + 0} = \overline{v},$$

$$\overline{0} + \overline{v} = \overline{0 + v} = \overline{v}.$$

よって, $\overline{0} \in \overline{V}$ は $\overline{V}$ における零 vector である. また, 任意の $\overline{v} \in \overline{V}$ について, 次のことが成り立つ.

$$\overline{v} + \overline{-v} = \overline{v + (-v)} = \overline{0},$$
$$\overline{-v} + \overline{v} = \overline{(-v) + v} = \overline{0}.$$

ゆえに, $\overline{-v} \in \overline{V}$ は $\overline{v}$ の逆 vector $-\overline{v}$ である.

以上により, $\overline{V}$ は加法 (1.2), scalar 倍 (1.3) により vector 空間になる. ■

$\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V, W の間の線形写像に対して, $\overline{V}, \overline{W}$ の間の線形写像が定義できる.

定理 1.8 V, W を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とし, $F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする. このとき, 写像 $\overline{F} : \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$ を次のように定義する.

$$\overline{F}(\overline{v}) = \overline{F(v)}, \quad \overline{v} \in \overline{V}. \tag{1.4}$$

このとき, $\overline{F}$ は線形写像である. この $\overline{F}$ を F の**複素共役線形写像**と呼ぶことにする.

<u>証明</u>. $\overline{v}, \overline{v}' \in \overline{V}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\overline{F}(\overline{v} + \overline{v}') &= \overline{F}(\overline{v + v'}) = \overline{F(v + v')} = \overline{F(v) + f(v')} \\
&= \overline{F(v)} + \overline{F(v')} = \overline{F}(\overline{v}) + \overline{F}(\overline{v}'), \\
\overline{F}(c \cdot \overline{v}) &= \overline{F}(\overline{\overline{c}v}) = \overline{F(\overline{c}v)} = \overline{\overline{c}F(v)} \\
&= c \cdot \overline{F(v)} = c \cdot (\overline{F}(\overline{v})).
\end{aligned}$$

従って, $\overline{F} : \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$ は線形写像である. ■

特に, $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V, W がともに有限次元であるとき, 線形写像 $F : V \longrightarrow W$ と $\overline{F} : \overline{V} \longrightarrow \overline{W}$ の行列表示は, 複素共役で対応づけられる.

補題 1.9 $\overline{V}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim V = n > 0$ とし, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ を V の基底とする. このとき, $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\} \subset \overline{V}$ は $\overline{V}$ の基底である.

<u>証明</u>. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ とし, 次が成り立つとする.

$$a \cdot \overline{v}_1 + \cdots + a_n \cdot \overline{v}_n = \overline{0}.$$

このとき, 次が得られる.

$$\overline{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n} = \overline{0}.$$

これは, 対応する V の元について, $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ となることを示しており, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ は V の基底であるから, $a_1 = \cdots = a_n = 0$ となる. 従って, $v_1, \ldots, v_n$ は線形独立である. また, 任意の $\overline{v} \in \overline{V}$ について, 対応する V の元 $v \in V$ が $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ と表されるから, 次が得られる.

$$\overline{v} = \overline{c_1v_1 + \cdots + c_nv_n} = \overline{c}_1 \cdot \overline{v}_1 + \cdots + \overline{c}_n \cdot \overline{v}_n.$$

ゆえに, $\overline{V}$ の任意の元 $\overline{v} \in \overline{V}$ は $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ の線形結合で表される. 従って, $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\} \subset \overline{V}$ は $\overline{V}$ の基底である. ■

定理 1.10 V, W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim V = n$, $\dim W = m$ $(n, m > 0)$ とし, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ をそれぞれ V, W の基底とする. いま, $F : V \longrightarrow W$ を線形写像とし, A を F の $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ に関する表現行列とする. このとき, F の複素共役線形写像 $\overline{F}$ の $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$, $\{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_m\}$ に関する表現行列は A の各成分を共役複素数にした行列 $\overline{A}$ である.

証明. $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ とする. すると, $1 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k について, $F(v_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{j,k}w_j$ が成り立つ. よって, 次が得られる.

$$\overline{F}(\overline{v}_k) = \overline{F(v_k)} = \overline{\sum_{j=1}^{m} a_{j,k}w_j} = \sum_{j=1}^{m} \overline{a}_{j,k} \cdot \overline{w}_j.$$

これは, $\overline{F}$ の $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$, $\{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_m\}$ に関する表現行列が $\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{1,1} & \cdots & \overline{a}_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{m,1} & \cdots & \overline{a}_{m,n} \end{pmatrix}$ であることを意味する. ■

特に, V が有限次元で, V 上に複素内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が入っているとき, V^* と $\overline{V}$ が自然に対応する.

定理 1.11 V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim V = n > 0$ とし, V 上には複素内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が入っているとする. このとき, $v \in V$ に対して, $f_v \in V^*$ を次で定義する.

$$f_v(x) = \langle x, v \rangle, \quad x \in V. \tag{1.5}$$

このとき, 写像 $C : \overline{V} \longrightarrow V^*$ を $C(\overline{v}) = f_v$ $(\overline{v} \in \overline{V})$ とすると, C は線形同型である.

証明. まず, C が線形写像であることを示す. $v, v' \in V$, $a \in \mathbb{C}$ とする. このとき, $x \in V$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
C(\overline{v}+\overline{v}')(x) &= C(\overline{v+v'})(x) = f_{v+v'}(x) = \langle x, v+v' \rangle \\
&= \langle x, v \rangle + \langle x, v' \rangle = f_v(x) + f_{v'}(x) = C(\overline{v})(x) + C(\overline{v}')(x) \\
&= (C(\overline{v}) + C(\overline{v}'))(x), \\
C(a \cdot \overline{v})(x) &= C(\overline{\overline{a}v})(x) = f_{\overline{a}v}(x) = \langle x, \overline{a}v \rangle \\
&= a\langle x, v \rangle = a(f_v(x)) = a(C(\overline{v})(x)) \\
&= (aC(\overline{v}))(x).
\end{aligned}$$

ゆえに, $C(\overline{v}+\overline{v}') = C(\overline{v}) + C(\overline{v}')$, $C(a \cdot \overline{v}) = aC(\overline{v})$ が成り立つ. 従って, $C : \overline{V} \longrightarrow V^*$ は線形写像である.

また, Riesz の補題より C は全射である. さらに, $\dim \overline{V} = \dim V = \dim V^*$ であるから, C は単射でもある. 以上により, $C : \overline{V} \longrightarrow V^*$ は線形同型である. ■

この定理により, 随伴写像と双対写像の表現行列の関係が次のようにして得られる. V, W を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間で, $\dim V = n$, $\dim W = m \, (n, m > 0)$ とする. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ をそれぞれ V, W 上の複素内積とし, $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ をそれぞれ V, W の正規直交基底, $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V^*$, $\{g_1, \ldots, g_m\} \subset W^*$ をそれぞれ $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ の双対基底とする. いま, $F : V \longrightarrow W$ を線形写像とし, ${}^tF : W^* \longrightarrow V^*$, $F^* : W \longrightarrow V$ をそれぞれ F の双対写像, 随伴写像とする. さらに, $C_V : \overline{V} \longrightarrow V^*$, $C_W : \overline{W} \longrightarrow W^*$ をそれぞれ (1.5) で与えられる線形同型とする. このとき, ${}^tF \circ C_W : \overline{W} \longrightarrow V^*$ は線形写像であり, $1 \leq j \leq m$ なる任意の整数 j および $1 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
(({}^tF \circ C_W)(\overline{w}_j))(v_k) &= ({}^tF(C_W(\overline{w}_j)))(v_k) = ({}^tF(f_{w_j}))(v_k) = (f_{w_j} \circ F)(v_k) \\
&= f_{w_j}(F(v_k)) = \langle F(v_k), w_j \rangle_W = \langle v_k, F^*(w_j) \rangle_V \\
&= f_{F^*(w_j)}(v_k) = (C_V(\overline{F^*(w_j)}))(v_k) = (C_V(\overline{F^*}(\overline{w}_j)))(v_k) \\
&= ((C_V \circ \overline{F^*})(\overline{w}_j))(v_k).
\end{aligned}$$

ゆえに, ${}^tF \circ C_W = C_V \circ \overline{F^*}$ が成り立つ. よって, $\overline{F^*} = C_V^{-1} \circ {}^tF \circ C_W$ となる. ところで, $1 \leq j, k \leq n$ なる任意の整数 j, k について, 次が成り立つ.

$$f_{v_j}(v_k) = \langle v_k, v_j \rangle_V = \delta_{k,j} = f_j(v_k).$$

ゆえに, $f_{v_k} = f_k \;\; (1 \leq k \leq n)$ が成り立つ. よって, $C_V(\overline{v}_k) = f_k$ である. 同様にして, $f_{w_j} = g_j \;\; (1 \leq j \leq m)$ が成り立つ. ゆえに, $C_W(\overline{w}_j) = g_j$ である. このことにより, F^* の

$\{w_1, \ldots, w_m\}$, $\{v_1, \ldots, v_v\}$ に関する表現行列が, ${}^tF$ の $\{g_1, \ldots, g_m\}$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ に関する表現行列の複素共役な行列であることがわかる. 実際, 随伴行列は転置行列に複素共役な行列である.

1.2 商 vector 空間.

ここでは, 群の剰余群にあたる vector 空間の商 vector 空間について述べる.

補題 1.12 V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $W \subset V$ を部分 vector 空間とする. ここで, V 上の関係 $\sim$ を次で定義する.

$$v \sim v' \iff v' - v \in W, \quad v, v' \in V. \tag{1.6}$$

このとき, この関係 $\sim$ は同値関係である.

証明. $v \in V$ について, $v - v = 0 \in W$ であるから, $v \sim v$ である. また, $v, v' \in V$ について, $v \sim v'$ とすると, $v' - v \in W$ である. よって, $v - v' = -(v' - v) \in W$ となるから, $v' \sim v$ である. 最後に, $v, v', v'' \in V$ について, $v \sim v'$, $v \sim v''$ とする. すると, $v'' - v', v' - v \in W$ である. よって, $v'' - v = (v'' - v') + (v' - v) \in W$ となり, $v \sim v''$ であることがわかる. 従って, $\sim$ は同値関係である. ■

定義 1.13 この同値関係に関する $v \in V$ の同値類を v の W に関する**剰余類**と呼び, $[v]$ と表すことにする. V の部分集合としては $[v] = v + W = \{v + w \in V\,;\, w \in W\} \subset V$ である. また, V のこの同値関係に関する剰余空間 $V/\sim$ を V/W と表すことにする.

V/W は, 次のようにして vector 空間と考えることができる.

定理 1.14 V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $W \subset V$ を部分 vector 空間とする. いま, $v, w \in V$, $c \in \mathbb{C}$ に対して, $[v]$ と $[v']$ の和 $[v] + [v']$ および $[v]$ の c 倍 $c[v]$ を次のように定義する.

$$[v] + [v'] = [v + v'], \tag{1.7}$$

$$c[v] = [cv]. \tag{1.8}$$

このとき, $[v] + [v']$, $c[v]$ は剰余類の代表元のとり方に依らずに定めることができる. さらに, これらにより定められる加法と scalar 倍により, V/W は vector 空間になる.

証明. $[v] = [w]$, $[v'] = [w']$ であるとする. すると, $w - v \in W$, $w' - v' \in W$ である. ゆえに, 次が成り立つ.

$$(w + w') - (v + v') = (w - v) + (w' - v') \in W,$$

$$cw - cv = c(w - v) \in W.$$

よって, $[w + w'] = [v + v']$, $[cw] = [cv]$ となり, V/W における加法と scalar 倍は剰余類の代表元によらずに定められる.

続いて, この加法と scalar 倍により, V/W が vector 空間になることを示す. $v, v', v'' \in V$, かつ $c, c' \in \mathbb{C}$ とする. すると, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
[v] + [v'] &= [v + v'] = [v' + v] = [v'] + [v], \\
([v] + [v']) + [v''] &= [v + v'] + [v''] = [(v + v') + v''] = [v + (v' + v'')] \\
&= [v] + [v' + v''] = [v] + ([v'] + [v'']), \\
c([v] + [v']) &= c[v + v'] = [c(v + v')] = [cv + cv'] \\
&= [cv] + [cv'] = c[v] + c[v'], \\
(c + c')[v] &= [(c + c')v] = [cv + c'v] = [cv] + [c'v] = c[v] + c'[v], \\
c(c'[v]) &= c[c'v] = [c(c'v)] = [(cc')v] = (cc')[v] \\
&= [(c'c)v] = [c'(cv)] = c'[cv] = c'(c[v]), \\
1 \cdot [v] &= [1 \cdot v] = [v].
\end{aligned}
$$

また, 任意の $v \in V$ について, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
[v] + [0] = [v + 0] = [v], \\
[0] + [v] = [0 + v] = [v].
\end{aligned}
$$

よって, $[0] \in V/W$ は V/W 上の加法に関する単位元, 即ち, V/W 上の零 vector である. また, 任意の $v \in V$ に対して, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
[v] + [-v] = [v + (-v)] = [0], \\
[-v] + [v] = [(-v) + v] = [0].
\end{aligned}
$$

よって, $[-v] \in V/W$ は V/W における加法に関する $[v]$ の逆元, 即ち, $[v]$ の逆 vector である. 以上により, V/W は上の加法, scalar 倍により vector 空間となる. ■

定義 1.15 V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $W \subset V$ を V の vector 空間とする. このとき, (1.7), (1.8) をそれぞれ加法, scalar 倍とする vector 空間 V/W を V の W に関する**商 vector 空間**という.

群上の準同型写像について準同型写像が成り立つが, vector 空間上の線形写像についても準同型写像が成り立つ.

定理 1.16 V, W を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とし, $F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする. このとき, 自然な線形写像 $[F] : V/\mathrm{Ker}F \longrightarrow W$ が $[F]([v]) = F(v)$ により定義され, この $[F]$ により, $V/\mathrm{Ker}F \simeq \mathrm{Im}F$ となる (**準同型定理**).

証明.　まず, $[F]$ が well-defined であることを示す．いま, $[v] = [w] \in V/\mathrm{Ker}F$ とする．すると, $w - v \in \mathrm{Ker}F$ である．よって, $F(w) - F(v) = F(w-v) = 0$ となるから, $F(w) = F(v)$ となり, $[F]([v])$ は $[v]$ の代表元のとり方に依らない.

次に, $[F]$ が線形写像であることを示す. $v, v' \in V$, $c \in \mathbb{C}$ とする．すると, 次が成り立つ.

$$[F]([v]+[v']) = [F]([v+v']) = F(v+v') = F(v) + F(v') = [F]([v]) + [F]([v']),$$
$$[F](c[v]) = [F]([cv]) = F(cv) = cF(v) = c([F]([v])).$$

従って, $[F]$ は線形写像である.

続いて, $[F] : V/\mathrm{Ker}F \longrightarrow \mathrm{Im}F$ が全射であることを示す．そのためには, $\mathrm{Im}[F] = \mathrm{Im}F$ を示せばよい．これは, 任意の $v \in V$ について, $[F]([v]) = F(v)$ となることから, $\mathrm{Im}[F] = \mathrm{Im}F$ となり得られる.

最後に, $[F]$ が単射であることを示す．そのためには, $\mathrm{Ker}[F] = \{[0]\}$ であることを示せばよい．いま, $[v] \in \mathrm{Ker}[F]\,(v \in V)$ であるとする．すると, $0 = [F]([v]) = F(v)$ である．ゆえに, $v \in \mathrm{Ker}F$ となり, $v = v - 0 \in \mathrm{Ker}F$ であるから, $[v] = [0]$ であることが分かる．従って, $[F]$ は単射である. ■

vector 空間 V が有限次元であるときは, 部分 vector 空間 $W \subset V$ の次元と商 vector 空間の次元には, 密接な関係がある.

定理 1.17 V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $W \subset V$ を V の部分 vector 空間とする．このとき, $\dim V/W = \dim V - \dim W$ が成り立つ.

証明.　$\dim V = n$, $\dim W = m$ とする． $n = 0$ のときは, $V = W = \{0\}$ であり, $V/W = \{[0]\}$ であるから, $\dim V/W = 0 = 0 - 0 = \dim V = \dim W$ となり, 主張が成り立つ．そこで, $n > 0$ とする． $m = 0$ ならば, $W = \{0\}$ となり, $v, w \in V$ について, $[v] = [w]$ であるとき, $w - v \in W = \{0\}$ となるから, $v = w$ となる．逆に, $v = w$ ならば明らかに $[v] = [w]$ であるから, $[v] = [w]$ であることと $v = w$ であることは同値になり, V/W は自然に V と同一視され, $\dim V/W = \dim V = \dim V - \dim W$ となる．よって, $0 < m \leq n$ なる場合を考える．いま, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ を W の基底とする．このとき, 必要ならば V の元 $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ を加えることにより, $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subset V$ が V の基底となるようにすることができる．このとき, $\{[v_{m+1}], \ldots, [v_n]\} \subset V/W$ が V/W の基底となることを示す．まず, $\{[v_{m+1}], \ldots, [v_n]\} \subset V/W$ が線形独立であることを示す．いま, $a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ かつ $a_{m+1}[v_{m+1}] + \cdots + a_n[v_n] = [0]$ とする．すると, $[a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n] = [0]$ であるから, $a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n \in W$ である．ここで, $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subset V$ は V の基底であるから, $a_{m+1} = \cdots = a_n = 0$ となる．よって, $\{[v_{m+1}], \ldots, [v_n]\} \subset V/W$ は線形独立である. 次に, 任意の $[v] \in V/W$ が $[v_{m+1}], \ldots, [v_n]$

の線形結合で表されることを示す. $v = a_1w_1 + \cdots + a_mw_m + a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n$ と表されるとすると, $[v] = [a_1w_1 + \cdots + a_mw_m + a_{m+1}v_{m+1} + \cdots + a_nv_n] = a_1[w_1] + \cdots + a_m[w_m] + a_{m+1}[v_{m+1}] + \cdots + a_n[v_n]$ が成り立つ. ここで, $w_1, \ldots, w_m \in W$ より $[w_1] = \cdots = [w_m] = [0]$. ゆえに, $[v] = a_{m+1}[v_{m+1}] + \cdots + a_n[v_n]$ となり, $[v]$ が $[v_{m+1}], \ldots, [v_n] \in V/W$ の線形結合で表されることが分かる. 以上により, $\{[v_{m+1}], \ldots, [v_n]\} \subset V/W$ は V/W の基底であることが分かる. 従って, $\dim V/W = n - m = \dim V - \dim W$ となる. ■

この定理と準同型定理より, 線形写像に関する次元公式が得られる.

系 1.18 *V, W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間とし, $F : V \longrightarrow W$ を線形写像とする. このとき, $\dim V = \dim \mathrm{Ker}F + \dim \mathrm{Im}F$ が成り立つ ((線形写像に関する) **次元公式**).*

<u>証明</u>. 準同型定理より, $V/\mathrm{Ker}F \simeq \mathrm{Im}F$ が成り立つ. よって, $\dim(V/\mathrm{Ker}F) = \dim(\mathrm{Im}F)$ が得られる. また, 定理 1.17 より $\dim(V/\mathrm{Ker}F) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}F$ が成り立つ. 従って, $\dim V = \dim \mathrm{Ker}F + \dim \mathrm{Im}F$ が成り立つことが分かる. ■

ここで, 商 vector 空間から商 vector 空間への線形写像を考える.

定理 1.19 *V_1, V_2 を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $W_1 \subset V_1$, $W_2 \subset V_2$ をそれぞれ V_1, V_2 の部分 vector 空間とし, $F : V_1 \longrightarrow V_2$ を $F(W_1) \subset W_2$ なる線形写像とする. このとき, 線形写像 $[F] : V_1/W_1 \longrightarrow V_2/W_2$ で, 任意の $v \in V$ について $[F]([v]) = [F(v)]$ が成り立つものがただ 1 つ存在する.*

<u>証明</u>. $V_1/W_1 = \{[v] = v + W_1 \subset V_1\,;\, v \in V\}$ であるから, このような線形写像が存在すれば, それはただ 1 つである. そこで, このような $[F]$ が存在することを示す. まず, 任意の $[v] \in V_1/W_1$ に対して, $[F(v)] \in V_2/W_2$ が $[v]$ の代表元のとり方に依らずに定められることを示す. いま, $[v] = [v'] \in V_1/W_1$ とする. すると, $v' - v \in W$ である. よって, $F(v') - F(v) = F(v' - v) \in F(W_1) \subset W_2$ である. ゆえに, $[F(v)] = [F(v')] \in V_2/W_2$ となり, 写像 $[F] : V_1/W_1 \longrightarrow V_2/W_2$ は well-defined である. 次に, $[F]$ が線形写像であることを示す. $[v], [v'] \in V_1/W_1$, $c \in \mathbb{C}$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
[F]([v] + [v']) &= [F]([v + v']) = [F(v + v')] = [F(v) + F(v')] \\
&= [F(v)] + [F(v')] = [F]([v]) + [F]([v']), \\
[F](c[v]) &= [F]([cv]) = [F(cv)] = [c(F(v))] \\
&= c[F(v)] = c([F]([v])).
\end{aligned}$$

従って, $[F]$ は線形写像である. 以上により, 線形写像 $[F] : V_1/W_1 \longrightarrow V_2/W_2$ の存在が示された. ■

この定理は次のように示すこともできる. $\pi_2 : V_2 \longrightarrow V_2/W_2$ を自然な射影, 即ち, 任意の $x \in V_2$ について, $\pi_2(x) = [x] \in V_2/W_2$ とする. すると, π_2 は線形写像であり, F との合成写像 $G = \pi_2 \circ F : V_1 \longrightarrow V_2/W_2$ も線形写像である. このとき, 任意の $w \in W_1$ について, $F(w) \in W_2$ であるから, $G(w) = (\pi_2 \circ F)(w) = \pi_2(F(w)) = [F(w)] = [0] \in V_2/W_2$ である. 従って, 任意の $v \in V$ について $[F]([v]) = G(v) = \pi_2(F(v)) = [F(v)]$ となる線形写像 $[F] : V_1/W_1 \longrightarrow V_2/W_2$ を定義することができる.

ここで, 部分 vector 空間を「保存する」線形写像を考える.

定義 1.20 *V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $W \subset V$ を部分 vector 空間とする. このとき, $F(W) \subset W$ なる線形写像 $F : V \longrightarrow V$ は W を***保存***するという.*

vector 空間上の線形写像がある部分 vector 空間を保存するならば, それから商 vector 空間上の線形写像が「誘導」される.

系 1.21 *V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $W \subset V$ を部分 vector 空間とし, $F : V \longrightarrow V$ を W を保存する線形写像とする. このとき, 任意の $v \in V$ について, $[F]([v]) = [F(v)]$ なる線形写像 $[F] : V/W \longrightarrow V/W$ がただ 1 つ存在する.*

証明. 定理 1.19 において, $V_1 = V_2 = V$, $W_1 = W_2 = W$ とすればよい. ■

vector 空間 V の部分 vector 空間 W に対して, 内積等を考えなければ自然な補空間はしないが, V の双対空間 V^* に「補空間」に相当する自然な部分 vector 空間が存在する.

定義 1.22 *V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, V^* を V の双対空間とし, $W \subset V$ を V の部分 vector 空間とする. このとき, V^* の次の部分集合を考える.*

$$W^\circ = \{f \in V^* ; f(w) = 0 \,\forall w \in W\}. \tag{1.9}$$

*この W° を W の V^* における***零化空間***と呼ぶ.*

命題 1.23 *V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, V^* を V の双対空間とし, $W \subset V$ を V の部分 vector 空間とする. このとき, W° は V^* の部分 vector 空間である.*

証明. $f, g \in W^\circ$, $c \in \mathbb{C}$ とする. このとき, $w \in W$ について, 次が成り立つ.

$$(f+g)(w) = f(w) + g(w) = 0 + 0 = 0,$$
$$(cf)(w) = c(f(w)) = c \cdot 0 = 0.$$

明らかに, $0 \in V^*$ について, 任意の $w \in W$ に対して, $0(w) = 0$ であるから, $0 \in W^\circ$ となる. 従って, $W^\circ \subset V^*$ は V^* の部分 vector 空間である. ■

零化空間と商 vector 空間には, 密接な関係がある.

定理 1.24 V を $\mathbb{C}$ の vector 空間とし, $W \subset V$ を V の部分 vector 空間とする.
(1) $f \in W^\circ$ に対して, $[f] : V/W \longrightarrow \mathbb{C}$ を $[f]([v]) = f(v)\,(v \in V)$ とする. このとき, $[f] \in (V/W)^*$ であり, 写像 $\Phi : W^\circ \ni f \mapsto [f] \in (V/W)^*$ は線形同型写像である.
(2) $F : V^* \longrightarrow W^*$ を $F(f) = f|_W\,(f \in V^*)$, 即ち, 任意の $w \in W$ について, $F(f)(w) = f(w)$ であるとする. このとき, $\mathrm{Ker}\,F = W^\circ$ である. さらに, V が有限次元であれば, $[F] : V^*/W^\circ \longrightarrow W^*$ は線形同型写像である.

証明. (1) $f \in W^\circ$ について, $[f] : V/W \longrightarrow \mathbb{C}$ は well-defined であり, 線形写像である. ゆえに, $[f] \in (V/W)^*$ である. そこで, $\Phi : W^\circ \longrightarrow (V/W)^*$ が線形写像であることを示す. いま, $f, g \in W^\circ$, $c \in \mathbb{C}$ とする. このとき, 任意の $[v] \in V/W$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\Phi(f+g)([v]) &= [f+g]([v]) = (f+g)(v) = f(v) + g(v) = [f]([v]) + [g]([v]) \\
&= ([f]+[g])([v]) = (\Phi(f) + \Phi(g))([v]), \\
\Phi(cf)([v]) &= [cf]([v]) = (cf)(v) = c(f(v)) = c([f]([v])) \\
&= (c[f])([v]) = (c\Phi(f))([v]).
\end{aligned}$$

ゆえに, Φ は線形写像である. 続いて, Φ が単射であることを示す. $f \in W^\circ$ について, $\Phi(f) = 0$ とする. すると, 任意の $v \in V$ に対して, $0 = \Phi(f)([v]) = [f]([v]) = f(v)$ が成り立つ. これは, $f = 0 \in W^\circ$ であることを意味する. 従って, Φ は単射である. 最後に, Φ が全射であることを示す. いま, $h \in (V/W)^*$ とする. ここで, $\pi : V \longrightarrow V/W$ を自然な射影とし, $f = h \circ \pi : V \longrightarrow \mathbb{C}$ とする. すると, $f \in V^*$ である. さらに, 任意の $w \in W$ について, $f(w) = (h \circ \pi)(w) = h(\pi(0)) = h([0]) = 0$ となる. ゆえに, $f \in W^\circ$ であり, 任意の $[v] \in V/W$ について, $\Phi(f)([v]) = f(v) = h(\pi(v)) = h([v])$ となる. 従って, $\Phi(f) = h$ となり, Φ が全射であることが分かる.
(2) まず, $F : V^* \longrightarrow W^*$ が線形写像であることを示す. $f, g \in V^*$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき, 任意の $w \in W$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
F(f+g)(w) &= (f+g)|_W(w) = (f+g)(w) = f(w) + g(w) \\
&= f|_W(w) + g|_W(w) = F(f)(w) + F(g)(w) = (F(f) + F(g))(w), \\
F(cf)(w) &= (cf)|_W(w) = (cf)(w) = c(f(w)) \\
&= c(f|_W(w)) = c(F(f)(w)) = (cF(f))(w).
\end{aligned}$$

よって, F は線形写像である. ここで, $\mathrm{Ker}F$ を求める. いま, $f \in V^*$ を $F(f) = f|_W = 0$ なる線形形式とする. すると, 任意の $w \in W$ について, $0 = F(f)(w) = f|_W(w) = f(w)$ であるから, $f \in W^\circ$ となる. よって, $f \in W^\circ$ である. 逆に, $f \in W^\circ$ であるとき, 任意の $w \in W$

について, $F(f)(w) = f|_W(w) = f(w) = 0$ となる. よって, $F \in \mathrm{Ker}F$ である. 従って, $\mathrm{Ker}F = W^\circ$ となる. ゆえに, 準同型定理より, 線形写像 $[F] : V^*/\mathrm{Ker}F = V^*/W^\circ \longrightarrow W^*$ が定義され, この $[F]$ により $V^*/W^\circ \simeq \mathrm{Im}F$ となる. あとは, $[F] : V^*/W^\circ \longrightarrow W^*$ が全射であることを示せばよい. ところが, $\mathrm{Im}[F] = \mathrm{Im}F$ であるから, $\mathrm{Im}F = W^*$ であることを示せばよいことが分かる. いま, $g \in W^*$ とする. ここで, $\dim V = n$, $\dim W = m$ とする. $n = m$ であれば, $W = V$ であり, $V^* = W^*$, $[F] = \mathrm{Id}_{V^*}$, かつ次のことが成り立つ.

$$W^\circ = \{f \in V^*\,;\, f(w) = 0\,\forall w \in W = V\} = \{0\}.$$

ゆえに, $V^*/W^\circ = V^*$ であり, $[F]$ により, V^*/W° と W^* は同型になる. $m = 0$ のときは, $W = \{0\}$ であり, $W^* = \{0\}$ でもある. また, 次が成り立つ.

$$W^\circ = \{f \in V^*\,;\, f(0) = 0\} = V^*.$$

よって, $V^*/W^\circ = \{0\}$ となり, $[F]$ により V^*/W° と W^* は同型になる. 従って, 残るのは $0 < m < n$ なる場合である. いま, $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ を W の基底とし, V の元 $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ を付け加えることにより, $\{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subset V$ が V の基底であるとする. ここで, $g \in W^*$ に対して, $f \in V^*$ を次のように定める.

$$f\left(\sum_{j=1}^m a_j w_j + \sum_{k=m+1}^n b_k v_k\right) = \sum_{j=1}^n a_j g(w_j), \quad a_1, \ldots, a_m, b_{m+1}, \ldots, b_n \in \mathbb{C}.$$

この f が線形形式であることを確認する. $a_1, \ldots, a_m, b_{m+1}, \ldots, b_n, a'_1, \ldots, a'_m, b'_{m+1}, \ldots, b'_n$, $c \in \mathbb{C}$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&f\left(\left(\sum_{j=1}^m a_j w_j + \sum_{k=m+1}^n b_k v_k\right) + \left(\sum_{j=1}^m a'_j w_j + \sum_{k=m+1}^n b'_k v_k\right)\right) \\
&= f\left(\sum_{j=1}^m (a_j + a'_j) w_j + \sum_{k=m+1}^n (b_k + b'_k) v_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^m (a_j + a'_j) g(w_j) = \sum_{j=1}^m a_j g(w_j) + \sum_{j=1}^m a'_j g(w_j) \\
&= f\left(\sum_{j=1}^m a_j w_j + \sum_{k=m+1}^n b_k v_k\right) + f\left(\sum_{j=1}^m a'_j w_j + \sum_{k=m+1}^n b'_k v_k\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(c\left(\sum_{j=1}^m a_j w_j + \sum_{k=m+1}^n b_k v_k\right)\right) &= f\left(\sum_{j=1}^m (ca_j) w_j + \sum_{k=m+1}^n (cb_k) v_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^n (ca_j) g(w_j) = c\sum_{j=1}^m a_j g(w_j) \\
&= c\left(f\left(\sum_{j=1}^m a_j w_j + \sum_{k=m+1}^n b_k v_k\right)\right).
\end{aligned}$$

ゆえに，f は線形となり，$f \in V^*$ であることが分かる． このとき，$w \in W$ について，$w = \sum_{j=1}^{m} a_j w_j$ とすると，

$$
\begin{aligned}
F(f)(w) = f|_W(w) = f(w) &= f\left(\sum_{j=1}^{m} a_j w_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_j g(w_j) = g\left(\sum_{j=1}^{m} a_j w_j\right) = g(w).
\end{aligned}
$$

従って，$F(f) = g \in W^*$ となり，$F : V^* \longrightarrow W^*$ は全射である． 以上により，$[F] : V^*/W^\circ \longrightarrow W^*$ が全射であることが分かる． ■

注意 1.25 定理 1.24(2) は, V が有限次元でなくても成り立つ．このことを証明するには, 任意の $g \in W^*$ に対して，$f|_W = g$ なる $f \in V^*$ が存在することを示す必要があるが, そのためには, 例えば, 無限次元 vector 空間にも基底が存在することを用いる等, 高度な線形代数学の知識を必要とする．

1.3 tensor 積.

ここでは, 複数の vector 空間から得られる新しい vector 空間の 1 つである tensor 積について述べる. そのために, まず, 双線形写像について述べる.

定義 1.26 U, V, W を $\mathbb{C}$ 上の vector 区間とする. このとき, 次の性質をみたす写像 $\Phi : U \times V \longrightarrow W$ を $U \times V$ 上の双線形写像と呼ぶ.

$$\Phi(u+u', v) = \Phi(u, v) + \Phi(u', v),\ \Phi(cu, v) = c\Phi(u, v), \quad u, u' \in V, v \in V, c \in \mathbb{C},$$
$$\Phi(u, v+v') = \Phi(u, v) + \Phi(u, v'),\ \Phi(u, cv) = c\Phi(u, v), \quad u \in U, v, v' \in V, c \in \mathbb{C}.$$

特に, $U = V$ のときは, $\Phi : V \times V \longrightarrow W$ を V 上の**双線形写像**と呼ぶことがある.

2 つの vector 空間の tensor 積は, 直積空間上の双線形写像から線形写像を得るという「普遍性」により定義される.

定義 1.27 U, V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. このとき, 次の性質 (T) をみたす $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 W を, U と V の **tensor 積**と呼び, $W = U \otimes V$ と表す.
(T) 双線形写像 $\iota : U \times V \longrightarrow W$ が存在して, $\mathbb{C}$ 上の任意の vector 空間 X と, 双線形写像 $\Phi : U \times V \longrightarrow X$ に対して線形写像 $F : W \longrightarrow X$ で, $\Phi = F \circ \iota$ なるものがただ 1 つ存在する.

この性質 (T) を **tensor 積の普遍性**と呼ぶ.
ここで, tensor 積は本質的に高々1 個しか存在しないことを示す.

定理 1.28 U, V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とし, W, W' を定義 1.27 の性質 (T) をみたす $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. このとき, 線形同型写像 $F : W \longrightarrow W'$ で, $\iota' = F \circ \iota$ が成り立つものがただ 1 つ存在する. ここで, $\iota : U \times V \longrightarrow W$, $\iota' : U \times V \longrightarrow W'$ は (T) における双線形写像とする.

<u>証明</u>. vector 空間 X および双線形写像 Φ として W' および $\iota' : U \times V \longrightarrow W'$ をとるとき, tensor 積 W の普遍性により, 線形写像 $F : W \longrightarrow W'$ で, $\iota' = F \circ \iota$ が成り立つものがただ 1 つ存在する. よって, F が線形同型であることを示せばよい. ところで, F がただ 1 つ存在することと同様にして, tensor 積 W' の普遍性により, 線形写像 $F' : W' \longrightarrow W$ で, $\iota = F' \circ \iota'$ が成り立つものがただ 1 つ存在する. このとき, 次が成り立つ.

$$\iota = F' \circ \iota' = F' \circ F \circ \iota,$$
$$\iota' = F \circ \iota = F \circ F' \circ \iota'.$$

ところが, $\iota = \mathrm{Id}_W \circ \iota$, $\iota' = \mathrm{Id}_{W'} \circ \iota'$ が成り立つから, tensor 積 W, W' の普遍性より, $F' \circ F = \mathrm{Id}_W$, $F' \circ F = \mathrm{Id}_{W'}$ が成り立たなければならない. ゆえに, $F' = F^{-1}$ となり, F は全単射である. 従って, F は線形同型写像である. ■

ここで, tensor 積が存在することを, 具体的な形を与えることにより示す.

定理 1.29 U, V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim U = n > 0$, $\dim V = m > 0$ とし, $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$, $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ をそれぞれ U, V の基底とする. いま, mn 個の元 $u_1 \otimes m_1, \ldots, u_1 \otimes v_m, \ldots, u_n \otimes v_1, \ldots, u_n \otimes v_m$ を基底とする vector 空間を W とし, $\iota : U \times V \longrightarrow W$ を次のように与える.

$$\iota\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j, \sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} a_j b_k (u_j \otimes v_k), \quad a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}.$$

このとき, W は U と V の tensor 積である.

<u>証明</u>. X を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間, $\Phi : U \times V \longrightarrow X$ を双線形写像とする. このとき, 線形写像 $F : W \longrightarrow X$ を次のように定める.

$$F\left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} c_{j,k} (u_j \otimes v_k)\right) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} c_{j,k} \Phi(u_j, v_k), \quad c_{j,k} \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n. \quad (1.10)$$

すると, F が線形写像であることは容易にわかる. また, 任意の複素数 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}(F \circ \iota)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j, \sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right) &= F\left(\iota\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j, \sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right)\right) = F\left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq kleqm}} a_j b_k (u_j \otimes v_k)\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} a_j b_k \Phi(u_j, v_k) = \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j, \sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right).\end{aligned}$$

ゆえに, $F \circ \iota = \Phi$ が成り立つ. 逆に, $F \circ \iota = \Phi$ が成り立つとすると, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$ なる任意の整数 j, k について, 次が成り立つ.

$$F(u_j \otimes v_k) = F(\iota(u_j, v_k)) = (F \circ \iota)(u_j, v_k) = \Phi(u_j, v_k).$$

ゆえに, (1.10) が得られる. 従って, F はただ 1 通りに定められる. 以上により, W は U と V の tensor 積である. ■

定理 1.29 の構成法は, もとの vector 空間の基底に依存している形であるが, 実は基底のとり方には依存しない.

命題 1.30 U, V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim U = n > 0$, $\dim V = m > 0$, $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$, $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ をそれぞれ U, V の基底とし, $\iota : U \times V \longrightarrow U \otimes V$ を定義1.27の (T) で与えられる双線形写像とする．いま, $u \in U$, $v \in V$ に対して, $\iota(u, v) \in U \otimes V$ を $u \otimes v$ と表すことにする．特に, $u = u_j\,(1 \leq j \leq n)$,　かつ $v = v_k\,(1 \leq k \leq m)$ のときは, $U \otimes V$ の定義を構成するときの $u_j \otimes v_k$ と一致する．

(1) 任意の $u, u' \in U$, $v, v' \in V$, $c \in \mathbb{C}$ に対して, 以下のことが成り立つ．

$$(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v, \quad u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v, \tag{1.11}$$

$$(cu) \otimes v = u \otimes (cv) = c(u \otimes v). \tag{1.12}$$

(2) $U \otimes V$ は U, V の基底のとり方に依らずに定めることができる．特に, 任意の $u \in U$, $v \in V$ について, いかなる U, V の基底に対しても, その基底から得られる $u \otimes v \in U \otimes V$ は同一視される．

証明. (1) $u, u' \in U$, $v \in V$, $c \in \mathbb{C}$ について, 次が成り立つ．

$$\begin{aligned}(u + u') \otimes v &= \iota(u + u', v) = \iota(u, v) + \iota(u', v) = u \otimes v + u' \otimes v,\\ (cu) \otimes v &= \iota(cu, v) = c\iota(u, v) = c(u \otimes v).\end{aligned}$$

同様にして, $u \in U$, $v, v' \in V$, $c \in \mathbb{C}$ に対して, $u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v'$, $u \otimes (cv) = c(u \otimes v)$ が得られる．

(2) $\{u'_1, \ldots, u'_n\} \subset U$, $\{v'_1, \ldots, v'_m\} \subset V$ をそれぞれ U, V の基底とする．そして, この基底から得られる tensor 積を $U \otimes' V$, 双線形写像を $\iota' : U \times V \longrightarrow U \times' V$ とし, 任意の $u \in U$, $v \in V$ について, $\iota'(u, v) = u \otimes' v \in U \otimes' V$ と表すことにする．ここで, (1) より ι' は双線形であるから, 線形写像 $F : U \otimes V \longrightarrow U \otimes' V$ で $\iota' = F \circ \iota$ なるものがただ 1 つ存在する．このとき, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$ なる任意の整数 j, k について, 次が成り立つ．

$$F(u_j \otimes v_k) = F(\iota(u_j, v_k)) = (F \circ \iota)(u_j, v_k) = \iota'(u_j, v_k) = u_j \otimes' v_k.$$

$\{u_j \otimes v_k\,;\, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ は $U \otimes V$ の基底であるから, 次が得られる．

$$\begin{aligned}F\left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq n\\ 1 \leq k \leq m}} c_{j,k}(u_j \otimes v_k)\right) &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n\\ 1 \leq k \leq m}} c_{j,k} F(u_j \otimes v_k)\\ &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n\\ 1 \leq k \leq m}} c_{j,k}(u_j \otimes' v_k), \quad c_{j,k} \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m.\end{aligned}$$

同様にして, 線形写像 $F' : U \otimes' V \longrightarrow U \otimes V$ で, $\iota = F' \circ \iota'$ なるものがただ 1 つ存在し, 定理 1.29 の証明より, $F' = F^{-1}$ であり, F は線形同型写像である．さらに, 任意の

$u=\sum_{j=1}^{n} a_j u_j \in U$, $v=\sum_{k=1}^{m} b_k v_k \in V$ について, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
F(u\otimes v) &= F\left(\sum_{j=1}^{n} a_k u_j, \sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right) = \sum_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le m}} a_j b_k F(u_j\otimes v_k)\\
&= \sum_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le m}} a_j b_k (u_j \otimes' v_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j u_j\right)\otimes'\left(\sum_{k=1}^{m} b_k v_k\right) = u\otimes' v.
\end{aligned}
$$

従って, $u\otimes v\in U\otimes V$ と $u\otimes' v\in U\otimes' V$ は F により自然に同一視される. ■

ここで, tensor 積と vector 空間の直和の関係について述べる.

定理 1.31 (1) l を正整数, $U_1\ \ldots, U_l, V$ をそれぞれ $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元 vector 空間とする. このとき, 次が成り立つ.

$$
\left(\bigoplus_{j=1}^{l} U_j\right)\otimes V \simeq \bigoplus_{j=1}^{l}(U_j\otimes V). \tag{1.13}
$$

l を正整数, $U, V_1, \ldots, V_l$ をそれぞれ $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元 vector 空間とする. このとき, 次が成り立つ.

$$
U\otimes\left(\bigoplus_{k=1}^{l} V_k\right) \simeq \bigoplus_{k=1}^{l}(U\otimes V_k). \tag{1.14}
$$

証明. まず, (1) を示す. $1\le j\le l$ なる整数 j に対して, $\dim U_j = n_j > 0$ とし, $\{u_1^{(j)}, \ldots, u_{n_j}^{(j)}\}\subset U_j$ を U_j の基底とする. すると, $\{u_p^{(j)}\,;\, 1\le j\le l, 1\le p\le n_j\}\subset U$ は U の基底になる. さらに, $\dim V = m > 0$ とし, $\{v_1,\ldots,v_m\}\subset V$ を V の基底とする. すると, $1\le j\le l$ なる任意の整数 j について, $\{u_p^{(j)}\otimes v_k\in U_j\otimes V\,;\, 1\le p\le n_j, 1\le k\le m\}\subset U_j\otimes V$ は $U_j\otimes V$ の基底であり, $\{u_p^{(j)}\otimes v_k\in U\times V\,;\, 1\le j\le l, 1\le p\le n_j, 1\le k\le m\}\subset U\otimes V$ は $U\otimes V$ の基底である. そこで, 写像 $F : \left(\bigoplus_{j=1}^{l} U_j\right)\otimes V \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{l}(U_j\otimes V)$ を次のように定義する.

$$
F\left(\sum_{\substack{1\le p\le n_1\\ 1\le k\le m}} c_{p,k}^{(1)}(u_p^{(1)}\otimes v_k), \ldots, \sum_{\substack{1\le p\le n_l\\ 1\le k\le m}} c_{p,k}^{(l)}(u_p^{(l)}\otimes v_k)\right) = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{\substack{1\le p\le n_j\\ 1\le k\le m}} c_{p,k}^{(j)}(u_p^{(j)}\otimes v_k)\right). \tag{1.15}
$$

ここで, $c_{p,k}^{(j)}\in\mathbb{C}$ $(1\le j\le l,\ 1\le p\le n_j,\ 1\le k\le m)$ である. すると, F は線形写像であり, 全射であることも容易に分かる. さらに, $\{u_p^{(j)}\otimes v_k\in U\times V\,;\, 1\le j\le l, 1\le p\le n_j, 1\le k\le m\}\subset U\otimes V$ が $U\otimes V$ の基底であることより, (1.15) の左辺が 0 であるなら

ば, $1 \leq j \leq l$, $1 \leq p \leq n_j$, $1 \leq k \leq m$ なる任意の整数 j, p, k について $c^{(j)}_{p,k} =$ となる．よって, $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j について, $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq p\leq n_j\\1\leq k\leq m}} c^{(j)}_{p,k}(u^{(j)}_p \otimes v_k) = 0$ となる．従って, F は単射であることが分かる．以上により, F は線形同型写像である．(2) についても全く同様に示すことができる．■

ここで, U, V を $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元 vector 空間, W を $\mathbb{C}$ 上の 1 次元 vector 空間とし, $w \in W$ を W の 0 でない元とする．すると, $W = \mathbb{C}w$ であり, 次のことが分かる．

$$\mathbb{C}w \otimes V = \{w \otimes v \in W \otimes V\,;\, v \in V\},$$
$$U \otimes \mathbb{C}w = \{u \otimes w \in U \otimes W\,;\, u \in U\}.$$

系 1.32 U, V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間で, $\dim U = n > 0$, $\dim V = m > 0$ であるとする．

(1) $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$ を U の基底とするとき, 次が成り立つ．

$$U \otimes V \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} (\mathbb{C}u_j \otimes V) = \bigoplus_{j=1}^{n} \{u_j \otimes v_j\,;\, v_j \in V\}. \tag{1.16}$$

(2) $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ を V の基底とするとき, 次が成り立つ．

$$U \otimes V \simeq \bigoplus_{k=1}^{n} (U \otimes \mathbb{C}v_k) = \bigoplus_{k=1}^{m} \{u_k \otimes v_k\,;\, u_k \in U\}. \tag{1.17}$$

証明. (1) は, $U = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}u_j$ および定理 1.31 (1) より, (2) は $V = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{m} \mathbb{C}v_k$ および定理 1.31 (2) より得られる．■

vector 空間の tensor 積に対応して, 線形写像の tensor 積も考えることができる．

定理 1.33 U, U', V, V' を $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元 vector 空間, $F : U \longrightarrow U'$, $G : V \longrightarrow V'$ を線形写像とする．

(1) 写像 $H : U \times V \longrightarrow U' \otimes V'$ を次のように定義する．

$$H(u, v) = F(u) \otimes G(v), \quad u \in U,\, v \in V. \tag{1.18}$$

このとき, H は双線形写像である．

(2) 線形写像 $\Phi : U \otimes V \longrightarrow U' \otimes V$ で, $H = \Phi \circ \iota$, 即ち, 次の性質をみたすものがただ 1 つ存在する．

$$\Phi(u \otimes v) = F(u) \otimes G(v), \quad u \in U,\, v \in V. \tag{1.19}$$

ここで, $\iota : U \times V \longrightarrow U \otimes V$ は定義 1.27 の (T) で与えられる双線形写像とする．この Φ を $F \otimes G$ と表し, 線形写像 F と G の **tensor 積**と呼ぶ．

証明. (1) $u, u' \in U$, $v, v' \in V$, $c \in \mathbb{C}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
H(u+u', v) &= F(u+u') \otimes G(v) = (F(u) + F(u')) \otimes G(v) \\
&= F(u) \otimes G(v) + F(u' \otimes) G(v) = H(u, v) + H(u', v), \\
H(u, v+v') &= F(u) \otimes G(v+v') = F(u) \otimes (G(v) + G(v')) \\
&= F(u) \otimes G(v) + F(u) \otimes G(v') = H(u, v) + H(u, v'), \\
H(cu, v) &= F(cu) \otimes G(v) = (cF(u)) \otimes G(v) \\
&= c(F(u) \otimes G(v)) = c(H(u, v)) \\
&= F(u) \otimes (cG(v)) = F(u) \otimes G(cv) = H(u, cv).
\end{aligned}$$

従って, H は双線形写像である.

(2) $H : U \times V \longrightarrow U' \otimes V'$ は双線形写像であるから, 定理 1.28 より, $H = \varPhi \circ \iota$ とみたす線形写像 $\varPhi : U \otimes V \longrightarrow U' \otimes V'$ がただ 1 つ存在する. このとき, 任意の $u \in U$, $v \in V$ について, 次が成り立つ.

$$\varPhi(u \otimes v) = \varPhi(\iota(u, v)) = (\varPhi \circ \iota)(u, v) = H(u, v) = F(u) \otimes G(v).$$

■

線形写像の tensor 積の性質は, 多くの場合 tensor 積の普遍性を用いて示される.

命題 1.34 (1) U, U', U'', V, V', V'' を $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元 vector 空間とし, $F : U \longrightarrow U'$, $F' : U' \longrightarrow U''$, $G : V \longrightarrow V'$, $G' : V' \longrightarrow V''$ を線形写像とする. このとき, 次が成り立つ.

$$(F' \circ F) \otimes (G' \circ G) = (F' \otimes G') \circ (F \otimes G). \tag{1.20}$$

(2) U, V を $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元 vector 空間とする. このとき, 次のことが成り立つ.

$$\mathrm{Id}_{U \otimes V} = \mathrm{Id}_U \otimes \mathrm{Id}_V. \tag{1.21}$$

(3) U, U', V, V' を $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない vector 空間とし, $F : U \longrightarrow U'$, $G' : V \longrightarrow V'$ を線形同型写像とする. このとき, $F \otimes G : U \otimes V \longrightarrow U' \otimes V'$ も線形同型写像であり, 次が成り立つ.

$$(F \otimes G)^{-1} = F^{-1} \otimes G^{-1}. \tag{1.22}$$

証明. (1) $F' \circ F : U \longrightarrow U''$, $G' \circ G : V \longrightarrow V''$ はいずれも線形写像である. よって, 定理 1.33 より, 線形写像 $(F' \circ F) \otimes (G' \circ G) : U \otimes V \longrightarrow U'' \otimes V''$ で, 次の性質をみたすものがただ 1 つ存在する.

$$((F' \circ F) \otimes (G' \circ G))(u \otimes v) = ((F' \circ F)(u)) \otimes ((G' \circ G)(v)), \quad u \in U,\, v \in V.$$

また, 任意の $u \in U$, $v \in V$ について, $F(u) \in U'$, $G(v) \in G'$ であるから, 定理 1.33 より, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
((F' \circ F)(u)) \otimes ((G' \circ G)(v)) &= (F'(F(u))) \otimes (G'(G(v))) = (F' \otimes G')(F(u) \otimes G(v)) \\
&= (F' \otimes G')((F \otimes G)(u \otimes v)) \\
&= ((F' \otimes G') \circ (F \otimes G))(u \otimes v).
\end{aligned}
$$

ゆえに, $(F' \circ F) \otimes (G' \circ G) = (F' \otimes G') \circ (F \otimes G)$ が得られる.

(2) $\mathrm{Id}_{U \otimes V}$ は $U \otimes V$ 上の恒等写像であるから, 任意の $u \in U$, $v \in V$ に対して, $\mathrm{Id}_{U \otimes V}(u \otimes v) = u \otimes v$ が成り立つ. また, $\mathrm{Id}_U(u) = u$, $\mathrm{Id}_V(v) = v$ であるから, 次が得られる.

$$
(\mathrm{Id}_U \otimes \mathrm{Id}_V)(u \otimes v) = \mathrm{Id}_U(u) \otimes \mathrm{Id}_V(v) = u \otimes v.
$$

よって, $\mathrm{Id}_{U \otimes V} = \mathrm{Id}_U \otimes \mathrm{Id}_V$ が成り立つ.

(3) F, G はいずれも線形同型写像であるから, それぞれの逆写像 $F^{-1} : U' \longrightarrow U$, $G^{-1} : V' \longrightarrow V$ が存在して, いずれも線形写像である. このとき, (1) (2) より, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
(F^{-1} \otimes G^{-1}) \circ (F \otimes G) &= (F^{-1} \circ F) \otimes (G^{-1} \circ G) = \mathrm{Id}_U \otimes \mathrm{Id}_V = \mathrm{Id}_{U \otimes V}, \\
(F \otimes G) \circ (F^{-1} \otimes G^{-1}) &= (F \circ F^{-1}) \otimes (G \circ G^{-1}) = \mathrm{Id}_{U'} \otimes \mathrm{Id}_{V'} = \mathrm{Id}_{U' \otimes V'}.
\end{aligned}
$$

従って, $(F \otimes G)^{-1} = F^{-1} \otimes G^{-1}$ であり, $F \otimes G$ は線形同型写像である. ■

2 つの線形写像の tensor 積である線形写像の表現行列は, それぞれの線形写像の表現行列より構成することができる. そのために, 行列の Kronecker 積を定義する.

定義 1.35 n, n', m, n' を正整数とし, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n'} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n'} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m'} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,m'} \end{pmatrix}$ をそれぞれ複素 (n, n') 行列, (m, m') 行列とする. このとき, 次で与えられる複素 $(nm, n'm')$ 行列を A と B の **Kronecker 積**と呼び, $A \otimes B$ と表す.

$$
\begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n'}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n'}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
a_{1,1}b_{1,1} & \cdots & a_{1,1}b_{1,m'} & \cdots & a_{1,n'}b_{1,1} & \cdots & a_{1,n'}b_{1,m'} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{1,1}b_{m,1} & \cdots & a_{1,1}b_{m,m'} & \cdots & a_{1,n'}b_{m,1} & \cdots & a_{1,n'}b_{m,m'} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1}b_{1,1} & \cdots & a_{n,1}b_{1,m'} & \cdots & a_{n,1}b_{m,1} & \cdots & a_{n,1}b_{m,m'} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1}b_{m,1} & \cdots & a_{n,1}b_{m,m'} & \cdots & a_{n,n'}b_{m,m'} & \cdots & a_{n,n'}b_{m,m'}
\end{pmatrix}. \quad (1.23)
$$

定理 1.36 U, U', V, V' を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim U = n > 0$, $\dim U' = n' > 0$, $\dim V = m > 0$, $\dim V' = m' > 0$ とし, $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$, $\{u'_1, \ldots, u'_{n'}\} \subset U'$, $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$, $\{v'_1, \ldots, v'_{m'}\} \subset V'$ をそれぞれ U, U', V, V' の基底とする．いま, $F : U \longrightarrow U'$, $G : V \longrightarrow V'$ を線形写像とし, F の $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{u'_1, \ldots u'_{n'}\}$ に関する表現行列を A, G の $\{v_1, \ldots, v_m\}$, $v'_1, \ldots, v'_{m'}\}$ に関する表現行列を B とする．このとき, F と G の tensor 積 $F \otimes G$ の $\{u_j \otimes v_k \in U \otimes V\,;\, 1 \le j \le n, 1 \le k \le m\} \subset U \otimes V$, $\{u'_j \otimes v'_k \in U' \otimes V'\,;\, 1 \le j \le n', 1 \le k \le m'\} \subset U' \otimes V'$ に関する表現行列は A と B の Kronecker 積 $A \otimes B$ である．

<u>証明</u>. $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n',1} & \cdots & a_{n',n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m',1} & \cdots & b_{m',m} \end{pmatrix}$ とする．すると, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le m$ なる整数 j, k について, 次が成り立つ.

$$F(u_j) = \sum_{l=1}^{n'} a_{l,j} u'_l, \quad G(v_k) = \sum_{p=1}^{m'} b_{p,k} v'_p.$$

ゆえに, 次が得られる.

$$\begin{aligned}(F \otimes G)(u_j \otimes v_k) = F(u_j) \otimes G(v_k) &= \left(\sum_{l=1}^{n'} a_{l,j} u'_l\right) \otimes \left(\sum_{p=1}^{m'} b_{p,k} v'_p\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \le l \le n' \\ 1 \le p \le m'}} a_{l,j} b_{p,k} (u'_l \otimes v'_p).\end{aligned}$$

よって, $F \otimes G$ の $\{u_j \otimes v_k\,;\, 1 \le j \le n, 1 \le k \le m\}$, $\{u'_j \otimes v'_k\,;\, 1 \le j \le n', 1 \le k \le m'\}$ に関する表現行列は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & \cdots & a_{1,1}b_{1,m} & \cdots & a_{1,n}b_{1,1} & \cdots & a_{1,n}b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,1}b_{m',1} & \cdots & a_{1,1}b_{m',m} & \cdots & a_{1,n}b_{m',1} & \cdots & a_{1,n}b_{m',m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n',1}b_{1,1} & \cdots & a_{n',1}b_{1,m} & \cdots & a_{n',n}b_{1,1} & \cdots & a_{n',n}b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n',1}b_{m',1} & \cdots & a_{n',1}b_{m',m} & \cdots & a_{n',n}b_{m',1} & \cdots & a_{n',n}b_{m',m} \end{pmatrix} = A \otimes B. \tag{1.24}$$

■

線形写像の tensor 積と射影, 埋め込みは, 線形写像の表現行列の Kronecker 積により結びつく.

定理 1.37 U, V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector 空間, $\dim U = n > 0$, $\dim V = m > 0$ とし, $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$, $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ をそれぞれ U, V の基底とする．そして, tensor 積の

直和分解 $U \otimes V = \bigoplus_{j=1}^{n} (\mathbb{C}u_j \otimes V)$ に関する埋め込みと射影, $U \otimes V = \bigoplus_{k=1}^{m} (U \otimes \mathbb{C}v_k)$ に関する埋め込みと射影を次のように表すことにする.

$$\iota_j^V : \mathbb{C}u_j \otimes V \longrightarrow U \otimes V, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{1.25}$$

$$\pi_j^V : U \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}u_j \otimes V, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{1.26}$$

$$\iota_k^U : U \otimes \mathbb{C}v_k \longrightarrow U \otimes V, \quad 1 \leq k \leq m, \tag{1.27}$$

$$\pi_k^U : U \otimes V \longrightarrow U \otimes \mathbb{C}v_k, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{1.28}$$

いま, $F : U \longrightarrow U$, $G : V \longrightarrow V$ をともに線形写像とし, F, G の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ に関する行列表示をそれぞれ $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,m} \end{pmatrix}$ とする.

(1) $1 \leq l \leq n$ なる任意の整数 l について, $v \in V$ と $u_l \otimes v \in \mathbb{C}u_l \otimes V$ を同一視することにより, V と $\mathbb{C}u_l \otimes V$ を同一視する. このとき, $1 \leq j, k \leq n$ なる任意の整数 j, k について, $\pi_j^V \circ (F \otimes G) \circ \iota_k^V$ の $\{v_1, \ldots, v_m\}$ に関する表現行列は $a_{j,k}B$ である.

(2) $1 \leq l \leq m$ なる任意の整数 m について, $u \in U$ と $u \otimes v_l \in U \otimes \mathbb{C}v_l$ を同一視することにより, U と $U \otimes \mathbb{C}v_l$ を同一視する. このとき, $1 \leq j, k \leq m$ なる任意の整数 j, k について, $\pi_j^U \circ (F \otimes G) \circ \iota_k^U$ の $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に関する表現行列は $b_{j,k}A$ である.

証明. (1) $1 \leq j, k \leq n$ なる整数 j, k を固定する. このとき, 定理 1.36 の証明より, $1 \leq l \leq m$ なる任意の整数 l について, 次が成り立つ.

$$((F \otimes G) \circ \iota_k^V)(u_k \otimes v_l) = (F \otimes G)(u_k \otimes v_l) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq j \\ 1 \leq q \leq n}} a_{p,k} b_{q,l} (u_p \otimes v_q).$$

よって, 次が得られる.

$$\begin{aligned} (\pi_j^V \circ (F \otimes G) \circ \iota_k^V)(u_k \otimes v_l) &= \pi_j^V \left(\sum_{\substack{1 \leq p \leq j \\ 1 \leq q \leq m}} a_{p,k} b_{q,l} (u_p \otimes v_q) \right) \\ &= \sum_{q=1}^{m} a_{j,k} b_{q,l} (u_j \otimes v_q). \end{aligned}$$

ゆえに, 次が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} &(\pi_j^V \circ (F \otimes G) \circ \iota_k^V (u_k \otimes v_1), \ldots, \pi_j^V \circ (F \otimes G) \circ \iota_k^V (u_k \otimes v_m)) \\ &= (u_j \otimes v_1, \ldots, u_j \otimes v_m) \begin{pmatrix} a_{j,k} b_{1,1} & \cdots & a_{j,k} b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,k} b_{m,1} & \cdots & a_{j,k} b_{m,m} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって, V と $\mathbb{C}_j \otimes V$ における $v \in V$ と $u_j \otimes v \in \mathbb{C}v_j \otimes V$ の同一視および, V と $\mathbb{C}u_k \otimes V$ における $v \in V$ と $u_k \otimes v \in \mathbb{C}u_k \otimes V$ の同一視により, $\pi_j^V \circ (F \otimes G) \circ \iota_k^V$ の $\{v_1, \ldots, v_m\}$ に関する表現行列は, $\begin{pmatrix} a_{j,k}b_{1,1} & \cdots & a_{j,k}b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j,k}b_{m,1} & \cdots & a_{j,k}b_{m,m} \end{pmatrix} = a_{j,k}B$ であることが分かる.

(2) U と V, F と G の立場を入れ替えることにより, (1) と同様に示すことができる. ■