

2011年度 **離散数学** (後期火曜3限)  
講義資料

## 目次

この講義資料について	2
<b>1 導入と予備知識.</b>	<b>3</b>
1.1 導入. . . . .	3
1.2 群論の基礎事項. . . . .	19
1.3 線形代数学の復習. . . . .	47
1.4 行列のなす群. . . . .	69
<b>2 有限群の表現.</b>	<b>77</b>
2.1 定義と基本的性質. . . . .	77
2.2 Schur の補題. . . . .	101
2.3 指標. . . . .	109

## この講義資料について

これは, 2011 年度和歌山大学教育学部で開講される「離散数学」の講義を円滑に進めるための資料である. 資料といっても, 定義や定理, 計算結果などの羅列や箇条書きではなく, 教科書の代わりになることを目指して, 必要に応じて証明をつけている. この講義を履修する場合は, 一つ一つの定理や式変形に対して, ノートで実際に手を動かすことにより, 内容の理解を深めてもらいたい.

都合により, この講義資料は講義と同時進行で作成していく予定である. 新たに原稿を付け加える場合には, 講義時に連絡する予定である. また, 原稿が更新されるごとに目次も更新されるので, 必要に応じて表紙を差し替えてもらえると幸いである.

これも都合により, 本文中にほとんど図を載せない予定である. また, ページ数の具合により, 随所に余白を挿入する予定である. 講義時に板書等で与えた図等をその余白に書き込むのもよいであろう.

なお, この講義資料の最新版を以下の Web ページにて公開する予定である.

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kikuchi/parttime/wakayama2011/dis/2011dis.html>

最終版は 2012 年 1 月末か 2 月初めに完成する予定である.

# 1 導入と予備知識.

群とは、性質のよい“乗法”をもつ集合のことである。群は、その元の個数により有限群と無限群に分けられる。有限群はしばしば有限個の対象の間の対称性を表すが、その有限群を敢えて無限群に“写し込む”ことにより、対象の間の対称性がより鮮明になることがある。この“写し込み”のことを群の表現と呼ぶ。ここでは、群の表現の具体例を挙げた後に、群論や線形代数学の必要事項を述べ、さらに行列のなす群の例を与える。

## 1.1 導入.

自然科学や社会科学において、非常に多くの対象からなる現象を扱うことがある。その全体像をつかむために、現象の特徴を与える幾つかの“量”を求めることがある。その代表が「平均」(「期待値」とも言う)や、「分散」(あるいはその平方根である「標準偏差」)であろう。これらの量を、対称性という観点から眺めてみる。

$n$  を正整数とし、 $n$  個の対象すべてに 1 から  $n$  までの異なる番号がついているとする。対象を  $\omega_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) と表し、対象全体の集合を  $\Omega = \{\omega_j; 1 \leq j \leq n\}$  とする。各対象について、ある量を測定したとする。このような測定は、 $\Omega$  上の関数  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  と定式化されることが多い。しばしば、 $\Omega, X$  はそれぞれ標本空間、確率変数と呼ばれる。 $1 \leq j \leq n$  なる  $j$  について、 $\omega_j$  の測定値を  $x_j = X(\omega_j)$  とする。各対象が互いに“対等”であるとき、平均  $E(X)$ 、分散  $V(X)$  は次のように表される。

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \quad (1.1)$$

$$V(X) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - E(X))^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2 - E(X)^2. \quad (1.2)$$

$E(X), V(X)$  は  $x_1, \dots, x_n$  の多項式と考えられる。より詳しく言うと、 $E(X)$  は定数項のない 1 次式、 $V(X)$  は 1 次の項と定数項のない 2 次式である。これらはいずれも斉次多項式と呼ばれる。さらに重要なのは、 $E(X), V(X)$  いずれも対称式、即ち、相異なる  $j, k$  について、 $x_j$  と  $x_k$  を取り換えても式として変わらない多項式である。

対称式の中で重要なものとして、基本対称式と呼ばれるものがある。 $1 \leq k \leq n$  なる整数  $k$  について、 $k$  次基本対称式  $s_k$  とは、以下で与えられるものである。

$$s_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k} = x_1 x_2 \cdots x_k + \cdots + x_{n-k+1} x_{n-k+2} \cdots x_n.$$

$s_k$  は  $x_1, \dots, x_n$  の中から相異なる  $k$  個の元をとり出すすべての組合せを考え、各組合せごとに積をとり、それらをすべてたし合わせたものである。その定義から、 $s_k$  は  $k$  次斉次対

称式であることがわかる. 例えば,  $s_1, s_2$  や  $s_n$  は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + \cdots + x_n, \\ s_2 &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} x_{j_1} x_{j_2} = x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n, \\ s_n &= x_1 \cdots x_n. \end{aligned}$$

基本対称式が対称多項式の中で重要であることは, 次の定理より分かる.

**定理 1.1**  $n$  を正整数とする. このとき,  $n$  変数  $x_1, \dots, x_n$  の対称多項式は, 基本対称式  $s_1, \dots, s_n$  の多項式として一意的に表される (対称式の基本定理).

例えば  $E(X) = \frac{1}{n}s_1$  である. また,  $V(X)$  の第 2 の表示式において  $\sum_{j=1}^n x_j^2 = s_1^2 - 2s_2$  であることを用いると,  $V(X) = \frac{n-1}{n^2}s_1^2 - \frac{2}{n}s_2$  である.  $1 \leq k \leq n$  なる整数について,  $s_k$  は  $x_1, \dots, x_n$  の多項式として  $k$  次斉次多項式であるから,  $s_1, \dots, s_n$  の単項式はすべて  $x_1, \dots, x_n$  の斉次多項式である. このうち,  $x_1, \dots, x_n$  の 1 次斉次多項式となるのは  $s_1$  のみであるから, 複素係数 1 次斉次対称式は  $s_1$  の定数倍のみである. また,  $x_1, \dots, x_n$  の 2 次斉次多項式となるのは  $s_1^2, s_2$  のみである. よって, 複素係数 2 次斉次対称式は,  $s_1^2, s_2$  の一次結合で表される. また,  $s_1^2, s_2$  における  $x_1^2$  の係数を考えることにより,  $s_1^2, s_2$  は一次独立であることも分かる. 逆に,  $s_1 = nE(X)$  であり,  $\frac{2}{n}s_2 = \frac{n-1}{n^2}s_1^2 - V(X) = (n-1)E(X)^2 - V(X)$  であるから,  $s_1^2$  および  $s_2$  は  $E(X)^2$  と  $V(X)$  の一次結合で表される. よって,  $x_1, \dots, x_n$  についての高々 2 次の対称多項式は,  $E(X), V(X)$  の多項式で表される. これは,  $E(X), V(X)$  の重要性の一つの根拠である.

ここまでは, 話が対称多項式に限られていたが, 対称式以外の多項式たちは, 文字の番号の付け替えをしたとき, どのような振る舞いをするのだろうか.

そこで, 話を整理するために, 幾つか記号を与え, それに関わる概念を思い出していく.  $n$  個の変数  $x_1, \dots, x_n$  の複素係数多項式全体のなす複素 vector 空間を  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  と表す. さらに, 非負整数  $k$  について, 複素係数  $k$  次斉次多項式全体 (0 も含む), 即ち,  $k$  次単項式の複素係数一次結合で表される多項式全体のなす  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  の部分 vector 空間を  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k$  と表すことにする. 文字の番号の付け替えは, 番号全体のなす集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  上の置換である. 即ち,  $n$  次の置換  $\sigma$  により  $1 \leq j \leq n$  なる整数  $j$  について  $x_j$  を  $x_{\sigma(j)}$  に替える操作と考えることができる. そこで, 多項式  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  および  $n$  次の置換  $\sigma$  に対して, 多項式  $\sigma f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を次のように定義する.

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \quad (1.3)$$

例えば,  $n = 3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_1x_3$  で,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  のとき,  $\sigma f(x_1, x_2, x_3) = x_{\sigma(2)}^2 + x_{\sigma(1)}x_{\sigma(3)} = x_3^2 + x_2x_1$  となる. この定義により, 複素係数  $n$  変数多項式  $f, g$  および複素数  $a \in \mathbb{C}$  について, 次が成り立つことが分かる.

$$\sigma(f + g) = \sigma f + \sigma g, \quad (1.4)$$

$$\sigma(af) = a\sigma f. \quad (1.5)$$

この操作により,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  上の写像  $\pi(\sigma)$  を考えることができる.

$$\pi(\sigma) : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \quad f \mapsto \sigma f. \quad (1.6)$$

(1.4), (1.5) より,  $\pi(\sigma)$  は  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  上の線形写像である. また,  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を単項式とすると,  $\sigma f$  も単項式になる. より詳しく言うと,  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$  ( $a_1, \dots, a_n$  は非負整数) とするとき,  $\sigma f = x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_n}$  となる. このことと  $\pi(\sigma)$  の線形性より,  $k$  を非負整数,  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を  $k$  次斉次多項式とすると,  $\sigma f$  も  $k$  次斉次多項式である. これは,  $\pi(\sigma)\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k$  とも表される. そこで,  $\pi(\sigma)$  の定義域および終域を  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k$  に制限したものを  $\pi^{(k)}(\sigma)$  と表すことにする.

$$\pi^{(k)}(\sigma) : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k, \quad f \mapsto \sigma f. \quad (1.7)$$

なお,  $\dim \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k = \binom{n+k-1}{n-1}$  であり, 特に,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k$  は有限次元である.

置換により多項式が写る様子を考えると, 単独の置換を扱うのではなく, 置換全体がどのように多項式を写し変えるかを調べることで, よりたくさんの情報を得ることができる. その  $n$  次の置換全体を  $n$  次対称群と呼び, しばしば  $S_n$ , あるいは  $\mathfrak{S}_n$  などと表される.  $S_n$  の元は  $\{1, \dots, n\}$  上の写像であるから, 写像の合成を考えることができる. 即ち,  $\sigma, \tau \in S_n$  について,  $\sigma\tau(j) = \sigma(\tau(j))$  ( $1 \leq j \leq n$ ) である.  $\sigma\tau$  を  $\sigma$  と  $\tau$  の合成置換と呼ぶ. この写像の合成により,  $S_n$  に乗法を定義することができる. 写像の合成について結合法則が成り立つから, この乗法についても結合法則が成り立つ. また,  $n$  次の恒等置換を  $\iota \in S_n$  とすると任意の  $\sigma \in S_n$  について  $\sigma\iota = \iota\sigma = \sigma$  が成り立つ. さらに,  $\sigma \in S_n$  は  $\{1, \dots, n\}$  上の全単射であるから, 逆写像  $\sigma^{-1}$  が存在する.  $\sigma^{-1}$  を  $\sigma$  の逆置換と呼ぶ. 恒等置換, 逆置換は, 写像の合成により定義される  $S_n$  の乗法に関する単位元と逆元である. このように, 結合法則をみだす乗法をもち, その乗法について単位元が存在し, 任意の元について, その逆元が存在するとき, その集合を群と呼ぶ. この群の乗法と,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  上の線形写像  $\pi(\sigma)$  を作る操作との関係調べる.

**補題 1.2**  $n$  を正整数,  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を  $n$  変数多項式,  $\sigma, \tau \in S_n$  を  $n$  次の置換とする. このとき,  $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$  が成り立つ.

証明.  $g = \tau f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  とする. すると,  $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$  である. また,

$$\sigma(\tau f)(x_1, \dots, x_n) = \sigma g(x_1, \dots, x_n) = g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

ここで,  $y_j = x_{\sigma(j)}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) とおくと,  $\sigma g(x_1, \dots, x_n) = g(y_1, \dots, y_n)$  であるから,  $\sigma g$  は  $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$  における各  $x_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) を  $y_k$  に替えたものである. 特に,  $1 \leq j \leq n$  なる  $j$  について,  $x_{\tau(j)}$  を  $y_{\tau(j)} = x_{\sigma(\tau(j))} = x_{(\sigma\tau)(j)}$  に替えることになるから,

$$\begin{aligned} \sigma(\tau f)(x_1, \dots, x_n) &= \sigma g(x_1, \dots, x_n) = g(y_1, \dots, y_n) \\ &= f(y_{\tau(1)}, \dots, y_{\tau(n)}) = f(x_{\sigma(\tau(1))}, \dots, x_{\sigma(\tau(n))}) \\ &= f(x_{(\sigma\tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma\tau)(n)}) = (\sigma\tau)f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

従って,  $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau)f$  であることが分かる. ■

また, 任意の多項式  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  は, 恒等置換  $\iota$  により自分自身  $\iota f = f$  に写される. これらのことは, 次のように表すことができる.  $\sigma, \tau$  を  $n$  次の置換,  $\iota$  を  $n$  次の恒等置換とすると, 次が成り立つ.

$$\pi(\sigma\tau) = \pi(\sigma)\pi(\tau), \quad (1.8)$$

$$\pi(\iota) = \text{Id}_{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}. \quad (1.9)$$

ここで,  $\text{Id}_{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}$  は  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  上の恒等写像を表す. これらにより, 任意の  $n$  次の置換  $\sigma$  について,  $\pi(\sigma)\pi(\sigma^{-1}) = \pi(\sigma\sigma^{-1}) = \pi(\iota) = \text{Id}_{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}$  および  $\pi(\sigma^{-1})\pi(\sigma) = \pi(\sigma^{-1}\sigma) = \pi(\iota) = \text{Id}_{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}$  が成り立つ. ゆえに,  $\pi(\sigma)$  は  $\pi(\sigma^{-1})$  を逆写像としてもち, 全単射であることも分かる. さらに,  $\pi(\sigma)$  の定義域, 終域を  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k$  に制限した  $\pi^{(k)}(\sigma)$  についても, 全く同様な操作により,  $\pi^{(k)}(\sigma)$  も  $\pi^{(k)}(\sigma^{-1})$  を逆写像としてもち, 全単射である. ゆえに,  $\pi^{(k)}(\sigma)$  は  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_k$  の基底をとることにより, 正則行列を表現行列としてもつ.

ここで,  $k = 1$  の場合を考える. すると,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}x_n$  であり, 特に,  $n$  次元である.  $n$  次の置換  $\sigma$  について,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_1$  の自然な基底  $x_1, \dots, x_n$  に関する写像  $\pi(\sigma)$  の表現行列を  $A(\sigma)$  とすると,  $A(\sigma)$  は次のように表される.

$$A(\sigma) = (a_{j,k}), \quad \text{ただし,} \quad a_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(k), \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

この行列は置換行列と呼ばれる. この行列自体はきれいな行列であるが,  $\sigma$  を  $S_n$  全体で動かしたとき, 表現行列全体はよい性質をもつ行列の集まりであろうか.

簡単な場合として,  $n = 2$  の場合を考える. 2 次の対称群  $S_2$  は恒等置換  $\iota$  と互換  $\sigma_1 = (1, 2)$  からなる. 線形写像  $\pi^{(1)}(\iota), \pi^{(1)}(\sigma_1)$  の基底  $x_1, x_2$  に関する表現行列を考えると, 次のよう

になる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{C}[x_1, x_2]_1$  の別の基底を考えてみる. 例えば,  $x_1 + x_2, x_1 - x_2$  も  $\mathbb{C}[x_1, x_2]_1$  の基底になる. 恒等置換により得られる線形写像は恒等写像である. 互換  $\sigma_1 = (1, 2)$  については,  $\sigma_1(x_1 + x_2) = x_{\sigma_1(1)} + x_{\sigma_1(2)} = x_1 + x_2, \sigma_1(x_1 - x_2) = x_{\sigma_1(1)} - x_{\sigma_1(2)} = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2)$  となるから, 表現行列は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

これらの行列はいずれも対角行列である. 即ち,  $\iota, \sigma_1$  で与えられる線形写像は同時に対角化される. このことは,  $\mathbb{C}[x_1, x_2]_1$  の基底として,  $x_1, x_2$  よりも,  $x_1 + x_2, x_1 - x_2$  のほうが,  $S_2$  の元から得られる線形写像を表すのに適していることを示している. これは, 次のようにも考えられる.  $W_0 = \mathbb{C}(x_1 + x_2), W_1 = \mathbb{C}(x_1 - x_2)$  とすると,  $\mathbb{C}[x_1, x_2]_1 = W_0 \oplus W_1$  であり,  $W_0, W_1$  はいずれも  $\pi^{(1)}(\iota), \pi^{(1)}(\sigma_1)$  により自分自身に写され,  $W_0$  上では  $\pi^{(1)}(\iota), \pi^{(1)}(\sigma_1)$  いずれも恒等写像,  $W_1$  上では,  $\pi^{(1)}(\iota)$  は恒等写像,  $\pi^{(1)}(\sigma)$  は  $-1$  倍写像である.

それでは,  $n = 3$  のときはどうだろうか.  $n = 2$  のときの  $W_0$  に当たるものは,  $W_0 = \mathbb{C}(x_1 + x_2 + x_3)$  である. 実際,  $f^{(0)} = x_1 + x_2 + x_3$  とすると,  $f^{(0)}$  は 1 次基本対称式  $s_1$  であるから, 任意の 3 次の置換  $\sigma \in S_3$  について,  $\sigma f^{(0)} = f^{(0)}$  である. そして,  $W_1$  に当たるものとして, 次のものをとる.

$$W_1 = \{f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}. \quad (1.10)$$

ここで,  $W_1$  の元  $f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \in W_1$  および 3 次の置換  $\sigma \in S_3$  について,  $\sigma f = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$  とする. このとき, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} \sigma f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = a_1x_{\sigma(1)} + a_2x_{\sigma(2)} + a_3x_{\sigma(3)} \\ &= a_{\sigma^{-1}(1)}x_1 + a_{\sigma^{-1}(2)}x_2 + a_{\sigma^{-1}(3)}x_3. \end{aligned}$$

よって,  $b_j = a_{\sigma^{-1}(j)} \in \mathbb{C}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) であり, 次のようになる.

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_{\sigma^{-1}(1)} + a_{\sigma^{-1}(2)} + a_{\sigma^{-1}(3)} = a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

ゆえに,  $\pi^{(1)}(\sigma)f = \sigma f \in W_1$  となり,  $\pi^{(1)}(\sigma)W_1 \subset W_1$  である. これが任意の  $\sigma \in S_3$  について成り立つから,  $\sigma$  の逆置換  $\sigma^{-1}$  を考えることにより,  $W_1$  は  $\pi^{(1)}(\sigma)$  により  $W_1$  自身に写る. さらに,  $f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \in W_0 \cap W_1$  とすると,  $f \in W_0$  より  $a_1 = a_2 = a_3 = a \in \mathbb{C}$  である.

あり,  $0 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a$  であるから  $a = 0$  である. よって,  $f = 0$  であり,  $W_0 \cap W_1 = \{0\}$  となる. また,  $f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$  について,  $a = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$  とし,  $f_0 = as_1 = a(x_1 + x_2 + x_3) \in W_0$ ,  $f_1 = f - f_0 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$  とすると,  $b_j = a_j - a$  ( $j = 1, 2, 3$ ) であり,

$$b_1 + b_2 + b_3 = (a_1 - a) + (a_2 - a) + (a_3 - a) = (a_1 + a_2 + a_3) - 3a = 0.$$

ゆえに,  $f \in W_1$  であり,  $f = f_0 + f_1$  となる. よって,  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1 = W_0 \oplus W_1$  となる.

ここで,  $W_1$  の基底  $f_1, f_2$  を任意にとり,  $f_0 = f^{(0)} = s_1 \in W_0$  とすると,  $f_0, f_1, f_2$  は  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$  の基底になる. そこで, 任意の 3 次の置換  $\sigma \in S_3$  について基底  $f_0, f_1, f_2$  に関する  $\pi^{(1)}(\sigma)$  の表現行列を考える.  $f_1, f_2 \in W_1$  より,  $\pi^{(1)}(\sigma)f_1, \pi^{(1)}(\sigma)f_2 \in W_1$  である.  $f_1, f_2$  は  $W_1$  の基底であるから,  $\pi^{(1)}(\sigma)f_1, \pi^{(1)}(\sigma)f_2$  は次のように表される.

$$\begin{aligned}\pi^{(1)}(\sigma)f_1 &= b_{1,1}f_1 + b_{2,1}f_2, \\ \pi^{(1)}(\sigma)f_2 &= b_{1,2}f_1 + b_{2,2}f_2.\end{aligned}$$

ここで,  $b_{1,1}, b_{1,2}, b_{2,1}, b_{2,2} \in \mathbb{C}$  である. よって,  $\pi^{(1)}(\sigma)$  の基底  $f_0, f_1, f_2$  に関する表現行列  $A(\sigma)$  は次のような形になる.

$$A(\sigma) = \left( \begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b_{1,1} & b_{1,2} \\ 0 & b_{2,1} & b_{2,2} \end{array} \right). \quad (1.11)$$

ここで重要なのは, 3 次正方行列  $A(\sigma)$  が block に分けられていること, および, 右上と左下の block が零行列になっていることである. この右下の 2 次正方行列を  $B(\sigma)$  と表し, 零行列を  $O$  で表すとすると,  $A(\sigma) = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B(\sigma) \end{pmatrix}$  と表される. さらに,  $\sigma, \tau \in S_3$  について,  $\pi^{(1)}(\sigma\tau) = \pi^{(1)}(\sigma)\pi^{(1)}(\tau)$  であり,  $\pi^{(1)}(\sigma)\pi^{(1)}(\tau)$  の表現行列は  $A(\sigma)A(\tau)$  であるから, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & B(\sigma\tau) \end{pmatrix} &= A(\sigma\tau) = A(\sigma)A(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & B(\sigma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & B(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & B(\sigma)B(\tau) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

よって,  $B(\sigma\tau) = B(\sigma)B(\tau)$  である. また, 3 次の恒等置換  $\iota \in S_3$  について,  $\pi^{(1)}(\iota)f_1 = \iota f_1 = f_1$ ,  $\pi^{(1)}(\iota)f_2 = \iota f_2 = f_2$  であるから,  $B(\iota) = I_2$  (2 次単位行列) である. このような  $B(\sigma)$  ( $\sigma \in S_3$ ) の性質は, 次のようにしても得られる.  $\pi^{(1)}(\sigma)$  により,  $W_1$  はそれ自身に写される. そこで,  $\pi^{(1)}(\sigma)$  の定義域, 終域を  $W_1$  に制限したものを  $\rho_1(\sigma)$  とすると, (1.8), (1.9)



と同様にして, 3 次の置換  $\sigma, \tau \in S_3$  および 3 次の恒等置換  $\iota \in S_3$  について次のことが成り立つ.

$$\rho_1(\sigma\tau) = \rho_1(\sigma)\rho_1(\tau), \quad (1.12)$$

$$\rho_1(\iota) = \text{Id}_{W_1}. \quad (1.13)$$

この  $W_1$  上の線形写像  $\rho_1(\sigma)$  の基底  $f_1, f_2$  に関する表現行列が  $B(\sigma)$  である. よって,  $B(\sigma)$  の上のような性質が得られる.

それでは,  $B(\sigma)$  ( $\sigma \in S_3$ ) はどのような行列であろうか. まず,  $S_3$  の元をすべて列挙する.  $S_3$  の元は, 恒等置換  $\sigma_0 = \iota$ , 3 個の互換  $\sigma_1 = (1, 2)$ ,  $\sigma_2 = (1, 3)$ ,  $\sigma_3 = (2, 3)$  および 2 個の長さ 3 の巡回置換  $\sigma_4 = (1, 2, 3)$ ,  $\sigma_5 = (1, 3, 2)$  である. ここで,  $f_1 = x_1 - x_2$ ,  $f_2 = x_1 - x_3$  とすると,  $f_1, f_2$  は  $W_1$  の基底である. そこで,  $\sigma_j \in S_3$  ( $0 \leq j \leq 5$ ) について,  $W_1$  の基底  $f_1, f_2$  に関する  $\rho_1(\sigma_j)$  の表現行列  $B(\sigma_j)$  を求めると, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

問 1.3 各自上のことを確かめよ.

それでは,  $W_1$  の別の基底をとるとき, 表現行列はどのように変わるだろうか. ここで, 天下りの的ではあるが,  $W_1$  の元  $g_1, g_2 \in W_1$  として次のものを考える.

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 - x_2 - x_3), \quad (1.15)$$

$$g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_3). \quad (1.16)$$

$g_1, g_2 \in W_1$  であること, およびこれが  $W_1$  の基底であることは容易に分かる. ここに現れる  $\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$  は,  $x_1, x_2, x_3$  の係数の 2 乗の和が 1 となるように係数を調整するためにかけた因子である. そこで,  $\rho_1(\sigma_j)$  ( $0 \leq j \leq 5$ ) の基底  $g_1, g_2$  に関する表現行列を  $C(\sigma_j)$  として,  $C(\sigma_j)$  がどのようなになるか考える. まず,  $\rho_1(\sigma_0) = \rho_1(\iota)$  は恒等写像であるから,  $C(\sigma_0) = I_2$  (2 次単位行列) である. よって,  $1 \leq j \leq 5$  とする. この中で最も計算しやすい  $\sigma_3 = (2, 3) \in S_3$  の場合を考える. すると,

$$\rho_1(\sigma_3)g_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 - x_3 - x_2) = g_1, \\ \rho_1(\sigma_3)g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_2) = -g_2.$$

よって,  $C(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  である. 次に,  $\sigma_1 = (1, 2) \in S_3$  をとる. すると,

$$\begin{aligned}\rho_1(\sigma_1)g_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_2 - x_1 - x_3) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 - x_2 - x_3) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_3), \\ \rho_1(\sigma_1)g_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 - x_2 - x_3) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_3).\end{aligned}$$

ゆえに,  $C(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  である. 同様にして,  $C(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  となる. 続いて,  $\sigma_4 = (1, 2, 3) \in S_3$  について考える. すると,

$$\begin{aligned}\rho_1(\sigma_4)g_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_2 - x_3 - x_1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 - x_2 - x_3) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_3), \\ \rho_1(\sigma_4)g_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - x_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_1 - x_2 - x_3) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_3).\end{aligned}$$

よって,  $C(\sigma_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  となる. 同様にして,  $C(\sigma_5) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$  である. まとめて,  $C(\sigma_j)$  ( $0 \leq j \leq 5$ ) は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

問 1.4 (1)  $C(\sigma_3), C(\sigma_5)$  が上で与えられた 2 次正方行列になることを各自確認せよ.  
 (2)  $0 \leq j \leq 5$  なる整数  $j$  について,  $C(\sigma_j)$  で与えられる  $\mathbb{R}^2$  上の線形写像を  $F_j$  とする.

$$F_j : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto C(\sigma_j) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^2$  を座標  $y_1, y_2$  により  $y_1y_2$  平面と考えたとき,  $y_1y_2$  平面上で  $F_0$  は恒等変換,  $F_1, F_2, F_3$  はそれぞれ直線  $y_2 = \sqrt{3}y_1, y_2 = -\sqrt{3}y_1, y_2 = 0$  に関する線対称変換,  $F_4, F_5$  はそれぞれ原点に関する  $\frac{2\pi}{3}$  回転,  $\frac{4\pi}{3}$  回転変換になることを示せ.

$B(\sigma_j), C(\sigma_j)$  たちにはどのような関係があるだろうか. 例えば, それぞれの行列の行列式をとる. すると, 以下のようになる.

$$\det B(\sigma_0)=1, \det B(\sigma_1)=\det B(\sigma_2)=\det B(\sigma_3)=-1, \det B(\sigma_4)=\det B(\sigma_5)=1, \quad (1.18)$$

$$\det C(\sigma_0)=1, \det C(\sigma_1)=\det C(\sigma_2)=\det C(\sigma_3)=-1, \det C(\sigma_4)=\det C(\sigma_5)=1. \quad (1.19)$$

従って,  $\det B(\sigma_j) = \det C(\sigma_j)$  ( $0 \leq j \leq 5$ ) が成り立つ. また, それぞれの行列の trace をとる. すると, 次のようになることが分かる.

$$\operatorname{tr} B(\sigma_0) = 2, \quad \operatorname{tr} B(\sigma_1) = \operatorname{tr} B(\sigma_2) = \operatorname{tr} B(\sigma_3) = 0, \quad \operatorname{tr} B(\sigma_4) = \operatorname{tr} B(\sigma_5) = -1, \quad (1.20)$$

$$\operatorname{tr} C(\sigma_0) = 2, \quad \operatorname{tr} C(\sigma_1) = \operatorname{tr} C(\sigma_2) = \operatorname{tr} C(\sigma_3) = 0, \quad \operatorname{tr} C(\sigma_4) = \operatorname{tr} C(\sigma_5) = -1. \quad (1.21)$$

従って, 次のことが得られる.

$$\operatorname{tr} B(\sigma_j) = \operatorname{tr} C(\sigma_j), \quad 0 \leq j \leq 5. \quad (1.22)$$

これは, 行列や trace が  $W_1$  の基底に依らないことを示している. 実際,  $g_1, g_2$  は  $f_1, f_2$  により次のように表される.

$$(g_1, g_2) = (f_1, f_2)P = (f_1, f_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

$P$  は正則行列であり,  $j$  に依らず次が成り立つことが分かる.

$$C(\sigma_j) = P^{-1}B(\sigma_j)P. \quad (1.24)$$

一般に, 正整数  $m$  について,  $m$  次正方行列  $A$  および  $m$  次正則行列  $P$  について,  $\det P^{-1}AP = \det A$ ,  $\operatorname{tr} P^{-1}AP = \operatorname{tr} A$  であるから, 上の性質が得られる. よって,  $f_1, f_2$  や  $g_1, g_2$  に限らず, 行列式や trace は  $W_1$  の任意の基底に依らず定まる. そこで,  $\det \rho_1(\sigma_j) = \det B(\sigma_j)$  ( $= \det C(\sigma_j)$ ),  $\operatorname{tr} \rho_1(\sigma_j) = \operatorname{tr} B(\sigma_j)$  ( $= \operatorname{tr} C(\sigma_j)$ ) と表すことにすると,  $\det \rho_1(\sigma_j)$ ,  $\operatorname{tr} \rho_1(\sigma)$  は  $W_1$  の基底ではなく,  $W_1$  のみにより定まる値である.

特に,  $\operatorname{tr} \rho_1(\sigma)$  ( $\sigma \in S_3$ ) は興味深い性質をもつ. それは, 次のものである. ここで,  $\#S_3$  は 3 次対称群  $S_3$  の位数  $3! = 6$  を表す.

$$\frac{1}{\#S_3} \sum_{\sigma \in S_3} |\operatorname{tr} \rho_1(\sigma)|^2 = \frac{1}{6}(1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2) = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1. \quad (1.25)$$

このことが, 3 変数の文字の入れ替えについて,  $W_1$  はこれ以上 “分解されない” ことに関係することが後ほど分かる. そして,  $n \geq 4$  なる整数  $n$  についても同様なことが成り立つ.

問 1.5 上の  $W_1$  について,  $W_1 = W' \oplus W''$ ,  $\dim W' = \dim W'' = 1$  かつ  $\rho_1(\sigma)W' = W'$ ,  $\rho_1(\sigma)W'' = W''$  ( $\sigma \in S_3$ ) が成り立つような  $W_1$  の部分 vector 空間が存在しないことを以下の手順で示せ (実は,  $\dim W' = 1$  かつ  $\rho_1(\sigma)W' = W'$  をみたま  $W_1$  の部分 vector 空間が存在しないことが分かる).

(1)  $\rho_1(\sigma_4)\widetilde{W} = \widetilde{W}$  をみたま  $W_1$  の部分 vector 空間  $\widetilde{W}$  は,  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  (1 の原始 3 乗根,  $i = \sqrt{-1}$  は虚数単位) とするとき,  $\widetilde{W}_1 = \mathbb{C}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$ ,  $\widetilde{W}_2 = \mathbb{C}(x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)$  の 2 個のみであることを示す.

(2)  $\rho_1(\sigma_1)\widetilde{W}_1 \not\subset \widetilde{W}_1$ ,  $\rho_1(\sigma_1)\widetilde{W}_2 \not\subset \widetilde{W}_2$  であることを示す.

次に,  $k = 2$  の場合を考える. すると, 正整数  $n$  について  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_2$  は  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, x_1x_2, \dots, x_1x_n, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n$  を基底としてもつ. そこで,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_2$  の部分 vector 空間  $W^{(1)}, W^{(2)} \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_2$  を以下で与える.

$$W^{(1)} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}x_j^2, \quad (1.26)$$

$$W^{(2)} = \bigoplus_{1 \leq j < k \leq n} \mathbb{C}x_jx_k, \quad (1.27)$$

ただし, これらの直和は vector 空間としての直和である. すると,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_2 = W^{(1)} \oplus W^{(2)}$  である. さらに,  $n$  次の置換  $\sigma \in S_n$  および  $1 \leq j \leq n$  なる整数  $j$  について,  $\pi^{(2)}(\sigma)x_j^2 = x_{\sigma(j)}^2 \in W^{(1)}$  であるから,  $\pi^{(2)}(\sigma)W^{(1)} \subset W^{(1)}$  である. また,  $1 \leq j, k \leq n$  かつ  $j \neq k$  なる整数  $j, k$  について,  $\sigma(j) \neq \sigma(k)$  であることより  $\pi^{(2)}(\sigma)x_jx_k = x_{\sigma(j)}x_{\sigma(k)} \in W^{(2)}$  となる. よって,  $\pi^{(2)}(\sigma)W^{(2)} \subset W^{(2)}$  である. ここで,  $\sigma$  の逆置換  $\sigma^{-1}$  を考えることにより,  $\pi^{(2)}(\sigma)$  は  $W^{(1)}, W^{(2)}$  をそれぞれ自身に写す. そこで,  $\pi^{(2)}(\sigma)$  の定義域, 終域を  $W^{(1)}$  に制限したものを  $\pi^{(2,1)}(\sigma)$ ,  $W^{(2)}$  に制限したものを  $\pi^{(2,2)}(\sigma)$  と表すことにする.

$n = 1$  のときは  $W^{(1)} = \mathbb{C}x_1^2$ ,  $W^{(2)} = \{0\}$  となり,  $S_1 = \{\iota\}$  であるから, これ以上新しい情報はない. よって,  $n \geq 2$  とする. ここで,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_1$  から  $W^{(1)}$  への次で与えられる自然な写像  $T$  を考える.

$$T : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_1 \longrightarrow W^{(1)}, \quad \sum_{j=1}^n a_jx_j \mapsto \sum_{j=1}^n a_jx_j^2, \quad (1.28)$$

ただし,  $a_j \in \mathbb{C}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) である. これは,  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_1$  について,  $Tf(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^2, \dots, x_n^2)$  と定義すると言ってもよい. 明らかに,  $T$  は全単射である. さらに, 任意の  $f = \sum_{j=1}^n a_jx_j \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_1$  および  $\sigma \in S_n$  について, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} T\pi^{(1)}(\sigma)f(x_1, \dots, x_n) &= \pi^{(1)}(\sigma)f(x_1^2, \dots, x_n^2) = f(x_{\sigma(1)}^2, \dots, x_{\sigma(n)}^2), \\ \pi^{(2,1)}(\sigma)Tf(x_1, \dots, x_n) &= Tf(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_{\sigma(1)}^2, \dots, x_{\sigma(n)}^2). \end{aligned}$$

従って, 次のことが成り立つ.

$$T\pi^{(1)}(\sigma) = \pi^{(2,1)}(\sigma)T, \quad \sigma \in S_n. \quad (1.29)$$

$T$  が全単射であることより, 次のことも成り立つ.

$$\pi^{(2,1)}(\sigma) = T\pi^{(1)}(\sigma)T^{-1}, \quad \sigma \in S_n. \quad (1.30)$$

特に, (1.30) は  $n$  次の置換  $\sigma$  による変数の入れ替えにより,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_1$  と  $W^{(1)}$  の ( $T$  により) 対応する元は同じ振る舞いをするを示している.

続いて,  $W^{(2)}$  の元の振る舞いを考える.  $n = 2$  のとき,  $x_1x_2 = s_2$  (2次基本対称式) であり,  $W^{(2)} = \mathbb{C}x_1x_2 = \mathbb{C}s_2$  であるから, 任意の  $\sigma \in S_n$  について  $\pi^{(2,2)}(\sigma)$  は  $W^{(2)}$  上の恒等写像である.  $n = 3$  のときはどうであろうか. ここで, 次で与えられる  $W^{(2)}$  の部分空間  $W_0^{(2)}$ ,  $W_1^{(2)}$  を考える.

$$W_0^{(2)} = \mathbb{C}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \mathbb{C}s_2, \quad (1.31)$$

$$W_1^{(2)} = \{a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}, \quad (1.32)$$

ただし,  $s_2$  は2次基本対称式を表す.  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$  が  $W_0, W_1$  の直和で表されたことと同様に,  $W^{(2)} = W_0^{(2)} \oplus W_1^{(2)}$  が成り立つ. さらに,  $s_2$  は対称式であるから, 任意の  $\sigma \in S_3$  について  $\pi^{(2,2)}(\sigma)s_2 = s_2$  であることより,  $\pi^{(2,2)}(\sigma)$  により  $W_0^{(2)}$  は自分自身に写る. また,  $s_3 = x_1x_2x_3$  を3次基本対称式とすると,

$$a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = a_1\frac{s_3}{x_1} + a_2\frac{s_3}{x_2} + a_3\frac{s_3}{x_3}. \quad (1.33)$$

よって,  $f = a_3x_1x_2 + a_2x_1x_3 + a_1x_2x_3 \in W_1^{(2)}$  および  $\sigma \in S_3$  について,  $\pi^{(2,2)}(\sigma)f = b_3x_1x_2 + b_2x_1x_3 + b_1x_2x_3 \in W^{(2)}$  とすると,

$$\begin{aligned} \pi^{(2,2)}(\sigma)f &= \pi^{(2,2)}(\sigma) \left( a_1\frac{s_3}{x_1} + a_2\frac{s_3}{x_2} + a_3\frac{s_3}{x_3} \right) = a_1\frac{s_3}{x_{\sigma(1)}} + a_2\frac{s_3}{x_{\sigma(2)}} + a_3\frac{s_3}{x_{\sigma(3)}} \\ &= a_{\sigma^{-1}(1)}\frac{s_3}{x_1} + a_{\sigma^{-1}(2)}\frac{s_3}{x_2} + a_{\sigma^{-1}(3)}\frac{s_3}{x_3} \\ &= a_{\sigma^{-1}(1)}x_2x_3 + a_{\sigma^{-1}(2)}x_1x_3 + a_{\sigma^{-1}(3)}x_1x_2. \end{aligned}$$

よって,  $b_j = a_{\sigma^{-1}(j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) が分かる. ゆえに,

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_{\sigma^{-1}(1)} + a_{\sigma^{-1}(2)} + a_{\sigma^{-1}(3)} = a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

従って,  $\pi^{(2,2)}(\sigma)W_1^{(2)} \subset W_1^{(2)}$  ( $\sigma \in S_3$ ) であり, 逆置換を考えることにより,  $W_1^{(2)}$  は  $\pi^{(2,2)}(\sigma)$  により自分自身に写る. そこで,  $\pi^{(2,2)}(\sigma)$  の定義域, 終域を  $W_0^{(2)}$  に制限したものを  $\rho_0^{(2)}(\sigma)$ ,  $W_1^{(2)}$  に制限したものを  $\rho_1^{(2)}(\sigma)$  と表すことにする. すると, 任意の  $\sigma \in S_3$  について  $\rho_0^{(2)}(\sigma) = \text{Id}_{W_0^{(2)}}$  である.

では,  $\rho_1^{(2)}(\sigma)$  はどのようなものであろうか. ここで,  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_1$  の部分 vector 空間  $W_1$  から  $W_1^{(2)}$  への線形写像  $T^{(2)} : W_1 \rightarrow W_1^{(2)}$  を次で定義する.

$$T^{(2)}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = -a_1x_2x_3 - a_2x_1x_3 - a_3x_1x_2 = -a_1\frac{s_3}{x_1} - a_2\frac{s_3}{x_2} - a_3\frac{s_3}{x_3}. \quad (1.34)$$

例えば,  $f_1 = x_1 - x_2, f_2 = x_1 - x_3 \in W_1$  について,  $T^{(2)}f_1 = -x_2x_3 + x_1x_3 = x_3(x_1 - x_2)$ ,  $T^{(2)}f_2 = -x_2x_3 + x_1x_2 = x_2(x_1 - x_3) \in W_1^{(2)}$  である. ここで,  $f = a_1x_2 + a_2x_2 + a_3x_3 \in W_1$ ,

$\sigma \in S_3$  とし,  $g = \rho_1(\sigma)f = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \in W_1$  とすると,  $b_j = a_{\sigma^{-1}(j)}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) であるから,

$$\begin{aligned} T^{(2)}\rho_1(\sigma)f &= T^{(2)}g = -b_1x_2x_3 - b_2x_1x_3 - b_3x_1x_2 \\ &= -a_{\sigma^{-1}(1)}x_2x_3 - a_{\sigma^{-1}(2)}x_1x_3 - a_{\sigma^{-1}(3)}x_1x_2, \\ \rho_1^{(2)}(\sigma)T^{(2)}f &= \rho_1^{(2)}(\sigma)(-a_1x_2x_3 - a_2x_1x_3 - a_3x_1x_2) \\ &= -a_1x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} - a_2x_{\sigma(1)}x_{\sigma(3)} - a_3x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \\ &= -a_{\sigma^{-1}(1)}x_2x_3 - a_{\sigma^{-1}(2)}x_1x_3 - a_{\sigma^{-1}(3)}x_1x_2. \end{aligned}$$

ゆえに, 次が成り立つ.

$$T^{(2)}\rho_1(\sigma) = \rho_1^{(2)}(\sigma)T^{(2)}, \quad \sigma \in S_3. \quad (1.35)$$

また, 定義より  $T^{(2)}$  は全単射であり, 次も成り立つことが分かる.

$$\rho_1^{(2)}(\sigma) = T^{(2)}\rho_1(\sigma)(T^{(2)})^{-1}, \quad \sigma \in S_3. \quad (1.36)$$

この (1.36) より,  $W_1$  と  $W_1^{(2)}$  の ( $T^{(2)}$  により) 対応する元は,  $\sigma \in S_3$  による変数の入れ替えにより, 同じ振る舞いをする.

問 1.6  $S_3$  の元  $\sigma_j$  ( $0 \leq j \leq 5$ ) について, 基底  $g_1 = x_3(x_1 - x_2)$ ,  $g_2 = x_2(x_1 - x_3)$  に関する表現行列  $B^{(2)}(\sigma_j)$  を直接計算し,  $B(\sigma_j)$  と一致することを確認せよ.

$W^{(1)}$  の部分 vector 空間として, 次のものを考える.

$$W_1^{(1)} = \{a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}. \quad (1.37)$$

すると, (1.30) により  $W_1$  と  $W_1^{(1)}$  の  $T$  により対応する元は,  $\sigma \in S_3$  の元による変数の入れ替えにより, 同じ振る舞いをする. それでは,  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_2$  の中に, 同じ振る舞いをするものは他にあるだろうか. 例えば,  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_2$  の次の部分 vector 空間  $\widetilde{W}_1$  を考える.

$$\widetilde{W}_1 = \{(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)s_1; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}. \quad (1.38)$$

ここで,  $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$  は 1 次基本対称式である. そして,  $W_1$  から  $\widetilde{W}_1$  への線形写像  $\widetilde{T} : W_1 \rightarrow \widetilde{W}_1$  を以下のものとする.

$$\widetilde{T}f = Tf + T^{(2)}f, \quad f \in W_1. \quad (1.39)$$

任意の  $f \in W_1$  について,  $\tilde{T}f \in \tilde{W}_1$  となることを示すために,  $\tilde{T}$  の具体的な形を考える.  
 $f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \in W_1$  とすると,  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$  であるから,

$$\begin{aligned} T^{(2)}f &= -a_1x_2x_3 - a_2x_1x_3 - a_3x_1x_2 \\ &= (a_2 + a_3)x_2x_3 + (a_1 + a_3)x_1x_3 + (a_1 + a_2)x_1x_2 \\ &= a_1x_1(x_2 + x_3) + a_2x_2(x_1 + x_3) + a_3x_3(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

このことと,  $T(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2$  であることを組み合わせると, 以下が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{T}f &= Tf + T^{(2)}f \\ &= (a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2) + (a_1x_1(x_2 + x_3) + a_2x_2(x_1 + x_3) + a_3x_3(x_1 + x_2)) \\ &= (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = fs_1. \end{aligned}$$

ゆえに,  $\tilde{T}f \in \tilde{W}_1$  となる.  $\sigma \in S_3$  をとると,

$$\pi^{(2)}(\sigma)(fs_1) = \sigma(fs_1) = (\sigma f)(\sigma s_1) = (\sigma f)s_1 = (\pi^{(1)}(\sigma)f)s_1.$$

よって,  $f$  と  $\tilde{T}f = fs_1$  は  $\sigma \in S_3$  について同じ振る舞いをする. このような同じ振る舞いをする元がどれくらいあるかということを調べる方法を, 後ほど知ることになる.

ここまでは,  $n = 3$  のときの特殊な事情を用いた. では,  $n = 4$  ではどうだろうか. まず,  $n = 3$  のときと同様に,  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]_2$  を次で与えられる 2 つの部分 vector 空間  $W^{(1)}$ ,  $W^{(2)}$  の直和に分解する.

$$W^{(1)} = \bigoplus_{j=1}^4 \mathbb{C}x_j^2, \quad (1.40)$$

$$W^{(2)} = \bigoplus_{1 \leq j < k \leq 4} \mathbb{C}x_jx_k. \quad (1.41)$$

$n = 3$  のときと同じく,  $W^{(1)}$  の元は文字の入れ替えについて, 対応する  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]_1$  の元と同じ振る舞いをする. ところが,  $W^{(2)}$  はより複雑に分解される. 具体的には, 次のような部分 vector 空間  $W_0^{(2)}$ ,  $W_1^{(2)}$ ,  $W_2^{(2)}$  に分解される.

$$W_0^{(2)} = \mathbb{C}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) = \mathbb{C}s_2, \quad (1.42)$$

$$W_1^{(2)} = \mathbb{C}(x_1 - x_2)(x_3 + x_4) \oplus \mathbb{C}(x_1 - x_3)(x_2 + x_4) \oplus \mathbb{C}(x_1 - x_4)(x_2 + x_3), \quad (1.43)$$

$$W_2^{(2)} = \mathbb{C}(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \oplus \mathbb{C}(x_1 - x_3)(x_2 - x_4). \quad (1.44)$$

ここで,  $s_2$  は 2 次基本対称式である. 任意の 4 次の置換  $\sigma$  について  $\pi^{(2)}(\sigma)W_0^{(2)} = W_0^{(2)}$  となるのは今までと同様であるが, それ以外については, 必ずしも自明なことではない.  $W_1^{(2)}$

の場合は、今までの方法で調べることができる。しかし、 $W_2^{(2)}$  はそのようにはいかない。もちろん、 $S_4$  の位数  $\#S_4$  は  $4! = 24$  であり、 $\dim W_2^{(2)} = 2$  であるから、時間をかければ手作業でできない話ではない。それよりも、次の性質を確認することにより調べる方法が興味深い。

補題 1.7  $(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) - (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0$ .

証明. 直接計算すればよい。実際、

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)(x_3 - x_4) &= x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 + x_2x_4, \\ -(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) &= -x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_3x_4, \\ (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) &= x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_4 + x_3x_4.\end{aligned}$$

よって、これらの両辺をそれぞれたせばよい。■

ここで、 $f_1 = (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)$ ,  $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)$  とおく。そして、 $\sigma^{(1)} = (1, 2)(3, 4)$ ,  $\sigma^{(2)} = (1, 3)(2, 4)$ ,  $\sigma^{(3)} = (1, 4)(2, 3) \in S_4$  とする。これらはすべて、互いに素な 2 つの互換の積、即ち、共通の文字を動かさない 2 つの互換の積である。このとき、次のことがわかる。

$$\pi^{(2)}(\sigma^{(j)})f_k = f_k, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2. \quad (1.45)$$

問 1.8 上のことを証明せよ。

いま、 $\sigma = (1, 2, 3, 4)$  を長さ 4 の巡回置換とする。すると、

$$\begin{aligned}\pi^{(2)}(\sigma)f_1 &= (x_2 - x_3)(x_4 - x_1) = f_1 - f_2, \\ \pi^{(2)}(\sigma)f_2 &= (x_2 - x_4)(x_3 - x_1) = -f_1.\end{aligned}$$

よって、 $\pi^{(2)}(\sigma)$  の基底  $f_1, f_2$  に関する表現行列を  $B(\sigma)$  とすると、 $B(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  となる。この行列は、(1.14) に現れる  $B(\sigma_2)$  と一致する。これは、 $\sigma_2 = (1, 3)$  であり、 $(1, 2, 3, 4) = (1, 3)(1, 2, 3, 4)$  であることと関連する。また、3 次の置換  $\tau = (1, 2, 3)$  について、

$$\begin{aligned}\pi^{(2)}(\tau)f_1 &= (x_2 - x_3)(x_1 - x_4) = -f_1 + f_2, \\ \pi^{(2)}(\tau)f_2 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_4) = -f_1.\end{aligned}$$

よって、 $\pi^{(2)}(\tau)$  の基底  $f_1, f_2$  に関する表現行列は  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  である。これは、(1.14) に現れる  $B(\sigma_4)$  と一致する。これらのことは、 $W_2^{(2)}$  の元の  $S_4$  の元による文字の入れ替えにお



ける振る舞いが,  $n = 3$  のときの  $W_1$  の元の振る舞いととても似通っていることを示している. このことは, 次で与えられる  $S_4$  の部分集合  $H$  を用いて説明されるのである.

$$H = \{1, \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)} \in S_4\}. \quad (1.46)$$

この  $H$  は  $S_4$  の正規部分群と呼ばれる性質をもち, さらに,  $S_4$  の元における  $H$  の元だけの“ずれ”をひとまとめにしたもの (剰余類と呼ばれる) 全体が再び群 (剰余群と呼ばれる) をなし,  $S_3$  と同じ振る舞いをするに, 上のことが関連する.

最後に, 交代式と差積について触れておく.  $n$  を  $n \geq 2$  なる正整数とする. このとき,  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  が交代式であるとは, 任意の互換  $\sigma = (j, k) \in S_n (j \neq k)$  について,  $\pi(\sigma)f = \sigma f = -f$  となることである. ところで, 任意の  $n$  次の置換  $\sigma$  は互換の積で表される. このことと補題 1.2 より, 次のことが分かる.

$$\pi(\sigma)f = \sigma f = (\text{sgn } \sigma)f, \quad (1.47)$$

ただし,  $\text{sgn } \sigma$  は  $\sigma$  の符号である.

最も重要な交代式は差積  $\Delta$  である.

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_j - x_k). \quad (1.48)$$

(文献によっては,  $j$  と  $k$  の大小関係が逆の場合がある. しかし, 積である多項式そのものについても符号が異なるだけで, 本質的な違いはない.)

差積は, この講義の後半にて頻繁に現れる. その根拠の一つとして, 次の定理が挙げられる.

**定理 1.9**  $n$  を  $n \geq 2$  なる整数とし,  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を交代式とする. このとき, 対称式  $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  が存在して,  $f = \Delta g$  と表される.

$\Delta$  は  $\frac{n(n-1)}{2}$  次式であるから, 上の定理より, それより次数の低い 0 でない交代式は存在しないことが分かる.

( 余 白 )

## 1.2 群論の基礎事項.

ここでは、群の定義と基本的な性質についてまとめておく.

定義 1.10  $G$  を集合とする.  $G$  が群であるとは、乗法  $\mu : G \times G \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in G$  が定義されて、次の性質をみたすことをいう.

- (i) 任意の  $x, y, z \in G$  について、 $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  が成り立つ (結合法則).
- (ii)  $1_G \in G$  が存在して、 $x \cdot 1_G = 1_G \cdot x = x$  が成り立つ. この  $1_G$  を  $G$  の単位元と呼ぶ.
- (iii) 任意の  $x \in G$  に対して、 $x^{-1} \in G$  が存在して、 $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1_G$  が成り立つ. この  $x^{-1}$  を  $x$  の逆元と呼ぶ.

さらに、次の性質をみたすとき、 $G$  が可換群あるいは Abel 群であるという.

- (iv) 任意の  $x, y \in G$  について  $x \cdot y = y \cdot x$  (交換法則).

上の性質 (i), (ii), (iii) は群の公理と呼ばれる.

群  $G$  の元  $x, y \in G$  に対して、 $\mu(x, y) = x \cdot y$  を  $x$  と  $y$  の積と呼ぶ. 今後特に他のものと区別する必要がなければ、乗法を  $\mu$  を用いて表さず、単に  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  と表すことにする. また、しばしば積  $x \cdot y$  を  $xy$  と略記する. よって、 $G$  の乗法を  $(x, y) \mapsto xy$  と表すことがある. また、結合法則より、 $x, y, z \in G$  に対して、 $(x \cdot y) \cdot z$  と  $x \cdot (y \cdot z)$  は  $G$  の同じ元である. そこで、特に積の順序を意識する必要がないときは、この元を括弧を使わずに  $x \cdot y \cdot z$ 、あるいは単に  $xyz$  と表すことにする.

集合  $S$  に対して、その元の個数を  $\#S$  で表すことにする. ただし、 $S$  が無限集合のときは  $\#S = \infty$  と表すことにする. 特に、群  $G$  の元の個数  $\#G$  は群  $G$  の位数と呼ばれる. 位数が有限である群を有限群、無限である群を無限群と呼ぶ. 群には必ず単位元  $1_G \in G$  が存在するから、 $\#G = 0$  ということはありえない.

ここで、群の例を幾つか挙げる.

例 1.11 もっとも簡単な例は、ただ 1 個の元  $1_G$  をもつ集合  $G = \{1_G\}$  である. この群  $G$  について、積を  $1_G \cdot 1_G = 1_G$  と定義すると、この積によって定義される乗法は群の公理をすべてみたしている. よって、 $G = \{1_G\}$  は群である. また、この積が交換法則をみたすことは定義より明らかである. よって、 $G = \{1_G\}$  は Abel 群である. この群  $G = \{1_G\}$  は、単独ではつまらないものであるが、後に群の表現を扱うときに重要な役割を果たす.

例 1.12  $n$  を正整数とすると、 $n$  次の置換全体のなす集合  $S_n$  は群であると既に述べている.  $S_n$  における乗法は、置換の合成である. 即ち、 $\sigma, \tau \in S_n$  について、 $(\sigma\tau)(j) = \sigma(\tau(j))$  ( $1 \leq j \leq n$ ) とすると、合成置換  $\sigma\tau$  も  $n$  次の置換である. 置換は集合  $\{1, \dots, n\}$  から自分自身への写像であるから、結合法則が成り立つ.  $n$  次の恒等置換  $\iota \in S_n$  はこの乘法につい

の単位元である。また、任意の置換は逆変換  $\sigma^{-1} \in S_n$  をもつ。これは、 $\sigma$  の写像としての逆写像であり、 $\sigma \in S_n$  が  $\{1, \dots, n\}$  上の全単射であることから、その存在が保証され、逆写像も全単射であるから置換である。この  $\sigma^{-1}$  はその定義により、 $\sigma$  の乗法についての逆元であることがわかる。よって、 $S_n$  は群である。この  $S_n$  を  $n$  次対称群と呼ぶ。  $\#S_n = n!$  である。この群はこの講義の後半の主たる対象である。

例 1.13  $n$  を  $n \geq 2$  なる整数とし、 $n$  次の偶置換全体のなす集合を  $A_n$  とする。

$$A_n = \{\sigma \in S_n; \operatorname{sgn} \sigma = 1\}. \quad (1.49)$$

ここで、 $\sigma \in S_n$  に対して、 $\operatorname{sgn} \sigma$  は  $\sigma$  の符号を表す。  $A_n$  における乗法は、 $S_n$  における乗法と同じものとする。すると、 $n$  次の偶置換  $\sigma, \tau \in A_n$  について、 $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau = 1 \cdot 1 = 1$  であるから、合成置換  $\sigma\tau$  も偶置換である。  $A_n$  における置換の合成は  $S_n$  におけるものと同じであるから、結合法則が成り立つ。また、 $n$  次の恒等置換  $\iota$  は偶置換であるから、 $\iota \in A_n$ 。さらに、任意の  $n$  次の偶置換について、 $\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = (\operatorname{sgn} \sigma)^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma = 1$  であるから、 $\sigma \in A_n$  の逆置換  $\sigma^{-1}$  も偶置換であるから、 $\sigma^{-1} \in A_n$ 。よって、 $A_n$  も群である。  $A_n$  を  $n$  交代群と呼ぶ。  $A_n$  の位数は  $\#A_n = \frac{n!}{2}$  である。

$n$  交代群  $A_n$  は  $n$  次対称群の部分集合であるが、 $\sigma, \tau \in A_n$  について  $\sigma\tau, \sigma^{-1} \in A_n$  である。一般に、群  $G$  の部分集合  $S \subset G$  について、任意の  $x, y \in S$  に対して  $xy, x^{-1} \in S$  が成り立つとき、 $S$  は乗法および逆元をとる演算に関して閉じているという。よって、 $n$  次対称群  $S_n$  の部分集合である  $n$  交代群  $A_n$  は乗法および逆元をとる演算に関して閉じている。

例 1.14  $G = \mathbb{Z}$  を整数全体のなす集合とする。いま、 $\mathbb{Z}$  を群と考えたい。そのために、ややこしいのだが、“群としての”乗法  $\mu$  として、“通常の”加法  $\mu(x, y) = x + y$  ( $x, y \in \mathbb{Z}$ ) を考える。すると、 $\mu$  は結合法則をみたす。乗法  $\mu$  の単位元は  $0$  である。また、 $x \in \mathbb{Z}$  の乗法に関する逆元は  $-x$  である。よって、 $G = \mathbb{Z}$  はこの乗法  $\mu$  により群になる。このような、通常の意味の加法を群の乗法と考える群は加法群と呼ばれる。同様にして、有理数全体のなす集合  $\mathbb{Q}$ 、実数全体のなす集合  $\mathbb{R}$ 、複素数全体のなす集合  $\mathbb{C}$  も、通常の意味の加法を群としての乗法と考えることにより、加法群になる。大抵の場合、加法群には乗法の交換法則、即ち、定義 1.10 (iv) の性質を仮定する。

例 1.15  $G = \mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  とする。すると、任意の  $x \in \mathbb{Q}^\times$  について通常の乗法の逆元、即ち、逆数  $x^{-1} \in \mathbb{Q}$  が存在する。さらに、 $x, y \in \mathbb{Q}^\times$  について、 $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \in \mathbb{Q}$  であり、 $xy \neq 0$  である。よって、 $\mathbb{Q}^\times$  は通常の乗法について閉じている。また、通常の乗法は結合法則をみたし、その単位元は  $1 \in \mathbb{Q}^\times$  である。さらに、 $x \in \mathbb{Q}^\times$  について、 $x^{-1} \in \mathbb{Q}$  は  $x$  を通常の意味の乗法の逆元としてもつから  $x^{-1} \neq 0$  である。よって、 $x \in \mathbb{Q}^\times$  は  $\mathbb{Q}^\times$  の元

$x^{-1}$  を通常の意味の乗法についての逆元としてもつ. よって,  $G = \mathbb{Q}^\times$  は通常の意味の乗法を群の乗法とする群である. この群  $\mathbb{Q}^\times$  を  $\mathbb{Q}$  の単元群と呼ぶ. 同様にして,  $\mathbb{R}$  の単元群  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{C}$  の単元群  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  も通常の意味の乗法を群の乗法とする群である. なお,  $\mathbb{Z}$  の単元群  $\mathbb{Z}^\times$  とは, ある整数を通常の意味の乗法についての逆元としてもつ整数全体のなす集合であり,  $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$  である.  $(-1)^{-1} = -1$  であるから,  $\mathbb{Z}^\times$  も群であることが分かる.

群の性質を知るには, 1つ1つの群そのものだけを考えるのではなく, 2つの群の間の関係を調べることも重要である.

**定義 1.16**  $G_1, G_2$  を群とする. このとき, 写像  $f : G_1 \longrightarrow G_2$  が (群の) 準同型であるとは, 次のことが成り立つことである.

$$\text{任意の } x, y \in G_1 \text{ に対して } f(xy) = f(x)f(y). \quad (1.50)$$

**命題 1.17**  $G_1, G_2$  を群とし,  $1_{G_1} \in G_1, 1_{G_2} \in G_2$  をそれぞれ単位元,  $f : G_1 \longrightarrow G_2$  を準同型写像とする. このとき, 以下のことが成り立つ.

- (1)  $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$ .
- (2) 任意の  $x \in G_1$  について,  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ .

**証明.** (1)  $1_{G_1} = 1_{G_1} \cdot 1_{G_1}$  であるから,  $f(1_{G_1}) = f(1_{G_1} \cdot 1_{G_1}) = f(1_{G_1})f(1_{G_1})$ . この両辺に  $f(1_{G_1}) \in G_2$  の逆元  $f(1_{G_1})^{-1}$  を右からかけると,

$$\begin{aligned} 1_{G_2} &= f(1_{G_1})f(1_{G_1})^{-1} = (f(1_{G_1})f(1_{G_1}))f(1_{G_1})^{-1} = f(1_{G_1})(f(1_{G_1})f(1_{G_1})^{-1}) \\ &= f(1_{G_1}) \cdot 1_{G_2} = f(1_{G_1}). \end{aligned}$$

- (2)  $xx^{-1} = x^{-1}x = 1_{G_1}$  および (1) より

$$\begin{aligned} 1_{G_2} &= f(1_{G_1}) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}), \\ 1_{G_2} &= f(1_{G_1}) = f(x^{-1}x) = f(x^{-1})f(x). \end{aligned}$$

よって,  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$  となる. ■

**定義 1.18**  $G_1, G_2$  を群とし,  $f : G_1 \longrightarrow G_2$  を準同型写像とする.  $f$  が全単射であるとき  $f$  を (群の) 同型写像と呼ぶ. また, このような同型写像  $f : G_1 \longrightarrow G_2$  が存在するとき,  $G_1$  と  $G_2$  は同型であるといい,  $G_1 \simeq G_2$  で表すことにする.

**問 1.19**  $G_1, G_2$  を群とし,  $f : G_1 \longrightarrow G_2$  を同型写像とする. このとき,  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  も準同型写像であることを示せ.

群  $G_1, G_2$  が同型であるとは、同型写像  $f : G_1 \rightarrow G_2$  により、 $G_1$  と  $G_2$  の構造が一致するということである。よって、 $f$  により  $G_1$  と  $G_2$  が同一なものと思ふことができる。

次に、群に含まれる新たな群である部分群を定義する。

定義 1.20  $G$  を群とし、 $H \subset G$  を空でない部分集合とする。このとき、 $H$  が  $G$  の部分群であるとは、次の性質をみたすことである。

- (i) 任意の  $x, y \in H$  について  $xy \in H$ .
- (ii) 任意の  $x \in H$  について  $x^{-1} \in H$ .

$G$  の部分集合  $H \subset G$  が部分群であるとは、 $H$  が  $G$  の乗法および逆元をとる演算に関して閉じているということである。

群  $G$  の部分群  $H$  は、 $G$  の乗法を  $H$  に制限したものを乗法と考えることにより群になる。実際、 $H$  は  $G$  の乗法に関して閉じているから、 $G$  の乗法の  $H$  への制限は  $H$  上の演算と考えられる。この  $H$  の乗法はもともと  $G$  において結合法則をみたすから、 $H$  においても結合法則をみたす。 $x \in H$  を任意のものと、 $x^{-1} \in H$  であるから、 $1_G = xx^{-1} \in H$  である。 $1_G$  は明らかに  $H$  のこの乗法の単位元となる。さらに、 $x \in H$  について、 $x^{-1} \in H$  であり、 $1_G = xx^{-1} = x^{-1}x$  であるから、 $x^{-1} \in H$  は  $H$  の乗法に関する逆元である。従って、 $H$  はこの乗法により群となる。

任意の群  $G$  について、 $G$  自身は部分群である。また、 $\{1_G\} \subset G$  も  $G$  の部分群である。この2つを  $G$  の自明な部分群という。

例 1.21  $n$  を  $n \geq 2$  なる整数とする。このとき、例 1.13 で見たように、 $n$  次交代群  $A_n$  は  $n$  次対称群  $S_n$  の部分群である。

例 1.22 加法群  $\mathbb{Z}$  は加法群  $\mathbb{Q}$  の部分群である。また、 $\mathbb{Z}$  は加法群  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  の部分群でもある。さらに、加法群  $\mathbb{Q}$  は  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  の部分群であり、 $\mathbb{R}$  は  $\mathbb{C}$  の部分群である。また、 $\mathbb{Q}$  の乗法群  $\mathbb{Q}^\times$  は  $\mathbb{R}$  の乗法群  $\mathbb{R}^\times$ 、 $\mathbb{C}$  の乗法群  $\mathbb{C}^\times$  の部分群であり、 $\mathbb{R}^\times$  は  $\mathbb{C}^\times$  の部分群である。さらに、 $\mathbb{Z}$  の乗法群  $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$  は  $\mathbb{Q}^\times, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times$  の部分群である。

部分群には、次で与えられる特別なものがある。

定義 1.23  $G$  を群とし、 $H \subset G$  を  $G$  の部分群とする。このとき、 $H$  が  $G$  の正規部分群であるとは、次の性質をみたすことである。

$$\text{任意の } g \in G, x \in H \text{ について } gxg^{-1} \in H. \quad (1.51)$$

このとき、 $H \triangleleft G$  と表す。

群  $G$  において,  $G$  自身を  $G$  の部分群と考えると, 明らかに  $G$  の正規部分群である. また, 部分群  $\{1_G\} \subset G$  について,  $g \in G$  を任意にとると,  $g1_Gg^{-1} = gg^{-1} = 1_G \in \{1_G\}$  であるから,  $\{1_G\} \subset G$  も  $G$  の正規部分群である. また,  $G$  が Abel 群であるときは,  $G$  の任意の部分群  $H \subset G$  について, 任意の  $g \in G, x \in H$  に対して,  $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x1_G = x \in H$  であるから,  $H$  は正規部分群になる.

ここで, 記号を用意する.  $G$  を群,  $S \subset G$  を部分集合,  $x, y \in G$  とする. このとき, 以下で与えられる集合を考える.

$$xS = \{xz \in G; z \in S\}, \quad (1.52)$$

$$Sy = \{zy \in G; z \in S\}, \quad (1.53)$$

$$xSy = \{xzy \in G; z \in S\}. \quad (1.54)$$

また, 次のような  $G$  の部分集合も考える.

$$S^{-1} = \{z^{-1} \in G; z \in S\}. \quad (1.55)$$

さらに,  $G$  の部分集合  $S_1, S_2 \subset G$  について次の部分集合を考える.

$$S_1S_2 = \{zw \in G; z \in S_1, w \in S_2\}. \quad (1.56)$$

すると,  $G$  の部分集合  $H \subset G$  が部分群であるとは,  $HH \subset H, H^{-1} \subset H$  であることと同値である. なお,  $H^{-1} \subset H$  より  $H^{-1} = H$  が得られる. 実際,  $x \in H$  について,  $x^{-1} \in H^{-1}$  であるから,  $x = (x^{-1})^{-1} \in (H^{-1})^{-1}$  である. よって,  $H \subset (H^{-1})^{-1}$  である. また,  $G$  の部分集合  $S_1, S_2 \subset G$  について,  $S_1 \subset S_2$  ならば  $S_1^{-1} \subset S_2^{-1}$  となるから,  $H^{-1} \subset H$  より  $(H^{-1})^{-1} \subset H^{-1} \subset H$  である. よって,  $H = (H^{-1})^{-1} \subset H^{-1} \subset H$  となり,  $H^{-1} = H$  であることが分かる.

上の記号を用いると,  $G$  の部分群  $H \subset G$  が正規部分群であることは, 任意の  $g \in G$  について,  $gHg^{-1} \subset H$  であることと表すことができる. この場合も,  $g^{-1} \in G$  を考えることにより,  $g^{-1}Hg \subset H$  であることが分かる. また,

$$\begin{aligned} g(g^{-1}Hg)g^{-1} &= \{gxg^{-1} \in G; x \in g^{-1}Hg\} \\ &= \{y = g(g^{-1}yg)g^{-1} \in G; y \in H\} = H. \end{aligned}$$

よって,  $H = g(g^{-1}Hg)g^{-1} \subset gHg^{-1} \subset H$  が成り立つ. 従って, 任意の  $g \in G$  について  $gHg^{-1} = H$  となることが分かる.

ここで, 集合論の記号を復習する.

定義 1.24  $A, B$  を集合,  $f : A \rightarrow B$  を写像とし,  $A_1 \subset A, B_1 \subset B$  をそれぞれ部分集合とする.

- (1)  $f(A_1) = \{f(x) \in B; x \in A_1\} \subset B$  を  $A_1$  の  $f$  による像と呼ぶ.
- (2)  $f^{-1}(B_1) = \{x \in A; f(x) \in B_1\} \subset A$  を  $B_1$  の  $f$  による逆像と呼ぶ.

$f^{-1}(B_1) \subset A$  は,  $f$  の逆写像  $f^{-1} : B \rightarrow A$  が存在しなくても定義することができる. もし,  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  が存在すれば,  $f^{-1}(B_1) \subset A$  は  $B_1$  の  $f^{-1}$  による像と一致する.

補題 1.25  $G_1, G_2$  を群とし,  $f : G_1 \rightarrow G_2$  を準同型写像とする.

- (1)  $H_1 \subset G_1$  が部分群ならば,  $f(H_1) \subset G_2$  も部分群である. 特に,  $f(G_1) \subset G_2$  は部分群である.
- (2)  $H_2 \subset G_2$  が部分群ならば,  $f^{-1}(H_2) \subset G_1$  も部分群である.
- (3) さらに,  $H_2 \triangleleft G_2$  ならば,  $f^{-1}(H_2) \triangleleft G_1$  である. 特に,  $f^{-1}(\{1_{G_2}\}) \triangleleft G_1$  である.

証明. (1)  $x, y \in H_1$  とする.  $xy \in H_1$  であるから,  $f(x)f(y) = f(xy) \in f(H_1)$  である. また,  $x^{-1} \in H_1$  であるから,  $f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \in f(H_1)$  である. 従って,  $f(H_1) \subset G_2$  は部分群である.

(2)  $x, y \in f^{-1}(H_2)$  とする. すると,  $f(x), f(y) \in H_2$  である.  $H_2 \subset G_2$  は部分群であるから,  $f(xy) = f(x)f(y) \in H_2$  となり,  $xy \in f^{-1}(H_2)$  である. また,  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \in H_2$  となることより  $x^{-1} \in f^{-1}(H_2)$  が成り立つ. 従って,  $f^{-1}(H_2) \subset G_1$  は部分群である.

(3)  $x \in f^{-1}(H_2), g \in G_1$  とする. このとき,  $f(x) \in H_2, f(g) \in G_2$ , かつ  $H_2 \triangleleft G_2$  であることより, 次が成り立つ.

$$f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1} \in H_2.$$

よって,  $gxg^{-1} \in f^{-1}(H_2)$  となり,  $f^{-1}(H_2) \triangleleft G_1$  が得られる. ■

ここで, 群の準同型写像から得られる部分群を与える.

定義 1.26  $G_1, G_2$  を群,  $f : G_1 \rightarrow G_2$  を準同型写像とする.

- (1)  $f(G_1) \subset G_2$  を  $f$  の像と呼び,  $\text{Im } f$  と表す.
- (2)  $f^{-1}(\{1_{G_2}\}) \subset G_1$  を  $f$  の核と呼び,  $\text{Ker } f$  と表す.

$\text{Im } f \subset G_2$  は部分群であり,  $\text{Ker } f \subset G_1$  は正規部分群である. 一般に,  $\text{Im } f$  は  $G_2$  の正規部分群とは限らない.

ここからは, 群の性質を調べるときに重要な, 剰余類や剰余空間について述べる. それを正確に記述するには, 同値関係という概念が必要になる. そこで, その同値関係も含めた関係という概念を導入する. これは, 写像の一般化でもある.



定義 1.27  $S$  を集合とする.  $S$  上の関係  $R$  とは,  $S$  の元  $x, y \in S$  からなる (順序づけられた) 対  $(x, y)$  について,  $(x, y)$  が関係  $R$  をみたすか, みたさないかが決まる  $x$  と  $y$  たちの対応のことである.  $(x, y)$  が関係  $R$  をみたすとき,  $x \sim_R y$ ,  $xRy$ ,  $R(x, y)$  などと表される.  $(x, y)$  が関係  $R$  をみたさないとき,  $x \not\sim_R y$  などと表される. 混乱の恐れがないときは, 関係  $R$  を  $\sim$  と略記し,  $(x, y)$  が関係  $R$  をみたすこと, およびみたさないことを, それぞれ単に  $x \sim y$ ,  $x \not\sim y$  と表す.

集合  $S$  上の関係  $R$  には, 次のような  $S \times S$  の部分集合  $\Gamma_R$  が対応する.

$$\Gamma_R = \{(x, y) \in S \times S; x \sim_R y\} \subset S \times S.$$

逆に,  $S \times S$  の部分集合  $\Gamma \subset S \times S$  が与えられたとき,  $S$  上の関係  $R_\Gamma$  を次のように与えることができる.

$$x, y \in S \text{ について, } (x, y) \text{ が関係 } R_\Gamma \text{ をみたす} \iff (x, y) \in \Gamma.$$

これらを用いると,  $R_{\Gamma_R} = R$ ,  $\Gamma_{R_\Gamma} = \Gamma$  が成り立つことは容易に分かる. よって,  $S$  上の関係と  $S \times S$  の部分集合は自然に対応する.

例 1.28  $S$  を集合とし,  $f : S \rightarrow S$  を写像とする. このとき,  $f$  から得られる関係  $R_f$  を  $x, y \in S$  について,  $y = f(x)$  であるとき  $(x, y)$  が関係  $R_f$  をみたすと定義する. すると,  $R_f$  は  $S$  上の関係であり, 対応する  $S \times S$  の部分集合  $\Gamma_f$  は次のものである.

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in S \times S; y = f(x)\}.$$

これは, 写像  $f$  の graph に他ならない.

写像の graph  $\Gamma = \Gamma_f \subset S \times S$  には, 次の特徴がある.

$$\text{任意の } x \in S \text{ について, } \#\{y \in S; (x, y) \in \Gamma\} = 1.$$

逆に,  $S \times S$  の部分集合  $\Gamma \subset S \times S$  が上の性質をみたすとき,  $S$  上の写像  $f : S \rightarrow S$  を以下のように定義することができる.

$$x, y \in S \text{ について, } y = f(x) \iff (x, y) \in \Gamma.$$

すると,  $\Gamma$  から得られる関係  $R_\Gamma$  と  $f$  から得られる関係  $R_f$  は一致する. このように, 集合  $S$  から  $S$  自身への写像は,  $S$  上の関係の特別なものと考えられる.

写像以外にも, 重要な関係はいろいろあるが, ここでは, そのうち同値関係を取り上げる.

定義 1.29  $S$  を集合とし,  $\sim$  を  $S$  上の関係とする. 関係  $\sim$  が同値関係であるとは, 次の性質をみたすことである.

- (i) 任意の  $x \in S$  について,  $x \sim x$  が成り立つ (反射律).
- (ii)  $x, y \in S$  について,  $x \sim y \iff y \sim x$  (対称律).
- (iii)  $x, y, z \in S$  について,  $x \sim y$  かつ  $y \sim z \implies x \sim z$  (推移律).

この同値関係  $\sim$  について,  $x \sim y$  なるとき,  $x$  と  $y$  は同値であるという.

例 1.30  $S = \mathbb{Z}$  とし,  $\mathbb{Z}$  上の関係  $\sim$  を  $x, y \in \mathbb{Z}$  について,  $x - y \in 2\mathbb{Z}$ , 即ち,  $x - y$  が偶数であるとき  $x \sim y$  が成り立つとする. この関係  $\sim$  は同値関係である. 実際, 任意の  $x \in \mathbb{Z}$  について,  $x - x = 0$  は偶数であるから,  $x \sim x$  が成り立つ. また,  $x, y \in \mathbb{Z}$  について,  $y - x = -(x - y)$  であるから,  $x - y$  が偶数であることと,  $y - x$  が偶数であることは同値である. ゆえに,  $x \sim y$  であることと,  $y \sim x$  であることは同値である. さらに,  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  について,  $x \sim y$  かつ  $y \sim z$  とすると, 整数  $k, l \in \mathbb{Z}$  が存在して,  $x - y = 2k$ ,  $y - z = 2l$  と表される. よって,  $x - z = (x - y) + (y - z) = 2k + 2l = 2(k + l)$  となり,  $k + l \in \mathbb{Z}$  であるから,  $x \sim z$  が成り立つ. 従って, この関係  $\sim$  は  $S = \mathbb{Z}$  上の同値関係である.

例 1.31  $S = \mathbb{Z}$  上で, 上の例とは別の関係を考える.  $x, y \in \mathbb{Z}$  について,  $x \leq y$  のとき  $xRy$ , 即ち,  $(x, y)$  が関係  $R$  をみたすとする. この関係は同値関係ではない. なぜ, この関係  $R$  が同値関係でないか調べる. まず, 任意の  $x \in \mathbb{Z}$  について,  $x = x$  であるから, 当然  $xRx$  である. よって, この関係  $R$  は反射律をみたす. また,  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  について,  $xRy, yRz$  とすると,  $x \leq y$  かつ  $y \leq z$  であるから,  $y - x \geq 0$  かつ  $z - y \geq 0$ . よって,  $z - x = (z - y) + (y - x) \geq 0$  となり,  $xRz$  が成り立つことが分かる. ゆえに, この関係  $R$  は推移律をみたす. ところが,  $R$  は対称律をみたさない. 例えば,  $0 < 1$  であるから  $0 \leq 1$  となる. よって,  $0R1$  が成り立つが,  $1 > 0$  であるから  $1 \not\leq 0$  となり,  $1R0$  が成り立たない. よって, 関係  $R$  は対称律をみたさない. ちなみに, この関係  $R$  は, 次の性質をみたす.

- (iv)  $x, y \in S$  について,  $xRy$  かつ  $yRx \implies x = y$  (反対称律).

実際  $x, y \in \mathbb{Z}$  について,  $xRy$  かつ  $yRx$  とすると,  $x \leq y$  かつ  $y \leq x$  であるから,  $x = y$  が成り立つ. このように, 定義 1.29 の (i), (iii) およびこの (iv) がみたされる関係を順序関係と呼ぶ.

集合  $S$  上に同値関係  $\sim$  が与えられたとする. すると, 任意の  $x \in S$  に対して,  $x$  と同値な  $S$  の元全体のなす  $S$  の部分集合を  $x$  の同値関係  $\sim$  に関する同値類あるいは単に  $x$  の同値類と呼び,  $\mathcal{C}(x) \subset S$  と表すことにする.

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in S; x \sim y\}. \quad (1.57)$$

同値類たちには, 次のような著しい性質がある.

命題 1.32  $S$  を集合とし,  $\sim$  を  $S$  上の同値関係とする.

- (1) 任意の  $x, y \in S$  について,  $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$  または  $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \emptyset$  のいずれかが成り立つ.
- (2)  $S$  の部分集合からなる集合族  $\mathcal{F}$  を以下のものとする.

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \subset S; \exists x \in S, \mathcal{C} = \mathcal{C}(x)\}. \quad (1.58)$$

このとき,  $S = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} \mathcal{C}$  が成り立つ.

証明. (1)  $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) \neq \emptyset$  であるとき,  $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$  であることを示せばよい.  $z \in \mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y)$  であるとする. すると,  $x \sim z$  かつ  $y \sim z$  が成り立つ. よって,  $z \sim y$  が成り立つから,  $x \sim y$  が得られ,  $y \in \mathcal{C}(x)$  であることが分かる. このとき,  $w \in \mathcal{C}(y)$  について,  $y \sim w$  であり,  $y \in \mathcal{C}(x)$  より  $x \sim y$  であるから,  $x \sim w$  となる. ゆえに,  $\mathcal{C}(y) \subset \mathcal{C}(x)$  が成り立つ. ここで,  $x$  と  $y$  の立場を取り換えることにより,  $\mathcal{C}(x) \subset \mathcal{C}(y)$  も得られる. 従って,  $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$  が成り立つ.

(2) 任意の  $x \in S$  について,  $x \sim x$  であるから  $x \in \mathcal{C}(x)$  である. 明らかに  $\mathcal{C}(x) \in \mathcal{F}$  であるから,  $x \in \mathcal{C}(x) \subset \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} \mathcal{C}$  となる. ■

一般に, 集合  $S$  と,  $S$  の部分集合からなる集合族  $\mathcal{F}$  について, 次の性質をみたすとき,  $S$  は  $\mathcal{F}$  の元たちの直和であるという.

(i)  $T, T' \in \mathcal{F}$  について,  $T \neq T'$  ならば  $T \cap T' = \emptyset$ .

(ii)  $S = \bigcup_{T \in \mathcal{F}} T$ .

$S$  が  $\mathcal{F}$  の元たちの直和であるとき,  $S = \bigsqcup_{T \in \mathcal{F}} T$  と表す. 特に,  $\mathcal{F}$  の元たちが, ある集合  $\Lambda$  の元

$\lambda \in \Lambda$  で  $\mathcal{F} = \{T_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$  と添え字づけられているとき,  $S = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$  と表される. さらに,

$\mathcal{F}$  が有限集合であり,  $\mathcal{F} = \{T_1, \dots, T_n\}$  ( $n = \#\mathcal{F}$ ) と表されているとき,  $S = \bigsqcup_{j=1}^n T_j$  あるいは

$S = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$  などと表される. この記号を用いると, 命題 1.32 の主張は,  $S = \bigsqcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} \mathcal{C}$

と表される. これを,  $S$  の同値関係  $\sim$  に関する同値類別と呼ぶ.

$S$  を集合,  $\sim$  を  $S$  上の同値関係とし,  $\mathcal{F}$  を, (1.58) で与えられる  $\sim$  に関する同値類全体からなる  $S$  の部分集合族とする. 任意の同値類  $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$  について,  $x \in S$  が存在して  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(x)$  となるから,  $x \in \mathcal{C}$  であり, 特に  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  である. そこで, 任意の同値類  $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$  から  $\mathcal{C}$  に属する元  $x \in \mathcal{C}$  を 1 つずつとる. それらを集めた  $S$  の部分集合  $\Lambda \subset S$  を同値関係  $\sim$  に関する完全代表系と呼び  $x \in \mathcal{C}$  を同値類  $\mathcal{C}$  の代表元と呼ぶ. 特に, ある集合  $M$  により,  $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_\mu; \mu \in M\}$  と表されているとし, 各  $\mu \in M$  について  $x_\mu \in \mathcal{C}_\mu$  なる代表元  $x_\mu$  をとったとき, この完全代表系は  $\Lambda = \{x_\mu; \mu \in M\}$  と表される. さらに,  $\mathcal{F} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$  が有

限集合で,  $1 \leq j \leq n$  なる整数  $j$  について  $x_j \in \mathcal{C}_j$  なる代表元  $x_j$  をとったとき, この完全代表系は  $A = \{x_j; 1 \leq j \leq n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$  などと表される. よって,  $S$  上の同値関係  $\sim$  について, それに関する完全代表系  $A \subset S$  が得られたとき,  $S = \bigsqcup_{x \in A} \mathcal{C}(x)$  と表される.

**定義 1.33**  $S$  を集合,  $\sim$  を  $S$  上の同値関係とし, (1.58) で与えられる同値関係  $\sim$  に関する同値類全体のなす  $S$  の部分集合族  $\mathcal{F}$  を  $S$  の同値関係  $\sim$  に関する剰余空間と呼び,  $\mathcal{F} = S/\sim$  と表す.

ここからは, 群  $G$  と  $G$  の部分群  $H \subset G$  について,  $H$  から得られる  $G$  上の同値関係を考える.

**命題 1.34**  $G$  を群,  $H \subset G$  を  $G$  の部分群とする.

(1)  $G$  における関係  $\sim$  を次で与える.

$$x, y \in G \text{ について, } x \sim y \iff x^{-1}y \in H. \quad (1.59)$$

この関係  $\sim$  は同値関係である.

(2)  $G$  における関係  $\sim$  を次で与える.

$$x, y \in G \text{ について, } x \sim y \iff yx^{-1} \in H. \quad (1.60)$$

この関係  $\sim$  も同値関係である.

**証明.** (1) を示す. 任意の  $x \in G$  について,  $1_G \in H$  であるから,  $x^{-1}x = 1_G \in H$  である. よって,  $x \sim x$  となる. また,  $x, y \in G$  が  $x \sim y$  なる元とする. すると,  $x^{-1}y \in H$  である. よって,  $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$  となる. ゆえに,  $y \sim x$  が成り立つ. さらに,  $x, y, z \in G$  が  $x \sim y, y \sim z$  なる元であるとすると,  $x^{-1}y \in H$  かつ  $y^{-1}z \in H$  である. よって,  $x^{-1}z = (x^{-1}y)(y^{-1}z) \in H$  であるから,  $x \sim z$  となる. 従って, この関係  $\sim$  は同値関係である. (2) も全く同様である. ■

**定義 1.35**  $G$  を群,  $H \subset G$  を  $G$  の部分群とする.

(1) (1.59) で与えられる同値関係に関する同値類  $\mathcal{C}$  を  $G$  の  $H$  に関する右剰余類と呼ぶ. そして, 右同値類全体からなる剰余空間  $G/\sim$  を右剰余空間と呼び,  $G/H$  と表す.

(2) (1.60) で与えられる同値関係に関する同値類  $\mathcal{C}$  を  $G$  の  $H$  に関する左剰余類と呼ぶ. そして, 左同値類全体からなる剰余空間  $G/\sim$  を左剰余空間と呼び,  $H \backslash G$  と表す.

**注意 1.36** 文献によっては, 右剰余類と左剰余類を定義 1.35 とは逆に用いるものがある. それに伴い, 右剰余空間と左剰余空間が逆の意味で用いられる場合がある. 学習の際には様々な文献を読むことがあるが, その文献がどちらの意味で用語を用いているか確かめてから読み進めることが必要である.

群  $G$  とその部分群  $H \subset G$  について、 $G$  の  $H$  に関する右剰余類、左剰余類はどのような形をしているだろうか。

補題 1.37  $G$  を群、 $H \subset G$  を  $G$  の部分群とする。

- (1)  $G$  の  $H$  に関する任意の右剰余類  $\mathcal{C}$  に対して、 $x \in G$  が存在して、 $\mathcal{C} = xH$  と表される。逆に、任意の  $x \in G$  について、 $xH$  は  $G$  の  $H$  に関する右剰余類である。
- (2)  $G$  の  $H$  に関する任意の左剰余類  $\mathcal{C}$  に対して、 $x \in G$  が存在して、 $\mathcal{C} = Hx$  と表される。逆に、任意の  $x \in G$  について、 $Hx$  は  $G$  の  $H$  に関する左剰余類である。

証明. (1) を示す。  $\mathcal{C}$  を群  $G$  の部分群  $H$  に関する右同値類とする。いま、  $\mathcal{C}$  の元  $x \in \mathcal{C}$  を 1 つとると、任意の  $y \in \mathcal{C}$  について、  $x^{-1}y \in H$  であるから、  $x^{-1}y = h$  なる  $H$  の元  $h \in H$  が存在する。よって、  $y = xh \in xH$  である。ゆえに、  $\mathcal{C} \subset xH$  が成り立つ。逆に、  $xH$  の元は、  $H$  の元  $h \in H$  を用いて  $xh$  と表されるが、  $x^{-1}(xh) = h \in H$  であるから  $x \sim xh$  である。よって、  $xh \in \mathcal{C}$  となり、  $xH \subset \mathcal{C}$  が得られる。従って、群  $G$  の部分群  $H$  に関する任意の右同値類は  $G$  の元  $x \in G$  を用いて  $xH$  の形で表される。(2) についても同様である。■

ここで、 $G$  の同値関係 (1.59) に関する完全代表系を  $\Lambda \subset G$  とする。すると、右剰余空間  $G/H$  は  $G/H = \{xH; x \in \Lambda\}$  と表される。同値関係 (1.60) についても同様である。

なお、 $x \in H$  のとき、右剰余類  $xH \subset G$  は  $H$  に含まれる。さらに、 $x^{-1} \in H$  であるから、 $x^{-1}H \subset H$  であり、 $H = x(x^{-1}H) \subset xH$  となるから、 $xH = H$  である。このことは、左剰余類についても同様である。以下では、 $H$  と一致する右剰余類や左剰余類は、単に  $H$  と表すことにする。

いま、 $x \in G$  とし、右剰余類  $xH \in G/H$  を考える。 $xH = \{xh \in G; h \in H\}$  であるが、 $h, h' \in H$  について、 $xh = xh'$  ならば、 $h = x^{-1}(xh) = x^{-1}(xh') = h'$  であるから、 $\#(xH) = \#H$  である。左剰余類  $Hx \in H \setminus G$  についても、 $\#(Hx) = \#H$  が成り立つ。

次の定理は、単純だが重要なものである。

定理 1.38  $G$  を有限群、 $H \subset G$  を  $G$  の部分群とする。このとき、 $H$  の位数  $\#H$  は  $G$  の位数  $\#G$  の約数である。

証明.  $H$  は  $G$  の部分群だから、明らかに有限な部分群である。そこで、 $G$  を  $H$  に関する右剰余類たちに分解する。その完全代表系を  $\Lambda = \{x_1, \dots, x_m\}$  とすると、 $G = x_1H \sqcup \dots \sqcup x_mH$  と分解される。このとき、 $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について  $\#(x_jH) = \#H$  であるから、 $\#G = \sum_{j=1}^m \#(x_jH) = m\#H$  となる。よって、 $\#H$  は  $\#G$  の約数である。■

この証明により、右剰余空間  $G/H$  の元の個数  $\#(G/H)$  も  $G$  の位数  $\#G$  の約数であることがわかる。また、この証明は左剰余類を用いても全く同様にすることができる。よって、左剰余空間  $H \setminus G$  の元の個数  $\#(H \setminus G)$  も  $\#G$  の約数であり、 $\#(G/H)$  と一致する。

定義 1.39  $G$  を (有限群とは限らない) 群とし,  $H \subset G$  を  $G$  の部分群とする. このとき, 右剰余空間  $G/H$  の元の個数  $\sharp(G/H)$  を  $H$  の  $G$  における指数と呼び, しばしば  $[G : H]$  と表す.  $[G : H]$  が有限であるとき,  $H$  を  $G$  の指数有限な部分群と呼ぶ.

問 1.40  $G$  を (有限群とは限らない) 群とし,  $H \subset G$  を  $G$  の部分群とする.

- (1)  $G$  の部分集合  $S \subset G$  について,  $S$  が  $H$  に関する右剰余類であることと,  $S^{-1} \subset G$  が  $H$  に関する左剰余類であることが同値であることを示せ.
- (2)  $H \subset G$  が  $G$  の指数有限な部分群であるとする. このとき,  $H$  の  $G$  における指数  $[G : H]$  は,  $G$  の  $H$  に関する左剰余空間  $H \backslash G$  の元の個数  $\sharp(H \backslash G)$  と一致することを示せ.

右剰余空間および左剰余空間は,  $G$  の部分群  $H \subset G$  が正規部分群であるとき, よりよい性質をもつ.

補題 1.41  $G$  を群とし,  $H \triangleleft G$  を  $G$  の正規部分群とする. このとき, 任意の  $x \in G$  について  $xH = Hx$  が成り立つ.

証明.  $h \in H$  について,  $xh = (xhx^{-1})x$  であるが,  $H \triangleleft G$  であるから,  $xhx^{-1} \in H$ . よって,  $xh = (xhx^{-1})x \in Hx$  となる. これが, 任意の  $h \in H$  について成り立つから,  $xH \subset Hx$  となる. 同様にして,  $Hx \subset xH$  も得られる. 従って,  $xH = Hx$  が成り立つ. ■

この補題により, 群  $G$  の正規部分群  $H \triangleleft G$  について, 右剰余空間  $G/H$  と左剰余空間  $H \backslash G$  は集合として一致する. そこで,  $x \in G$  に対して,  $xH = Hx$  を単に剰余類,  $G/H$  を単に剰余空間と呼ぶことにする.

問 1.42  $G$  を群とし,  $H \subset G$  を指数 2 の部分群とする. このとき,  $H$  は  $G$  の正規部分群であることを示せ.

問 1.43  $G = S_3$  を 3 次対称群とする.

- (1)  $G = S_3$  のすべての部分群を求めよ.
- (2) (1) で求めた部分群について, それが  $G = S_3$  の正規部分群であるかどうか調べよ.

この剰余空間  $G/H$  には,  $G$  の乗法から導かれる乗法が定義できる.

定理 1.44  $G$  を群とし,  $H \triangleleft G$  を  $G$  の正規部分群とする.

- (1)  $G$  の  $H$  に関する剰余類  $xH, yH \in G/H$  ( $x, y \in G$ ) について, 積  $(xH) \cdot (yH)$  を次のように定義する.

$$(xH) \cdot (yH) = xyH. \quad (1.61)$$

この定義は、剰余類  $xH, yH \in G/H$  の代表元のとり方に依らない。

(2) 剰余空間  $G/H$  は、この乗法により群になる。この群の単位元は  $1_G H = H$  であり、 $G/H$  の元  $xH \in G/H$  の逆元は  $x^{-1}H \in G/H$  である。

証明. (1)  $x', y' \in G$  を、 $xH = x'H, yH = y'H$  をみたす  $G$  の元とする。このとき、 $xyH = x'y'H$  を示す。  $x' \in x'H = xH, y' \in y'H = yH$  であるから、 $H$  の元  $h_1, h_2 \in H$  が存在して  $x' = xh_1, y' = yh_2$  と表される。このとき、 $H \triangleleft G$  より  $y^{-1}h_1y \in H$  であるから、

$$x'y' = (xh_1)(yh_2) = (xy)((y^{-1}h_1y)h_2) \in xyH.$$

よって、 $x'y' \in xyH$  となる。ゆえに、 $x'y'H \subset xyH$  である。ここで、 $x$  と  $x', y$  と  $y'$  の立場を入れ替えることにより、 $xyH \subset x'y'H$  も成り立つ。従って、 $xyH = x'y'H$  が得られる。

(2)  $G/H$  の元  $xH, yH, zH \in G/H$  ( $x, y, z \in G$ ) をとると、 $(xy)z = x(yz)$  であるから、

$$\begin{aligned} ((xH) \cdot (yH)) \cdot (zH) &= (xyH) \cdot (zH) = ((xy)z)H = (x(yz))H \\ &= (xH) \cdot (yzH) = (xH) \cdot ((yH) \cdot (zH)). \end{aligned}$$

よって、この乗法は結合法則をみたす。また、任意の  $xH \in G/H$  ( $x \in G$ ) について、 $(xH) \cdot H = (xH) \cdot (1_G H) = (x \cdot 1_G)H = xH$  となる。同様にして、 $H \cdot (xH) = xH$  も成り立つ。ゆえに、 $H = 1_G H$  は  $G/H$  のこの乗法に関する単位元になる。さらに、 $xH \in G/H$  ( $x \in G$ ) について、 $(xH) \cdot (x^{-1}H) = (xx^{-1})H = 1_G H = H$  となる。これも同様にして、 $(x^{-1}H) \cdot (xH) = H$  が成り立つ。よって、 $x^{-1}H$  は  $G/H$  のこの乗法に関する  $xH$  の逆元である。以上により、 $G/H$  はこの乗法により群になる。■

定義 1.45  $G$  を群とし、 $H \triangleleft G$  を正規部分群とする。このとき、剰余空間  $G/H$  上に (1.61) により定義される乗法により群と考えたものを、 $G$  の  $H$  による剰余群と呼ぶ。

$H = \{1_G\}$  のときは、 $G/H$  は自然に  $G$  と同一視される。また、 $H = G$  のときは、 $G/H$  はただ1個の元からなる群である。

特に混乱の恐れがない場合、 $x \in G$  を元としてもつ剰余類  $xH \in G/H$  を  $\bar{x}$  と書くことにする。この記号を用いると、剰余群  $G/H$  の単位元は  $1_{G/H} = \bar{1}_G$  であり、 $\bar{x} = xH \in G/H$  の逆元は  $(\bar{x})^{-1} = \overline{x^{-1}} \in G/H$  である。

(1.61) のように、定義が同値類の代表元のとり方に依らないときがある。このようなとき、定義が well-defined、あるいは単にこの演算が well-defined であるという。しばしば、集合  $S$  上の同値関係  $\sim$  による剰余空間  $S/\sim$  上で定義された概念が、見かけ上同値類の代表元に依存していることがある。それが真に剰余空間上の概念であるためには、その定義が well-defined、即ち、代表元のとり方に依らないことを示さなければならない。

ここで、自然な射影について述べる。

命題 1.46  $G$  を群,  $H \triangleleft G$  を正規部分群とし,  $G/H$  を  $G$  の  $H$  による剰余群とする. いま, 写像  $\pi : G \rightarrow G/H$  を次で定義する.

$$\pi(x) = \bar{x} = xH, \quad (1.62)$$

ただし,  $x \in G$  とする. このとき,  $\pi$  は全射準同型写像である.

証明.  $x, y \in G$  について, (1.61) より

$$\pi(xy) = xyH = (xH) \cdot (yH) = \pi(x)\pi(y).$$

ゆえに,  $\pi$  は準同型写像である. また,  $G/H$  の任意の元は,  $G$  の元  $x \in G$  を用いて  $\bar{x} = xH \in G/H$  の形で表されるから,  $\pi(x) = xH \in G/H$  となる. よって,  $\pi$  は全射である. ■

定義 1.47  $G$  を群,  $H \triangleleft G$  を正規部分群とし,  $G/H$  を  $G$  の  $H$  に関する剰余群とする. このとき, (1.62) で与えられる準同型写像  $\pi$  を,  $G$  から  $G/H$  への自然な射影と呼ぶ.

例 1.48  $n$  を 0 でない整数とする. このとき,  $H = n\mathbb{Z} = \{nm \in \mathbb{Z}; m \in \mathbb{Z}\}$  は加法群  $G = \mathbb{Z}$  の部分群である. 実際,  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  について,  $nm_1 + nm_2 = n(m_1 + m_2) \in n\mathbb{Z} = H$ . そして, 整数  $m \in \mathbb{Z}$  について,  $-nm = n(-m) \in n\mathbb{Z} = H$  となる. 加法群  $G = \mathbb{Z}$  は Abel 群であるから,  $G$  の部分群  $H = n\mathbb{Z}$  は  $G = \mathbb{Z}$  の正規部分群である. そこで, 剰余群  $G/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  を考える. 任意の整数  $m \in \mathbb{Z}$  について,  $nm = (-n)(-m)$  であるから,  $n\mathbb{Z} = (-n)\mathbb{Z}$  である. よって,  $n$  は正整数として一般性を失わない.  $n = 1$  のときは,  $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  であるから,  $G/H = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$  は 1 個の元からなる群である.  $n \geq 2$  とすると, 完全代表系として,  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  をとることができる. よって, 集合としては,  $G/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$  である.  $0 \leq j \leq n-1$  なる整数  $j$  について, 同値類  $\bar{j} = j + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  は,  $n$  でわったときの余りが  $j$  となる整数全体のなす  $\mathbb{Z}$  の部分集合である. この剰余群  $G/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  を位数  $n$  の (有限) 巡回群と呼ぶ.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  を有限巡回群と呼ぶことに対して, 加法群  $\mathbb{Z}$  を無限巡回群と呼ぶ.

ここで, 群論の最も重要な定理である準同型定理を述べる.

定理 1.49 (準同型定理).  $G_1, G_2$  を群,  $f : G_1 \rightarrow G_2$  を準同型写像とし,  $\pi : G_1 \rightarrow G_1/\text{Ker} f$  を自然な射影とする. このとき,  $f = \bar{f} \circ \pi$  が成り立つ準同型写像  $\bar{f} : G_1/\text{Ker} f \rightarrow G_2$  がただ 1 つ存在する. さらに,  $\bar{f}$  は  $G_1/\text{Ker} f$  から  $\text{Im} f \subset G_2$  への同型写像になる.

証明. 準同型写像  $f : G_1 \rightarrow G_2$  について,  $f$  の核  $\text{Ker} f \subset G_1$  は  $G_1$  の正規部分群であり,  $f$  の像  $\text{Im} f \subset G_2$  は  $G_2$  の部分群であることを思い出す. その上で,  $\bar{f} : G_1/\text{Ker} f \rightarrow G_2$  を, 以下で定義する.

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x), \quad x \in G_1. \quad (1.63)$$



まず、これが well-defined であることを示す。  $\bar{x} = \overline{x'}$  とすると、  $h \in \text{Ker} f$  が存在して  $x' = xh$  となる。  $h \in \text{Ker} f$  であるから  $f(h) = 1_{G_2} \in G_2$ 。 よって、  $f(x') = f(xh) = f(x)f(h) = f(x)1_{G_2} = f(x)$ 。 ゆえに、  $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\overline{x'})$  である。 従って、  $\bar{f}$  は well-defined である。

次に、  $\bar{f}$  が準同型であることを示す。  $\bar{x}, \bar{y} \in G/\text{Ker} f$  ( $x, y \in G$ ) について、  $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x\text{Ker} f) \cdot (y\text{Ker} f) = xy\text{Ker} f = \overline{xy}$  であるから、

$$\bar{f}(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \bar{f}(\overline{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = \bar{f}(\bar{x})\bar{f}(\bar{y}).$$

従って、  $\bar{f}$  は準同型である。

$\bar{f} \circ \pi = f$  であることは、任意の  $x \in G_1$  について  $\pi(x) = \bar{x}$  であることから、  $(\bar{f} \circ \pi)(x) = \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$  が成り立つことより分かる。 逆に、準同型写像  $g : G_1/\text{Ker} f \rightarrow G_2$  が  $g \circ \pi = f$  をみたすとする。 すると、任意の  $\bar{x} \in G_1/\text{Ker} f$  ( $x \in G_1$ ) について、  $g(\bar{x}) = g(\pi(x)) = (g \circ \pi)(x) = f(x) = \bar{f}(\bar{x})$  が成り立つ。 従って、  $g = \bar{f}$  となり、  $\bar{f}$  の一意性が示された。

続いて、  $\bar{f}$  が単射であることを示す。  $\bar{x}, \bar{y} \in G_1/\text{Ker} f$  ( $x, y \in G_1$ ) について、  $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$  が成り立つとする。 すると、  $f(x) = \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y}) = f(y)$  である。 よって、  $f(x^{-1}y) = f(x^{-1})f(y) = f(x)^{-1}f(y) = 1_{G_2} \in G_2$  となる。 ゆえに、  $x^{-1}y \in \text{Ker} f$  であるから、  $h \in \text{Ker} f$  が存在して、  $x^{-1}y = h$  となる。 よって、  $y = xh$  となり、  $\bar{y} = y\text{Ker} f = xh\text{Ker} f = x\text{Ker} f = \bar{x}$ 。 よって、  $\bar{f}$  は単射である。

最後に、  $\bar{f}$  が  $G_1/\text{Ker} f$  から  $\text{Im} f$  への全射であることを示す。 任意の  $y \in \text{Im} f$  に対して、  $x \in G_1$  が存在して、  $y = f(x)$  と表される。 このとき、  $\bar{x} \in G_1/\text{Ker} f$  であり、  $\bar{f}(\bar{x}) = f(x) = y$  となる。 従って、  $\text{Im} f \subset \text{Im} \bar{f}$  となる。 また、(1.63) より、  $\text{Im} \bar{f} \subset \text{Im} f$  は明らかである。 従って、  $\text{Im} \bar{f} = \text{Im} f$  であり、  $\bar{f}$  は全射である。 ■

**例 1.50**  $n$  を  $n \geq 2$  なる整数とする。 このとき、  $n$  次の置換  $\sigma$  に符号  $\text{sgn} \sigma$  を与えることは、  $n$  次対称群  $S_n$  から  $\mathbb{C}$  の単元群  $\mathbb{C}^\times$  への準同型写像と考えられる。 この写像を  $\sigma : S_n \rightarrow \mathbb{C}^\times$  と表すことにする。 すると、この準同型写像  $\text{sgn}$  の核  $\text{Ker}(\text{sgn})$  は  $n$  次交代群  $A_n$  に他ならない。 また、  $\text{sgn}$  の像  $\text{Im}(\text{sgn})$  は  $\{1, -1\} \subset \mathbb{C}^\times$  である。 従って、準同型定理より  $S_n/A_n \simeq \{1, -1\}$  が成り立つ。

準同型定理を用いて、1個の元から生成される群の構造を調べる。

**補題 1.51**  $G$  を群とする。

(1)  $A$  を空集合でない(元の個数が任意の)集合とし、  $\{H_\lambda \subset G; \lambda \in A\}$  を  $G$  の部分群からなる集合族とする。 このとき、  $\bigcap_{\lambda \in A} H_\lambda \subset G$  は  $G$  の部分群である。

(2)  $S \subset G$  を部分集合とする。 このとき、  $S$  を含む  $G$  の最小の部分群が存在する。

証明. (1)  $x, y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$  とする. すると, 任意の  $\lambda \in \Lambda$  について  $x, y \in H_\lambda$  であり,  $H_\lambda \subset G$  は  $G$  の部分群であるから,  $xy, x^{-1} \in H_\lambda$  となる. よって,  $xy, x^{-1} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$  となり,

$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda \subset G$  は  $G$  の部分群になる.

(2)  $\mathcal{H} = \{H \subset G; G \text{ の部分群, } S \subset H\}$  とし,  $H_0 = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \subset G$  とおく. すると,  $G \in \mathcal{H}$  より,  $\mathcal{H}$  は空集合ではない. また, (1) より  $H_0 \subset G$  は  $G$  の部分群であり, 明らかに  $S$  を含む. さらに,  $\mathcal{H}$  の定義より,  $S \subset H$  なる任意の部分群  $H \subset G$  について,  $H \in \mathcal{H}$  であるから  $H_0 \subset H$  である. 従って,  $H_0$  は  $S$  を含む  $G$  の最小の部分群である. ■

**定義 1.52**  $G$  を群とし,  $S \subset G$  を部分集合とする. このとき,  $S$  を含む  $G$  の最小の部分群を  $S$  が生成する  $G$  の部分群と呼び,  $\langle S \rangle$  と表すことにする. 特に,  $S = \{a\}$  (1点集合) のとき,  $\langle S \rangle$  を単に  $\langle a \rangle$  と表し,  $a$  が生成する  $G$  の部分群と呼ぶ.

**補題 1.53**  $G$  を群とし,  $a \in G$  を  $G$  の元とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\langle a \rangle = \{a^n \in G; n \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.64)$$

ここで,  $a^0 = 1_G$  とし, 正整数  $n$  について,  $a^{-n} = (a^{-1})^n \in G$  とする.

証明.  $H = \{a^n \in G; n \in \mathbb{Z}\}$  とする. すると,  $H \subset \langle a \rangle$  である. そこで,  $\langle a \rangle \subset H$  を示す. そのためには,  $H$  が  $a$  を元としてもつ  $G$  の部分群であることを示せばよい.  $a = a^1 \in H$  は明らかである. そこで,  $H \subset G$  が部分群であることを示す. まず, 次のことを示す.

$$\text{任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ について, } (a^n)^{-1} = a^{-n}. \quad (1.65)$$

$n$  が正整数であるとき,

$$a^n a^{-n} = a^n (a^{-1})^n = a^{n-1} a a^{-1} (a^{-1})^{n-1} = a^{n-1} (a^{-1})^{n-1} = \dots = a a^{-1} = 1_G.$$

同様にして,  $a^{-n} a^n = 1_G$  が得られるから,  $(a^n)^{-1} = a^{-n} \in H$  である. また, このことより  $(a^{-n})^{-1} = a^n = a^{-(-n)} \in H$  でもある. さらに,  $a^0 = 1_G \in H$  について  $1_G^{-1} = 1_G = a^0 = a^{-0} \in H$  である. 従って, 任意の整数  $n \in \mathbb{Z}$  について  $(a^n)^{-1} = a^{-n} \in H$  であることが分かる. 続いて, 以下のことを示す.

$$\text{任意の } m, n \in \mathbb{Z} \text{ について, } a^m a^n = a^{m+n} \in H. \quad (1.66)$$

ここで, 6つの場合に分ける.

(1)  $m, n \geq 0$  のとき. 通常の乗法で  $a^m a^n = a^{m+n} \in H$  となり, 主張が成り立つ.

(2)  $m, n < 0$  のとき. (1.65) より  $a^m = (a^{-m})^{-1}$ ,  $a^n = (a^{-n})^{-1}$  であるから,  $a^m a^n = (a^{-m})^{-1} (a^{-n})^{-1} = (a^{-n} a^{-m})^{-1} = (a^{(-n)+(-m)})^{-1} = (a^{-(m+n)})^{-1} = a^{m+n} \in H$ .

(3)  $m \geq 0, n < 0$  かつ  $m \geq |n|$  のとき.  $m \geq -n$  であるから,  $a^m = a^{m-(-n)} a^{-n} = a^{m+n} a^{-n}$  となる. よって,  $a^m a^n = a^{m+n} a^{-n} a^n = a^{m+n} \in H$ .

(4)  $m \geq 0, n < 0$  かつ  $m < |n|$  のとき.  $m < -n$  であるから,  $a^n = (a^{-n})^{-1} = (a^{(-n)-m} a^m)^{-1} = (a^m)^{-1} (a^{(-n)-m})^{-1} = (a^m)^{-1} (a^{-(m+n)})^{-1} = a^{-m} a^{m+n}$  となる. ゆえに,  $a^m a^n = a^m a^{-m} a^{m+n} = a^{m+n} \in H$ .

(5)  $m < 0, n \geq 0$  かつ  $|m| \leq n$  のとき. (3) と同様にして,  $-m \leq n$  より  $a^n = a^{-m} a^{m+n}$  となる. よって,  $a^m = a^m a^{-m} a^{m+n} = a^{m+n} \in H$ .

(6)  $m < 0, n \geq 0$  かつ  $|m| > n$  のとき. (4) と同様にして,  $-m > n$  より  $a^m = a^{m+n} a^{-n}$  となる. ゆえに,  $a^m a^n = a^{m+n} a^{-n} a^n = a^{m+n} \in H$ .

以上により, 任意の整数  $m, n \in \mathbb{Z}$  について  $a^m a^n = a^{m+n} \in H$  が成り立つ. 従って,  $H \subset G$  が  $G$  の部分群であることが分かる. ■

補題 1.54  $G$  を群,  $a \in G$  を  $G$  の元とする. このとき, 写像  $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$  を次で定義する.

$$f(n) = a^n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.67)$$

このとき,  $f$  は準同型写像であり,  $\text{Im} f = \langle a \rangle \subset G$  である.

証明. (1.66) より, 任意の整数  $m, n \in \mathbb{Z}$  について,  $f(m)f(n) = a^m a^n = a^{m+n} = f(m+n)$  であることが分かる. よって,  $f$  は準同型写像である. また, 補題 1.53 より  $\langle a \rangle = \{a^n \in G; n \in \mathbb{Z}\}$  であるから,  $\text{Im} f = \langle a \rangle$  である. ■

補題 1.55  $\mathbb{Z}$  を加法群と考え,  $H \subset \mathbb{Z}$  を部分群とする. このとき, 非負整数  $n$  が存在して,  $H = n\mathbb{Z} = \{nm; m \in \mathbb{Z}\}$  と表される.

証明.  $H \subset \mathbb{Z}$  は部分群だから,  $0 \in H$  である.  $H = \{0\}$  ならば,  $n = 0$  とすると,  $H = \{0\} = 0\mathbb{Z}$  となる. そこで,  $l \neq 0$  なる  $l \in H$  が存在するとする.  $H \subset \mathbb{Z}$  は部分群だから,  $-l \in H$  である. よって,  $l > 0$  なる  $H$  の元  $l \in H$  が存在する. いま,  $n = \min\{l \in H; l > 0\}$  とする. すると,  $n > 0$  であり, 任意の整数  $m$  について  $nm \in H$  である. ここで,  $k \in H$  ならば,  $k$  は  $n$  の倍数, 即ち, 整数  $m \in \mathbb{Z}$  が存在して,  $k = nm$  となることを示す. もし,  $k$  が  $n$  の倍数でないとする, 整数  $m'$  および  $1 \leq r \leq n-1$  なる整数  $r$  が存在して,  $k = nm' + r$  と表される.  $nm' \in H$  であるから,  $-nm' \in H$ . よって,  $r = k + (-nm') \in H$ . これは,  $n$  の最小性に反する. 従って,  $k$  は  $n$  の倍数である. 以上により,  $H = n\mathbb{Z}$  であることが分かる. ■

定義 1.56  $G$  を群とし,  $G$  の元  $a \in G$  が存在して  $G = \langle a \rangle$  であるとする. このとき,  $G$  は  $a \in G$  で生成される巡回群であるという. さらに  $G$  が有限群ときは  $a \in G$  で生成される有限巡回群, 無限群のときは  $a \in G$  で生成される無限巡回群という.

命題 1.57  $G$  を, ある元  $a \in G$  で生成される群  $G = \langle a \rangle$  であるとする.

- (1)  $G$  が有限群ならば, 正整数  $n$  が存在して,  $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  となる.
- (2)  $G$  が無限群ならば,  $G \simeq \mathbb{Z}$  となる.

証明.  $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$  を (1.67) で与えられる準同型写像とすると,  $G = \langle a \rangle$  より  $f$  は全射で,  $\text{Ker} f = \{l \in \mathbb{Z}; a^l = 1_G\} \subset G$  であり, 準同型定理より  $G \simeq \mathbb{Z}/\text{Ker} f$  となる.

(1)  $G$  を有限群とする. すると,  $l < m$  かつ  $a^l = a^m$  なる非負整数  $l, m$  が存在する.  $l > 0$  ならば,  $1_G = a^l(a^l)^{-1} = a^m(a^l)^{-1} = a^{m-l}a^l(a^l)^{-1} = a^{m-l}$  であり,  $m-l > 0$  となる. ゆえに,  $\text{Ker} f$  は 0 以外の元をもつ. よって, 補題 1.55 より, 正整数  $n$  が存在して,  $\text{Ker} f = n\mathbb{Z}$  となる. 従って,  $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  が成り立つ.

(2)  $G$  を無限群とする. このとき,  $f$  は単射であることを示す. いま,  $l < m$  かつ  $a^l = a^m$  なる整数  $l, m$  が存在するとする. すると,  $a^m = a^{m-l}a^l$  より  $1_G = a^l(a^l)^{-1} = a^{m-l}a^l(a^l)^{-1} = a^{m-l}$  となる.  $m-l > 0$  より,  $\text{Ker} f$  は 0 でない元をもつ. すると, (1) と同様にして, 正整数  $n$  が存在して,  $\text{Ker} f = n\mathbb{Z}$  となり,  $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  となるが, 例 1.48 より  $\#G = \#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n$  であり,  $G$  が無限群であることに反する. よって,  $f$  は単射であり,  $\text{Ker} f = \{0\}$  となる. 従って,  $G = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$  となる. ■

定義 1.58  $G$  を群,  $a \in G$  を  $G$  の元とする.  $\langle a \rangle$  が有限部分群であるとき,  $\langle a \rangle$  の位数  $\#\langle a \rangle$  を  $a$  の位数と呼ぶ.  $\langle a \rangle$  が無限群であるとき,  $a$  の位数は  $\infty$  であるとする.

問 1.59  $G$  を群,  $a \in G$  とし,  $\#\langle a \rangle = n$  ( $n$  は正整数) であるとする. このとき,  $n$  は  $a^n = 1_G$  なる最小の正整数であることを示せ.

命題 1.60  $G$  を有限群,  $a \in G$  を  $G$  の元とする. このとき,  $a$  の位数は  $G$  の位数の約数である.

証明.  $\langle a \rangle$  は  $G$  の部分群であり,  $G$  は有限群であるから, 定理 1.38 より  $\#\langle a \rangle$  は  $\#G$  の約数である. よって,  $a \in G$  の位数は  $\#G$  の約数になる. ■

準同型定理から得られる同型定理と呼ばれる 2 つの定理を与える.

定理 1.61 (第一同型定理).  $G_1, G_2$  を群,  $N \triangleleft G_2$  を  $G_2$  の正規部分群とし,  $f : G_1 \rightarrow G_2$  を全射準同型写像とする. このとき,  $G_1/f^{-1}(N) \simeq G_2/N$  が成り立つ.

証明.  $\pi_2 : G_2 \longrightarrow G_2/N$  を自然な射影とし,  $\pi_2(z) = \bar{z} \in G_2/N$  ( $z \in G_2$ ) と表すことにする. また, 準同型写像  $g : G_1 \longrightarrow G_2/N$  を  $g = \pi_2 \circ f$  と定義する. すると, 任意の  $x, y \in G_1$  について,

$$\begin{aligned} g(xy) &= (\pi_2 \circ f)(xy) = \pi_2(f(xy)) = \pi_2(f(x)f(y)) = \pi_2(f(x))\pi_2(f(y)) \\ &= (\pi_2 \circ f)(x)(\pi_2 \circ f)(y) = g(x)g(y). \end{aligned}$$

よって,  $g$  も準同型写像である. また,  $f, \pi_2$  ともに全射であるから,  $g = \pi_2 \circ f$  も全射である. ゆえに, 準同型定理により,  $G_1/\text{Ker } g \simeq \text{Im } g = G_2/N$  が成り立つ. そこで,  $\text{Ker } g = f^{-1}(N)$  を示す.  $x \in \text{Ker } g$  とすると,  $g(x) = 1_{G_2/N} = \bar{1}_{G_2} = N \in G_2/N$  であり,  $g(x) = (\pi_2 \circ f)(x) = \pi_2(f(x)) = \overline{f(x)} = f(x)N$  であるから,  $f(x) \in N$  となる. よって,  $x \in f^{-1}(N)$  が成り立つ. ゆえに,  $\text{Ker } g \subset f^{-1}(N)$  となる. 逆に,  $x \in f^{-1}(N)$  とすると,  $f(x) \in N$  であるから,  $g(x) = (\pi_2 \circ f)(x) = \pi_2(f(x)) = \overline{f(x)} = f(x)N = N = \bar{1}_{G_2} \in G_2/N$  となる. ゆえに,  $x \in \text{Ker } g$  となるから,  $f^{-1}(N) \subset \text{Ker } g$  が成り立つ. 従って,  $\text{Ker } g = f^{-1}(N)$  となる. ■

**命題 1.62**  $G$  を群,  $N \triangleleft G$  を正規部分群とし,  $\pi : G \longrightarrow G/N$  を自然な射影とする.

- (1)  $H \subset G$  を  $N \subset H$  なる部分群とする. このとき,  $\pi(H) \subset G/N$  は  $G/N$  の部分群であり,  $\pi(H) \simeq H/N$  である.
- (2) さらに,  $H$  が  $G$  の正規部分群であるならば,  $\pi(H) \subset G/N$  は  $G/N$  の正規部分群であり,  $\pi(H)$  と  $H/N$  を同一視することにより,  $(G/N)/(\pi(H)) \simeq G/H$  が成り立つ.

証明. (1)  $H \subset G$  は部分群であり,  $\pi : G \longrightarrow G/N$  は準同型であるから,  $\pi(H) \subset G/N$  は  $G/N$  の部分群である. また,  $\pi$  の  $H$  への制限を  $\pi_H$  と表すとすると,  $\pi_H : H \longrightarrow G/N$  は準同型であり,  $\text{Im } \pi_H = \pi(H)$  である. そして,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \pi_H &= \{h \in H; \pi(h) = 1_{G/N} = \bar{1}_G = 1_G N = N\} = \{h \in H; hN = N\} \\ &= \{h \in N; h \in N\} = N. \end{aligned}$$

よって, 準同型定理より  $\pi(H) \simeq H/N$  となる.

- (2)  $g \in G, h \in H$  とする. このとき,  $H \triangleleft G$  より  $ghg^{-1} \in H$ . よって,

$$\pi(g)\pi(h)\pi(g)^{-1} = \pi(g)\pi(h)\pi(g^{-1}) = \pi(ghg^{-1}) \in \pi(H).$$

ゆえに,  $\pi(H) \subset G/N$  は  $G/N$  の正規部分群である. (1) より,  $\pi(H) \simeq H/N$  であるから,  $\pi(H)$  と  $H/N$  を同一視する. 自然な射影  $\pi : G \longrightarrow G/N$  は全射準同型であるから, 第一同型定理より,  $(G/N)/(\pi(H)) \simeq G/(\pi^{-1}(\pi(H)))$  が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(H)) &= \{g \in G; \pi(g) \in \pi(H)\} = \{g \in G; \exists h \in H, \pi(g) = \pi(h)\} \\ &= \{g \in G; \exists h \in H, g \in hN\}. \end{aligned}$$

$g \in G$  について,  $h \in H$  が存在して  $g \in hN$  であるとする,  $N \subset H$  より  $hN \subset H$  であるから,  $g \in H$  となる. 逆に,  $g \in H$  ならば, 明らかに  $g \in gN$  である. ゆえに,

$$\pi^{-1}(H/N) = \{g \in G; g \in H\} = H.$$

従って,  $(G/N)/(H/N) \simeq G/H$  が成り立つ. ■

もう一つの同型定理を述べる前に, 補題を用意する.

**補題 1.63**  $G$  を群とし,  $H, N \subset G$  を部分群とする.

- (1)  $H, N$  のうち少なくとも一方が正規部分群ならば,  $HN \subset G$  は  $G$  の部分群である.
- (2)  $H, N$  とともに正規部分群ならば,  $HN \subset G$  も正規部分群である.

証明. (1)  $N \triangleleft G$  とする.  $h_1, h_2 \in H, n_1, n_2 \in N$  とするとき,  $N \triangleleft G$  より  $h_2^{-1}n_1h_2 \in N$  であるから,

$$(h_1n_1)(h_2n_2) = (h_1h_2)((h_2^{-1}n_1h_2)n_2) \in HN.$$

また,  $h \in H, n \in N$  について,  $N \triangleleft G$  より  $hn^{-1}h^{-1} \in N$  となり,

$$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}(hn^{-1}h^{-1}) \in HN.$$

従って,  $HN \subset G$  は  $G$  の部分群である.  $H \triangleleft G$  のときも同様である.

(2)  $h \in H, n \in N$ , および  $g \in G$  について,  $H \triangleleft G, N \triangleleft G$  より  $ghg^{-1} \in H$  かつ  $gng^{-1} \in N$  である. よって,

$$g(hn)g^{-1} = (ghg^{-1})(gng^{-1}) \in HN.$$

ゆえに,  $HN \triangleleft G$  となる. ■

$H \subset G$  が部分群で,  $N \triangleleft G$  のとき, 任意の  $h \in H, n \in N$  について,  $hnh^{-1} \in N$  より  $hn = (hnh^{-1})h \in NH$ . よって,  $HN \subset NH$  となる. 同様にして,  $NH \subset HN$  も得られる. ゆえに,  $HN = NH$  である.

**定理 1.64 (第二同型定理).**  $G$  を群,  $H \subset G$  を  $G$  の部分群とし,  $N \triangleleft G$  を  $G$  の正規部分群とする. このとき,  $(HN)/N \simeq H/(H \cap N)$  が成り立つ.

証明.  $\pi : G \rightarrow G/N$  を自然な射影とする. いま,  $\pi$  を  $H$  上に制限したものを  $\pi_H$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} \text{Ker}\pi_H &= \{h \in H; \pi_H(h) = 1_{G/N} = \bar{1}_G = 1_GN = N\} = \{h \in H; hN = N\} \\ &= \{h \in H; h \in N\} = H \cap N. \end{aligned}$$

また、補題 1.63 (1) より  $HN \subset G$  は  $G$  の部分群であり、 $H \subset HN$  であるから  $\pi(H) \subset \pi(HN)$ . また、 $h \in H, n \in N$  について、 $\pi(hn) = \overline{hn} = hnN = hN = \pi(h) \in \pi(H)$ . よって、 $\pi(HN) \subset \pi(H)$ . ゆえに、 $\pi(H) = \pi(HN)$  となる. また、 $HN \supset N$  であるから、命題 1.62 (1) より  $\pi(HN) \simeq (HN)/N$  となる. 従って、準同型定理より、

$$H/(H \cap N) \simeq \text{Im}\pi_H = \pi(H) = \pi(HN) \simeq (HN)/N.$$

■

ここで、複数の群から新しい群を作る操作を述べる.

**定義 1.65**  $n$  を正整数、 $G_1, \dots, G_n$  を群とし、 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$  を  $G_1, \dots, G_n$  の直積集合とする.

$$G = \{(x_1, \dots, x_n); x_j \in G_j (1 \leq j \leq n)\}.$$

このとき、 $G$  上の乗法を次のように定義する.

$$xy = (x_1y_1, \dots, x_ny_n) \in G, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in G. \quad (1.68)$$

すると、 $G$  がこの乗法で群になることが分かる. この群  $G$  を  $G_1, \dots, G_n$  の直積群という.

この操作は、与えられた群たちから新しい群を構成する操作である. すると、 $1 \leq j \leq n$  なる整数  $j$  について、次の写像  $\iota_j : G_j \rightarrow G$  を考えることができる.

$$\iota_j : G_j \ni x_j \mapsto (1_{G_1}, \dots, x_j, \dots, 1_{G_n}) \in G. \quad (1.69)$$

この写像  $\iota_j$  は明らかに準同型であり、単射である. この  $\iota_j$  を  $G_j$  の  $G$  への埋め込みと呼ぶことがある. よって、各  $G_j (1 \leq j \leq n)$  は  $G$  の部分群と見做される. また、 $1 \leq j \leq n$  なる整数  $j$  について、次の写像  $\pi_j : G \rightarrow G_j$  を考えることができる.

$$\pi_j : G \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j \in G_j. \quad (1.70)$$

この写像  $\pi_j$  は準同型であり、全射である. この  $\pi_j$  を  $G$  から  $G_j$  への射影と呼ぶことがある.

逆に、与えられた群が幾つかの部分群の直積に表される状況を考える.

**定義 1.66**  $G$  を群、 $H_1, \dots, H_n \subset G$  ( $n$  は正整数) を  $G$  の部分群とし、次の写像が同型写像であるとする.

$$\Phi : H_1 \times \cdots \times H_n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n \in G. \quad (1.71)$$

このとき、 $H_1 \times \cdots \times H_n$  を  $G$  の直積分解と呼ぶ. また、各  $j (1 \leq j \leq n)$  を  $G$  の直積因子と呼ぶ.

群の部分群が直積因子となるための条件が次で与えられる.

命題 1.67  $G$  を群とし,  $H_1, \dots, H_n \subset G$  ( $n$  は正整数) を部分群とする. このとき,  $G$  が  $G = H_1 \times \dots \times H_n$  と直積分解されるには,  $H_1, \dots, H_n$  が以下の条件をみたすことが必要十分である.

- (i)  $1 \leq j \leq n$  なるすべての整数  $j$  について,  $H_j$  は  $G$  の正規部分群である.
- (ii) 集合として,  $G = H_1 \cdots H_n$  となる.
- (iii)  $1 \leq j \leq n-1$  なる任意の整数  $j$  について,  $(H_1 \cdots H_j) \cap H_{j+1} = \{1_G\}$  が成り立つ.

証明. (必要性)  $\Phi$  を (1.71) で与えられる同型写像とする. すると,  $\Phi$  は全射であるから, (ii) は明らかに成り立つ. また, 任意の  $G$  の元  $g \in G$  について,  $g_k \in H_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) が存在して,  $g = \varphi(g_1, \dots, g_n) = g_1 \cdots g_n \in G$  と表される. そして,  $1 \leq j \leq n$  なる任意の整数  $j$  について,  $x_j \in H_j$  とするとき,  $\Phi(1_G, \dots, x_j, \dots, 1_G) = x_j \in H_j \subset G$  である. よって,

$$\begin{aligned} gx_jg^{-1} &= \Phi(g_1, \dots, g_j, \dots, g_n)\Phi(1_G, \dots, x_j, \dots, 1_G)\Phi(g_1, \dots, g_j, \dots, g_n)^{-1} \\ &= \Phi(g_1, \dots, g_j, \dots, g_n)\Phi(1_G, \dots, x_j, \dots, 1_G)\Phi(g_1^{-1}, \dots, g_j^{-1}, \dots, g_n^{-1}) \\ &= \Phi(g_1g_1^{-1}, \dots, g_jx_jg_j^{-1}, \dots, g_n g_n^{-1}) \\ &= \Phi(1_G, \dots, g_jx_jg_j^{-1}, \dots, 1_G) = g_jx_jg_j^{-1} \in H_j \subset G. \end{aligned}$$

ゆえに,  $gH_jg^{-1} \subset H_j$  であり,  $H_j \subset G$  が  $G$  の正規部分群となり, (i) が成り立つ. さらに,  $1 \leq j \leq n-1$  なる整数  $j$  について,

$$\Phi(x_1, \dots, x_j, 1_G, \dots, 1_G) = x_1 \cdots x_j \in H_1 \cdots H_j \subset G, \quad x_l \in H_l, \quad 1 \leq l \leq j.$$

ゆえに,

$$H_1 \cdots H_j = \Phi(H_1 \times \dots \times H_j \times \{1_G\} \times \dots \times \{1_G\}).$$

また,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in (H_1 \times \dots \times H_j \times \{1_G\} \times \dots \times \{1_G\}) \cap (\{1_G\} \times \dots \times H_{j+1} \times \dots \times \{1_G\})$  とすると,  $x \in H_1 \times \dots \times H_j \times \{1_G\} \times \dots \times \{1_G\}$  より,  $x_l = 1_G$  ( $j+1 \leq l \leq n$ ). そして,  $x \in (\{1_G\} \times \dots \times H_{j+1} \times \dots \times \{1_G\})$  より  $x_l = 1_G$  ( $1 \leq l \leq j$ ). よって,

$$\begin{aligned} & (H_1 \times \dots \times H_j \times \{1_G\} \times \dots \times \{1_G\}) \cap (\{1_G\} \times \dots \times H_{j+1} \times \dots \times \{1_G\}) \\ &= \{1_G\} \times \dots \times \{1_G\}. \end{aligned}$$

$\Phi$  は同型であるから,

$$\begin{aligned} & (H_1 \cdots H_j) \cap H_{j+1} \\ &= \Phi((H_1 \times \dots \times H_j \times \{1_G\} \times \dots \times \{1_G\}) \cap (\{1_G\} \times \dots \times H_{j+1} \times \dots \times \{1_G\})) \\ &= \Phi(\{1_G\} \times \dots \times \{1_G\}) = \{1_G\}. \end{aligned}$$



以上により, (iii) が示された.

(十分性) (1.71) で与えられる写像  $\Phi$  が同型写像であることを示せばよい. まず,  $\Phi(H_1 \times \cdots \times H_n) = H_1 \cdots H_n$  であるから, (ii) より  $\Phi$  が全射である. 次に,  $k$  を  $2 \leq k \leq n$  なる整数とし,  $j$  を  $1 \leq j \leq k-1$  なる整数とすると,  $H_j \subset H_1 \cdots H_j \cdots H_{k-1}$  であるから, (iii) より  $H_j \cap H_k \subset (H_1 \cdots H_{k-1}) \cap H_k = \{1_G\}$  となる. ここで,  $x_j \in H_j$ ,  $x_k \in H_k$  とする. すると, (i) より  $H_j, H_k \triangleleft G$  であるから,  $x_j x_k x_j^{-1} \in H_k$ ,  $x_k x_j^{-1} x_k^{-1} \in H_j$  である. ゆえに,  $x_j x_k x_j^{-1} x_k^{-1} \in H_j \cap H_k = \{1_G\}$  となるから,  $x_j x_k x_j^{-1} x_k^{-1} = 1_G$  となり,  $x_j x_k = x_k x_j$  が成り立つ. これを用いると,  $x_j, y_j \in H_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) とするとき,

$$\begin{aligned} (x_1 \cdots x_n)(y_1 \cdots y_n) &= (x_1 \cdots x_{n-1})y_1 x_n (y_2 \cdots y_n) \\ &= (x_1 \cdots x_{n-2})y_1 (x_{n-1} x_n) (y_2 \cdots y_n) \\ &= \cdots \\ &= (x_1 y_1)(x_2 \cdots x_n)(y_2 \cdots y_n) \\ &= \cdots \\ &= (x_1 y_1) \cdots (x_n y_n). \end{aligned}$$

従って, 次が成り立つ.

$$\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(xy), \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n.$$

これは,  $\Phi$  が準同型写像であることを示している. 続いて,  $\Phi$  が単射であることを示すために,  $\text{Ker } \Phi = \{1_G\} \times \cdots \times \{1_G\}$  であることを示す.  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{Ker } \Phi \subset H_1 \times \cdots \times H_n$  とすると,  $1_G = x_1 \cdots x_n \in G$ . いま,  $x \neq (1_G, \dots, 1_G)$  とし,  $x_j \neq 1_G$  となる整数  $j$  のうち最大のものを  $j_0$  とする. すると,  $j_0 < k \leq n$  のとき  $x_k = 1_G$  である.  $j_0 > 1$  とすると,  $x_1 \cdots x_{j_0-1} = x_{j_0}^{-1} \in (H_1 \cdots H_{j_0-1}) \cap H_{j_0} = \{1_G\}$  となり,  $x_{j_0} = 1_G$  が成り立つが, これは  $j_0$  のとり方に反する. よって,  $j_0 = 1$  となるが, このとき  $1_G = \Phi(x) = \Phi(x_1, 1_G, \dots, 1_G) = x_1$  となり, これも  $j_0$  のとり方に反する. 従って,  $\text{Ker } \Phi = \{1_G\} \times \cdots \times \{1_G\}$  となる. これを用いて,  $\Phi$  が単射であることを示す.  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$  とし,  $\Phi(x) = \Phi(y)$  であるとする. すると,  $\Phi$  が準同型であるから,  $\Phi(y)^{-1} = \Phi(y^{-1})$  となる. よって,

$$1_G = \Phi(x)\Phi(y)^{-1} = \Phi(x)\Phi(y^{-1}) = \Phi(xy^{-1}).$$

$\text{Ker } \Phi = \{1_G\} \times \cdots \times \{1_G\}$  であるから,  $xy^{-1} = (1_G, \dots, 1_G) \in H_1 \times \cdots \times H_n$ . ゆえに,  $x_j = y_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) となり,  $x = y$  であることがわかる. 従って,  $\Phi$  が単射であることが示された. ■

問 1.68  $G = S_3$  を 3 次対称群とし,  $H_1 = \langle (1, 2) \rangle \subset G$ ,  $H_2 = \langle (1, 2, 3) \rangle \subset G$  とする. このとき,  $H_1 \cap H_2 = \{1_G = \iota\}$ ,  $G = H_1 H_2$  であるが,  $G$  は  $H_1$  と  $H_2$  の直積群ではないことを示せ. ここで,  $(1, 2)$  は互換,  $(1, 2, 3)$  は 3 次の巡回置換,  $\iota$  は恒等置換を表す.

ここからは, 群の集合への作用について述べる.

定義 1.69  $G$  を群とし,  $S$  を集合とする. このとき, 群  $G$  が集合  $S$  に (左から) 作用するとは, 写像  $\varphi : G \times S \rightarrow S$  が存在して, 任意の  $g, h \in G$  および  $x \in S$  について, 次が成り立つことである.

$$\varphi(gh, x) = \varphi(g, \varphi(h, x)), \quad (1.72)$$

$$\varphi(1_G, x) = x. \quad (1.73)$$

この写像  $\varphi$  を  $G$  の  $S$  への作用と呼ぶ.

群の作用を表す写像を, 混乱の恐れがなければ  $\varphi$  を用いずに単に  $g \cdot x$ , あるいは  $gx$  と表すことがある. この表し方によると, 上の (1.72) (1.73) はそれぞれ  $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ ,  $1_G \cdot x = x$  と表される.

任意の  $g \in G$  について,  $\Phi(g) : S \rightarrow S$  を次で与える.

$$\Phi(g)(x) = \varphi(g, x), \quad x \in S.$$

すると, 上の (1.72)(1.73) はそれぞれ次のように表される.

$$\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h), \quad (1.74)$$

$$\Phi(1_G) = \text{Id}_S. \quad (1.75)$$

ここで,  $\text{Id}_S$  は  $S$  上の恒等写像を表す. これは, 次のようにも考えることができる.  $S$  上の全単射全体のなす集合を  $\text{Aut}(S)$  と表すことにする. すると,  $\text{Aut}(S)$  は写像の合成を乗法として群になる. 単位元は  $S$  上の恒等写像  $\text{Id}_S$  であり,  $S$  上の全単射  $f \in \text{Aut}(S)$  の逆元は  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  である. ところで, 任意の  $g \in G$  および  $x \in S$  について,

$$x = 1_G \cdot x = gg^{-1} \cdot x = g \cdot (g^{-1} \cdot x),$$

$$x = 1_G \cdot x = g^{-1}g \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x).$$

よって,  $\Phi(g)\Phi(g^{-1}) = \Phi(g^{-1})\Phi(g) = \text{Id}_S$  となり,  $\Phi(g^{-1}) = \Phi(g)^{-1}$  であり,  $\Phi(g)$  は  $S$  上の全単射となるから,  $\varphi(g) \in \text{Aut}(S)$  であることがわかる. よって, 写像  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(S)$  が定

義できるが, (1.74) より, この写像は準同型写像である. 逆に, 準同型写像  $\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(S)$  が与えられたとする. このとき, 写像  $\varphi : G \times S \rightarrow S$  を次で与える.

$$\varphi(g, x) = \Phi(g)(x), \quad g \in G, x \in S. \quad (1.76)$$

すると,  $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$  ( $g, h \in G$ ),  $\Phi(1_G) = \text{Id}_S$  であることから, 任意の  $x \in S$  について,

$$\begin{aligned} \varphi(gh, x) &= \Phi(gh)(x) = \Phi(g)\Phi(h)(x) = \Phi(g)(\varphi(h, x)) = \varphi(g, \varphi(h, x)), \\ \varphi(1_G, x) &= \Phi(1_G)(x) = \text{Id}_S(x) = x. \end{aligned}$$

ゆえに,  $\varphi$  は  $G$  の  $S$  への作用を与える. 即ち, 群  $G$  の  $S$  への作用を与えることと,  $G$  から  $\text{Aut}(S)$  への準同型写像を与えることは, 本質的に同じことである.

次に, 群の集合への作用に関する軌道を定義する.

**定義 1.70**  $G$  を群,  $S$  を集合で,  $G$  が  $S$  に作用しているとし, その作用を  $\varphi : G \times S \rightarrow S$  とする. このとき, 任意の  $x \in S$  に対して,  $S$  の部分集合  $\{\varphi(g, x) = g \cdot x \in S; g \in G\} \subset S$  を  $x$  を通る  $G$  の軌道, あるいは  $x$  の  $G$  軌道と呼び,  $G \cdot x$  あるいは単に  $Gx$  と表す.

群の集合への作用は, 集合上のある同値関係を与える.

**補題 1.71**  $G$  を群,  $S$  を集合で,  $G$  が  $S$  に作用しているとし, その作用を  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  ( $g \in G, x \in S$ ) とする. このとき,  $x, y \in S$  について,  $y$  が  $x$  の  $G$  軌道上の元, 即ち,  $y \in G \cdot x$  であるとき  $x \sim y$  とする. すると, この関係は同値関係である.

**証明.** まず,  $x \in S$  について,  $x = 1_G \cdot x \in G \cdot x$  であるから,  $x \sim x$  である. 次に,  $x, y, z \in S$  について,  $x \sim y$  かつ  $y \sim z$  であるとき,  $g, h \in G$  が存在して,  $y = g \cdot x \in G \cdot x$ ,  $z = h \cdot y \in G \cdot y$  と表される. このとき,

$$z = h \cdot y = h \cdot (g \cdot x) = hg \cdot x \in G \cdot x.$$

ゆえに,  $x \sim z$  が成り立つ. 最後に,  $x, y \in S$  について,  $x \sim y$  であるときに,  $y \sim x$  であることを示す.  $y \in G \cdot x$  であるから,  $g \in G$  が存在して  $y = g \cdot x$  と表される. このとき,

$$x = 1_G \cdot x = g^{-1}g \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot y \in G \cdot y.$$

よって,  $y \sim x$  となる. 以上により, この関係  $\sim$  は  $S$  上の同値関係である. ■

群が集合に作用するとき, 軌道には群のある剰余類が対応する.

補題 1.72  $G$  を群,  $S$  を集合で,  $G$  が  $S$  に作用しているとし, その作用を  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  ( $g \in G, x \in S$ ) とする. このとき, 任意の  $x \in S$  に対して,  $G$  の部分集合  $G_x = \{g \in G; g \cdot x = x\} \subset G$  は  $G$  の部分群である.

証明.  $g, h \in G_x$  とする. すると,  $g \cdot x = x, h \cdot x = x$  であるから,

$$gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x.$$

ゆえに,  $gh \in G_x$  となる. また,

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1}g \cdot x = 1_G \cdot x = x.$$

よって,  $g^{-1} \in G_x$  である. 従って,  $G_x \subset G$  は  $G$  の部分群である. ■

定義 1.73 上の補題における  $G_x \subset G$  を  $G$  の  $x$  に関する固定部分群, あるいは等方部分群と呼ぶ.

定理 1.74  $G$  を群,  $S$  を集合で,  $G$  が  $S$  に作用しているとし, その作用を  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  ( $g \in G, x \in S$ ) とする. いま,  $x \in S$  とする. このとき, 次の写像  $\varphi_x : G/G_x \rightarrow G \cdot x$  が定義され, 全単射となる.

$$\varphi_x : G/G_x \ni gG_x \mapsto g \cdot x \in G \cdot x. \quad (1.77)$$

証明. まず,  $\varphi_x$  が well-defined であることを示す.  $gG_x = hG_x$  ( $g, h \in G$ ) とすると,  $k \in G_x$  が存在して  $h = gk$  と表される. このとき,

$$h \cdot x = gk \cdot x = g \cdot (k \cdot x) = g \cdot x.$$

ゆえに,  $\varphi_x$  は well-defined である. また,  $\varphi_x(gG_x) = \varphi_x(hG_x)$  ( $g, h \in G$ ) ならば,  $h \cdot x = \varphi_x(hG_x) = \varphi_x(gG_x) = g \cdot x$  となり,

$$g^{-1}h \cdot x = g^{-1} \cdot (h \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1}g \cdot x = 1_G \cdot x = x.$$

よって,  $g^{-1}h \in G_x$  となる. ゆえに,  $k \in G_x$  が存在して,  $g^{-1}h = k$  となるから,  $h = gk \in gG_x$ . 従って,  $hG_x = gG_x$  となり,  $\varphi_x$  は単射となる. さらに, 任意の  $y \in G \cdot x$  について,  $y = g \cdot x$  となる  $g \in G$  が存在するから,  $\varphi_x(gG_x) = g \cdot x = y$  となる. よって,  $\varphi_x$  は全射となる. ■

群の作用の中で重要なものとして, 軌道が 1 個のみのものがある.

定義 1.75  $G$  を群,  $S$  を集合で  $G$  が  $S$  に作用しているとし, その作用を  $(g, x) \mapsto g \cdot x$  ( $g \in G, x \in S$ ) とする.  $S$  に含まれる  $G$  軌道がただ 1 個であるとき, この作用は推移的であるという.

群  $G$  の集合  $S$  への作用が推移的であるとき,  $x \in S$  を 1 つとると,  $G/G_x$  と  $G \cdot x = S$  は自然に同一視される. 逆に,  $H \subset G$  を  $G$  の部分群とすると,  $G$  は剰余空間  $\overline{G} = G/H$  に次のように作用する.

$$g \cdot \overline{x} = \overline{gx}, \quad g \in G, \overline{x} = xH \in \overline{G} = G/H. \quad (1.78)$$

この作用が well-defined であることを示す必要がある.  $\overline{x} = \overline{y}$  とすると,  $xH = yH$  であるから,  $h \in H$  が存在して,  $y = xh$  と表される. よって,

$$\overline{gy} = gyH = gxhH = gxH = \overline{gx}.$$

ゆえに,  $G$  の  $G/H$  への作用は well-defined である. さらに,  $\overline{1_G} = 1_G H = H \in G/H$  を考えると, 任意の  $\overline{x} = xH \in G/H$  ( $x \in G$ ) について,

$$\overline{x} = \overline{x1_G} = x \cdot \overline{1_G}.$$

よって,  $G/H = G \cdot \overline{1_G}$  となり,  $G$  の  $G/H$  への作用は推移的になる. 以上により, 群  $G$  の推移的な作用を考えることと,  $G$  の部分群  $H$  による右剰余空間  $G/H$  への作用を考えることは, 本質的に同じことである.

$G$  が推移的に作用する集合  $S$ , あるいは,  $G$  の部分群  $H$  による右剰余空間  $G/H$  はしばしば等質空間と呼ばれる.

( 余 白 )

### 1.3 線形代数学の復習.

ここでは、線形代数学の事項のうち、後に(有限)群の表現論で必要になるものについてまとめる.

まず、行列の trace について述べる.

定義 1.76  $n$  を正整数とし、 $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$  を複素  $n$  次正方行列とする. このとき、 $A$  の trace  $\operatorname{tr} A \in \mathbb{C}$  を次で与える.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^n a_{j,j}. \quad (1.79)$$

ここで、正整数  $m, n$  に対して、複素  $(m, n)$  行列全体のなす集合を  $\operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{C})$  と表すことにする.

$$\operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}; a_{j,k} \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n \right\}. \quad (1.80)$$

特に、 $m = n$  のとき、単に  $\operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})$  と表すことにする.  $\operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{C})$  は通常の加法, scalar 倍により  $\mathbb{C}$  上の vector 空間になり、 $\dim \operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{C}) = mn$  である.

次のことは、容易に分かる.

命題 1.77 写像  $\operatorname{tr} : \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C}) \ni A \mapsto \operatorname{tr} A \in \mathbb{C}$  は線形写像である.

証明.  $A = (a_{j,k})_{j,k=1}^n, B = (b_{j,k})_{j,k=1}^n \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C}), c \in \mathbb{C}$  とするとき、以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A+B) &= \sum_{j=1}^n (a_{j,j} + b_{j,j}) = \sum_{j=1}^n a_{j,j} + \sum_{j=1}^n b_{j,j} = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B, \\ \operatorname{tr}(cA) &= \sum_{j=1}^n (ca_{j,j}) = c \sum_{j=1}^n a_{j,j} = c(\operatorname{tr} A). \end{aligned}$$

ゆえに、写像  $\operatorname{tr}$  は線形である. ■

一般に、正方行列でない行列には trace は定義できないが、積が正方行列になる 2 つの行列には興味深い性質がある.

命題 1.78  $m, n$  を正整数とし、 $A \in \operatorname{Mat}(m, n, \mathbb{C}), B \in \operatorname{Mat}(n, m, \mathbb{C})$  とする. このとき、 $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$  が成り立つ.

証明.  $C = (c_{j,k})_{j,k=1}^m = AB$ ,  $D = (d_{j,k})_{j,k=1}^n = BA$  とする. すると, 次が分かる.

$$c_{j,j} = \sum_{k=1}^n a_{j,k} b_{k,j}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad d_{k,k} = \sum_{j=1}^m b_{k,j} a_{j,k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

ゆえに, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} AB &= \operatorname{tr} C = \sum_{j=1}^m c_{j,j} = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^n a_{j,k} b_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^m b_{k,j} a_{j,k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} BA. \end{aligned}$$

■

このことから, 複素正方行列の trace に関して, 重要な次のことが得られる.

系 1.79  $n$  を正整数,  $A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{C})$  で,  $P$  を  $\mathbb{C}$  上の  $n$  次正則行列とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\operatorname{tr} PAP^{-1} = \operatorname{tr} A. \quad (1.81)$$

証明.  $C = PA$  とおくと, 定理 1.78 より, 次が得られる.

$$\operatorname{tr} PAP^{-1} = \operatorname{tr} CP^{-1} = \operatorname{tr} P^{-1}C = \operatorname{tr} P^{-1}PA = \operatorname{tr} A.$$

■

これを用いると,  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間  $V$  から  $V$  自身への線形写像  $f : V \rightarrow V$  に対して, その trace を考えることができる.

命題 1.80  $V$  を  $\{0\}$  でない  $\mathbb{C}$  上の vector 空間,  $f : V \rightarrow V$  を線形写像とする. いま,  $\dim V = n$ ,  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とし, この基底に関する  $f$  の表現行列を  $A$  とする. このとき,  $\operatorname{tr} A$  は基底のとり方に依らない. この  $\operatorname{tr} A$  を  $\operatorname{tr} f$  と表し,  $f$  の trace と呼ぶ.

証明.  $\{y_1, \dots, y_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とする. すると, 正則行列  $P$  が存在して, 次のように表される.

$$(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)P. \quad (1.82)$$

このとき,  $P$  は正則行列であり, 次も成り立つ.

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)P^{-1}.$$



ここで,  $f$  の  $\{x_1, \dots, x_n\}, \{y_1, \dots, y_n\}$  に関する表現行列をそれぞれ  $A, B$  とする. 即ち, 次のようになる.

$$(f(x_1), \dots, f(x_n)) = (x_1, \dots, x_n)A, \quad (f(y_1), \dots, f(y_n)) = (y_1, \dots, y_n)B. \quad (1.83)$$

ところで,  $f$  が線形であることと (1.82) より次のことが分かる.

$$(f(y_1), \dots, f(y_n)) = (f(x_1), \dots, f(x_n))P.$$

従って, 次のことが得られる.

$$\begin{aligned} (f(y_1), \dots, f(y_n)) &= (f(x_1), \dots, f(x_n))P = (x_1, \dots, x_n)AP \\ &= (y_1, \dots, y_n)P^{-1}AP. \end{aligned}$$

ゆえに,  $B = P^{-1}AP$  であり, 系 1.79 より  $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$  が成り立つ. ■

これから, 次のことが得られる.

系 1.81  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間,  $f : V \rightarrow V$  を線形写像,  $g : V \rightarrow V$  を線形同型, 即ち, 全単射線形写像とする. このとき,  $\operatorname{tr} gfg^{-1} = \operatorname{tr} f$  が成り立つ.

証明.  $\dim V = n$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とし, この基底に関する  $f, g$  の表現行列をそれぞれ  $A, B$  とする.  $g$  は線形同型であるから,  $B$  は正則行列であり,  $g^{-1}$  の表現行列は  $B^{-1}$  になる. よって,  $gfg^{-1}$  の表現行列は  $BAB^{-1}$  となり, 次のことが得られる.

$$\operatorname{tr} gfg^{-1} = \operatorname{tr} BAB^{-1} = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} f.$$

■

次に, 複素 vector 空間の直和について述べる.

定義 1.82  $m$  を正整数とし,  $V_1, \dots, V_m$  を  $\mathbb{C}$  上の vector 空間とする. このとき,  $V_1, \dots, V_m$  の (集合としての) 直積集合  $V = V_1 \times \dots \times V_m$  に次のように加法と scalar 倍を定義する.

$$(v_1, \dots, v_m) + (v'_1, \dots, v'_m) = (v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m), \quad v_j, v'_j \in V_j, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1.84)$$

$$c(v_1, \dots, v_m) = (cv_1, \dots, cv_m), \quad c \in \mathbb{C}, \quad v_j \in V_j, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (1.85)$$

すると,  $V$  はこの加法, scalar 倍に関して vector 空間になる. この  $V$  を  $V_1, \dots, V_m$  の直和と呼び,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  と表す.

$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$  における零 vector  $0_V \in V$  は次のものである.

$$0_V = (0_{V_1}, \dots, 0_{V_m}), \quad 0_{V_j} (1 \leq j \leq m) \text{ は } V_j \text{ における零 vector.} \quad (1.86)$$

また,  $x = (x_1, \dots, x_m) \in V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$  の逆 vector は次のものである.

$$-x = (-x_1, \dots, -x_m), \quad -x_j (1 \leq j \leq m) \text{ は } V_j \text{ における } x_j \text{ の逆 vector.} \quad (1.87)$$

群の直積と同様に,  $1 \leq j \leq m$  なる整数  $j$  について, 次の写像  $\iota_j : V_j \rightarrow V$  を考えることができる.

$$\iota_j : V_j \ni x_j \mapsto (0_{V_1}, \dots, x_j, \dots, 0_{V_m}) \in V. \quad (1.88)$$

すると,  $\iota_j$  は線形写像であり, 単射である. この  $\iota_j$  を  $V_j$  の  $V$  への埋め込みと呼ぶことがある. この  $\iota_j$  により,  $V_j$  は  $V$  の部分 vector 空間と見做される. また, これも群の直積と同様に,  $1 \leq j \leq m$  なる整数  $j$  について, 次の写像  $\pi_j : V \rightarrow V_j$  を考えることができる.

$$\pi_j : V \ni x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto x_j \in V_j. \quad (1.89)$$

この  $\pi_j$  は線形写像であり, 全射である. この  $\pi_j$  を  $V$  から  $V_j$  への射影と呼ぶことがある.

逆に, 与えられた vector 空間が幾つかの部分 vector 空間の直和として表される状況を考える.

**定義 1.83**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の vector 空間,  $W_1, \dots, W_m \subset V$  を  $V$  の部分 vector 空間とし, 次の写像  $\Phi$  が線形同型写像であるとする.

$$\Phi : W_1 \oplus \cdots \oplus W_m \ni (v_1, \dots, v_m) \mapsto v_1 + \cdots + v_m \in V. \quad (1.90)$$

このとき,  $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$  を  $V$  の直和分解と呼ぶ. また,  $1 \leq j \leq m$  なる整数  $j$  について,  $W_j$  を  $V$  の直和因子と呼ぶ.

vector 空間の部分 vector 空間たちが, ある直和分解の直和因子たちになるための条件は, 以下で与えられる.

**命題 1.84**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の vector 空間とし,  $W_1, \dots, W_m \subset V$  ( $m$  は正整数) を部分 vector 空間とする. このとき,  $V$  が  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$  と直和分解されるには,  $W_1, \dots, W_m$  が以下の条件をみたすことが必要十分である.

- (i) 集合として,  $V = W_1 + \cdots + W_m$  となる.
- (ii)  $1 \leq j \leq m-1$  なる任意の整数  $j$  について,  $(W_1 + \cdots + W_j) \cap W_{j+1} = \{0_V\}$  が成り立つ. ただし,  $0_V$  は  $V$  における零 vector である.

証明. (必要性).  $\Phi$  を (1.90) で与えられる線形同型写像とする. すると,  $\Phi$  は全射であるから, (i) が成り立つ. また,  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について,  $v_j \in W_j$  とするとき,  $\Phi(0_V, \dots, v_j, \dots, 0_V) = v_j \in W_j \subset V$  であるから,  $\Phi(\{0_V\} \oplus \dots \oplus W_j \oplus \dots \oplus \{0_V\}) = W_j$  である. ところで,  $1 \leq j \leq m-1$  なる整数  $j$  について, 次が成り立つ.

$$\Phi(v_1, \dots, v_j, 0_V, \dots, 0_V) = v_1 + \dots + v_j \in V_1 + \dots + V_j, \quad v_l \in W_l, 1 \leq l \leq j.$$

ゆえに,

$$W_1 + \dots + W_j = \Phi(W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \{0_V\} \oplus \dots \oplus \{0_V\}).$$

また,  $v = (v_1, \dots, v_m) \in (W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \{0_V\} \oplus \dots \oplus \{0_V\}) \cap (\{0_V\} \oplus \dots \oplus W_{j+1} \oplus \dots \oplus \{0_V\})$  とすると,  $v \in W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \{0_V\} \oplus \dots \oplus \{0_V\}$  より,  $v_l = 0_V$  ( $j+1 \leq l \leq m$ ) となる. そして,  $v \in \{0_V\} \oplus \dots \oplus W_{j+1} \oplus \dots \oplus \{0_V\}$  より,  $v_l = 0_V$  ( $1 \leq l \leq j$ ). 従って, 次が得られる.

$$\begin{aligned} & (W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \{0_V\} \oplus \dots \oplus \{0_V\}) \cap (\{0_V\} \oplus \dots \oplus W_{j+1} \oplus \dots \oplus \{0_V\}) \\ &= \{0_V\} \oplus \dots \oplus \{0_V\}. \end{aligned}$$

$\Phi$  は線形同型であるから, 次が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} & (W_1 + \dots + W_j) \cap W_{j+1} \\ &= \Phi((W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \{0_V\} \oplus \dots \oplus \{0_V\}) \cap (\{0_V\} \oplus \dots \oplus W_{j+1} \oplus \dots \oplus \{0_V\})) \\ &= \Phi(\{0_V\} \oplus \dots \oplus \{0_V\}) = \{0_V\}. \end{aligned}$$

以上により, (ii) が示された.

(十分性). (1.90) で与えられる写像  $\Phi$  が線形同型写像であることを示せばよい. まず, 線形写像であることを確認する.  $v = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $v' = (v'_1, \dots, v'_m) \in V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Phi(v + v') &= \Phi(v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m) = (v_1 + v'_1) + \dots + (v_m + v'_m) \\ &= (v_1 + \dots + v_m) + (v'_1 + \dots + v'_m) = \Phi(v) + \Phi(v'). \end{aligned}$$

また,  $c \in \mathbb{C}$  とするとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Phi(cv) &= \Phi(cv_1, \dots, cv_m) = cv_1 + \dots + cv_m \\ &= c(v_1 + \dots + v_m) = c\Phi(v). \end{aligned}$$

従って、 $\Phi$  は線形写像である。また、 $\Phi(W_1 \oplus \cdots \oplus W_m) = W_1 + \cdots + W_m \subset V$  であるから、(i) より  $\Phi$  は全射である。

ここで、 $\Phi$  が単射であることを示す。そのために、 $\text{Ker } \Phi = \{0_V\} \oplus \cdots \oplus \{0_V\}$  であることを示す。 $v = (v_1, \dots, v_m) \in \text{Ker } \Phi \subset W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$  とする。すると、 $0_V = v_1 + \cdots + v_m \in V$ 。いま、 $v \neq (0_V, \dots, 0_V)$  とし、 $v_j \neq 0_V$  となる整数  $j$  のうち最大のものを  $j_0$  とする。すると、 $j_0 < k \leq m$  のとき  $v_j = 0_V$  である。 $j_0 \geq 2$  のとき、 $v_1 + \cdots + v_{j_0-1} = -v_{j_0} \in (W_1 + \cdots + W_{j_0-1}) \cap W_{j_0} = \{0_V\}$  となり、 $v_{j_0} = 0_V$  が成り立つが、これは  $j_0$  のとり方に反する。よって、 $j_0 = 1$  となるが、このとき、 $0_V = \Phi(v) = v_1$  となり、これも  $j_0$  のとり方に反する。従って、 $\text{Ker } \Phi = \{0_V\} \oplus \cdots \oplus \{0_V\}$  である。このことを用いて、 $\Phi$  が単射であることを示す。 $v = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $v' = (v'_1, \dots, v'_m) \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$  とし、 $\Phi(v) = \Phi(v')$  であるとすると、 $\Phi$  が線形写像であるから、 $-\Phi(v') = \Phi(-v')$  である。よって、

$$0_V = \Phi(v) - \Phi(v') = \Phi(v - v').$$

$\text{Ker } \Phi = \{0_V\} \oplus \cdots \oplus \{0_V\}$  であるから、 $v - v' = (0_V, \dots, 0_V) \in W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$  となる。ゆえに、 $v_j = v'_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) であり、 $v = v'$  であることが分かる。従って、 $\Phi$  は単射である。■

問 1.85  $V = \mathbb{C}^2$  とし、 $W_1, W_2, W_3$  を以下で与えられる  $V$  の部分 vector 空間とする。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C} \right\}, W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

- (1)  $W_1 + W_2 + W_3 = V$  かつ  $W_j \cap W_k = \{0_V\}$  ( $1 \leq j, k \leq 3, j \neq k$ ) となることを示せ。
- (2) 線形写像  $\Psi : W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \ni (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 + v_2 + v_3 \in V$  は線形同型写像でないことを示せ。

続いて、複素 vector 空間上の内積について述べる。

定義 1.86  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の vector 空間とする。このとき、 $V$  上の (複素) 内積とは、次の性質をみたす写像  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  のことである。

- (i) 任意の  $v \in V$  について  $\langle v, v \rangle \geq 0$  であり、 $\langle v, v \rangle = 0$  であることと、 $v = 0$  であることは同値である。
- (ii)  $v, v', w \in V$  および  $c \in \mathbb{C}$  について、次のことが成り立つ。

$$\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle \tag{1.91}$$

$$\langle cv, w \rangle = c \langle v, w \rangle. \tag{1.92}$$

- (iii)  $v, w \in V$  について、 $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$  が成り立つ。

(複素) 内積が与えられている  $\mathbb{C}$  上の vector 空間を (複素) 内積空間、あるいは、(複素) 計量 vector 空間と呼ぶ。

(ii), (iii) より,  $v, w, w' \in V, c \in \mathbb{C}$  について, 次のことが成り立つ.

$$\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle, \quad (1.93)$$

$$\langle v, cw \rangle = \bar{c} \langle v, w \rangle. \quad (1.94)$$

(1.91)~(1.94) の性質を半双線形性, (iii) の性質を Hermite 性という.

$V$  上の (複素) 内積を用いて,  $V$  上の norm を次のように定義することができる.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V. \quad (1.95)$$

任意の  $v \in V$  について,  $\|v\| \geq 0$  であり, (i) より  $\|v\| = 0$  であることと,  $v = 0$  であることは同値である.

例 1.87  $n$  を正整数とし,  $V = \mathbb{C}^n$  とする. このとき,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  に対し

て,  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathbb{C}$  を次で与える.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n. \quad (1.96)$$

すると,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbb{C}^n$  上の複素内積になる. この内積を  $\mathbb{C}^n$  上の標準内積と呼ぶ. この内積から得られる  $\mathbb{C}$  上の norm は, 次のものである.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n. \quad (1.97)$$

次の補題は, 内積空間を扱う上で, 大変重要なものである.

補題 1.88  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積とし,  $\|\cdot\|$  を内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から得られる norm とする. このとき, 任意の  $v, v' \in V$  について, 次の不等式が成り立つ (Schwarz の不等式).

$$|\langle v, v' \rangle| \leq \|v\| \|v'\|. \quad (1.98)$$

証明.  $v = 0$  のときは,  $\|v\| = 0$  であり,  $v = 0 = 0 \cdot v$  であることより, 次が得られる.

$$\langle v, v' \rangle = \langle 0 \cdot v, v' \rangle = 0 \cdot \langle v, v' \rangle = 0.$$

ゆえに, この不等式は成り立つ. いま,  $v \neq 0$  とする. すると,  $\|v\| \neq 0$  である. ところで, 任意の複素数  $\lambda \in \mathbb{C}$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda v + v'\|^2 &= \langle \lambda v + v', \lambda v + v' \rangle = |\lambda|^2 \langle v, v \rangle + \lambda \langle v, v' \rangle + \bar{\lambda} \langle v', v \rangle + \langle v', v' \rangle \\ &= |\lambda|^2 \|v\|^2 + \lambda \langle v, v' \rangle + \bar{\lambda} \langle v', v \rangle + \|v'\|^2. \end{aligned}$$

そこで,  $\lambda = -\frac{\langle v', v \rangle}{\|v\|^2}$  とする. すると,  $\overline{\langle v', v \rangle} = \langle v, v' \rangle$  より, 次が得られる.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{|\langle v', v \rangle|^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 - \frac{\langle v', v \rangle}{\|v\|^2} \langle v, v' \rangle - \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\|^2} \langle v', v \rangle + \|v'\|^2 \\ &= -\frac{|\langle v, v' \rangle|^2}{\|v\|^2} + \|v'\|^2. \end{aligned}$$

従って,  $|\langle v, v' \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|v'\|^2$  が得られる. ■

この補題により, 次の命題が得られる.

**命題 1.89**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積,  $\|\cdot\|$  を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から得られる norm とする. このとき, 次のことが成り立つ.

- (i) 任意の  $v \in V$  について,  $\|v\| \geq 0$  であり,  $\|v\| = 0$  であることと,  $v = 0$  であることは同値である.
- (ii) 任意の  $v \in V$  および  $c \in \mathbb{C}$  について,  $\|cv\| = |c| \|v\|$  が成り立つ.
- (iii) 任意の  $v, v' \in V$  について,  $\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$  が成り立つ (三角不等式).

証明. (i) は既に確認している. いま,  $v \in V, c \in \mathbb{C}$  とする. すると, 次が得られる.

$$\|cv\|^2 = \langle cv, cv \rangle = c\bar{c} \langle v, v \rangle = |c|^2 \|v\|^2.$$

ゆえに, (ii) が得られる. 次に,  $v, v' \in V$  とする. すると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|v + v'\|^2 &= \langle v + v', v + v' \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, v' \rangle + \langle v', v \rangle + \langle v', v' \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v, v' \rangle + \|v'\|^2. \end{aligned}$$

一般に, 複素数  $\lambda \in \mathbb{C}$  について,  $\operatorname{Re}\lambda \leq |\operatorname{Re}\lambda| \leq |\lambda|$  が成り立つ. このことと, Schwarz の不等式を用いると, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \|v + v'\|^2 &= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v, v' \rangle + \|v'\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, v' \rangle| + \|v'\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|v'\| + \|v'\|^2 = (\|v\| + \|v'\|)^2. \end{aligned}$$

従って, (iii) が成り立つことが分かる. ■

続いて, 内積空間の元を扱いやすくするための重要な概念の一つである, 正規直交基底について述べる.

**定義 1.90**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積とし,  $\|\cdot\|$  を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から得られる norm とする. このとき,  $V$  の vector  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  ( $m$  は正整数) が  $V$  の直交系

であるとは,  $v_j \neq 0 (1 \leq j \leq m)$  であり,  $1 \leq j, k \leq m$  かつ  $j \neq k$  なる整数  $j, k$  について,  $\langle v_j, v_k \rangle = 0$  が成り立つことである. そして,  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  が  $V$  の正規直交系であるとは, 直交系であり, かつ  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について,  $\|v_j\| = 1$  が成り立つことである. さらに,  $V$  が有限次元であり,  $\dim V = n$  ( $n$  は正整数) であるとき,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  が  $V$  の正規直交基底であるとは, 正規直交系であり, かつ  $V$  の基底であることである.

$\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  が  $V$  の正規直交系であることは, Kronecker の delta を用いると, 次のように表される.

$$\langle v_j, v_k \rangle = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (1.99)$$

このことより, 複素内積空間の有限個の vector からなる正規直交系は, 線形独立であることが分かる. 実際,  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  を  $V$  の正規直交系,  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$  とし, 次が成り立っているとする.

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0.$$

このとき,  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について, 次が得られる.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle a_1 v_1 + \dots + a_m v_m, v_j \rangle = a_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + a_m \langle v_m, v_j \rangle \\ &= a_1 \delta_{1,j} + \dots + a_m \delta_{m,j} = a_j. \end{aligned}$$

これは,  $\{v_1, \dots, v_m\}$  が線形独立であることを意味している.

ここで, 複素 vector 空間  $V$  の有限個の vector  $v_1, \dots, v_m \in V$  に対して,  $V$  の次の部分 vector 空間を考える.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m) = \{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in V; a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}\}. \quad (1.100)$$

この部分 vector 空間を  $v_1, \dots, v_m$  が生成する部分 vector 空間と呼ぶ.

有限次元複素内積空間には, 正規直交基底が存在することが, 次の定理より分かる.

**定理 1.91**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\dim V = n > 0$  とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の内積,  $\|\cdot\|$  を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から得られる norm とする. いま,  $\{w_1, \dots, w_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とする. このとき,  $V$  の正規直交基底  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  で,  $1 \leq j \leq n$  なる任意の整数  $j$  について, 次が成り立つものが存在する (Gram-Schmidt の直交化法).

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_j) = \text{Span}(w_1, \dots, w_j). \quad (1.101)$$

証明. まず,  $w_1 \neq 0$  であるから,  $\|w_1\| \neq 0$ . そこで,  $v_1 \in V$  を  $v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$  とする. すると, 次が得られる.

$$\|v_1\| = \left\| \frac{w_1}{\|w_1\|} \right\| = \frac{1}{\|w_1\|} \|w_1\| = 1.$$

次に,  $\{w_1, w_2\} \subset V$  は線形独立であるから,  $\{v_1, w_2\}$  も線形独立である. いま,  $v'_2 \in V$  を次で与える.

$$v'_2 = w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1.$$

$\{v_1, w_2\}$  は線形独立であるから,  $v'_2 \neq 0$ . ゆえに,  $\|v'_2\| \neq 0$  である. さらに, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \langle v_1, v'_2 \rangle &= \langle v_1, w_2 - \langle w_2, v_1 \rangle v_1 \rangle = \langle v_1, w_2 \rangle - \overline{\langle w_2, v_1 \rangle} \langle v_1, v_1 \rangle \\ &= \langle v_1, w_2 \rangle - \langle v_1, w_2 \rangle \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

そこで,  $v_2 \in V$  を  $v_2 = \frac{v'_2}{\|v'_2\|}$  とする. すると,  $v_1$  と同様にして,  $\|v_2\| = 1$  が得られる. ゆえに,  $\{v_1, v_2\} \subset V$  は  $V$  の正規直交系である.

このような操作を繰り返して,  $1 \leq m \leq n$  なる整数  $m$  に対して,  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について (1.101) が成り立つ  $V$  の正規直交系  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  が得られることを,  $m$  に関する帰納法により示す.  $m = 1$  のときは,  $v_1$  は  $w_1$  の 0 でない scalar 倍であるから,  $\text{Span}(v_1) = \text{Span}(w_1)$  となり, 主張が成り立つ. そこで,  $1 < m \leq n$  とし,  $m - 1$  まで主張が成り立つと仮定する. ここで,  $\{v_1, \dots, v_{m-1}, w_m\} \subset V$  が線形独立であることを示す. いま,  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$  とし, 次が成り立つとする.

$$a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1} + a_m w_m = 0.$$

もし,  $a_m \neq 0$  であれば, 次が成り立つ.

$$w_m = -\frac{a_1}{a_m} v_1 - \dots - \frac{a_{m-1}}{a_m} v_{m-1} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}) = \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}).$$

これは,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  が線形独立であることに反する. ゆえに,  $a_m = 0$  となる. すると, 次が成り立つ.

$$a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1} = 0.$$

帰納法の仮定により,  $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$  は線形独立である. よって,  $a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$  が得られる. 従って,  $\{v_1, \dots, v_{m-1}, w_m\} \subset V$  は線形独立である. そこで,  $v'_m \in V$  を次で与える.

$$v'_m = w_m - \sum_{j=1}^{m-1} \langle w_m, v_j \rangle v_j.$$



$\{v_1, \dots, v_{m-1}, w_m\} \subset V$  は線形独立であるから,  $v'_m \neq 0$ . ゆえに,  $\|v'_m\| \neq 0$  である. さらに,  $1 \leq k \leq m-1$  なる任意の整数  $k$  に対して, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \langle v_k, v'_m \rangle &= \left\langle v_k, w_m - \sum_{j=1}^{m-1} \langle w_m, v_j \rangle v_j \right\rangle = \langle v_k, w_m \rangle - \sum_{j=1}^{m-1} \overline{\langle w_m, v_j \rangle} \langle v_j, v_k \rangle \\ &= \langle v_k, w_m \rangle - \sum_{j=1}^{m-1} \langle v_j, w_m \rangle \delta_{j,k} = \langle v_k, w_m \rangle - \langle v_k, w_m \rangle = 0. \end{aligned}$$

そこで,  $v_m \in V$  を  $v_m = \frac{v'_m}{\|v'_m\|}$  とする. すると, 今までと同様にして,  $\|v_m\| = 1$  となり,  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset V$  は正規直交系である. あとは,  $j = m$  のとき (1.101) が成り立つことを示せばよい.  $v'_m$  の定義から,  $v'_m \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, w_m)$  である. また, 帰納法の仮定より,  $\text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}) = \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1})$  であるから, 次が成り立つ.

$$v_1, \dots, v_{m-1} \in \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}) \subset \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m).$$

明らかに,  $w_m \in \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m)$  であるから, 次が得られる.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, w_m) \subset \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m).$$

これより,  $v'_m \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, w_m) \subset \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m)$  となるから, 次が成り立つことが分かる.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v'_m) \subset \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m).$$

逆に,  $w_m = v'_m + \sum_{j=1}^{m-1} \langle w_m, v_j \rangle v_j$  であるから,  $w_m \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v'_m)$  である. さらに, 帰納法の仮定より, 次が得られる.

$$w_1, \dots, w_{m-1} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}) \subset \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v'_m).$$

従って, 次が成り立つことが分かる.

$$\text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m) \subset \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v'_m).$$

ゆえに, 次が得られる.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v'_m) = \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m).$$

ところで,  $v_m$  は  $v'_m$  の 0 でない scalar 倍である. このことから,  $\text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v_m) = \text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v'_m)$  が成り立つ. よって, 次が成り立つことが分かる.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_{m-1}, v_m) = \text{Span}(w_1, \dots, w_{m-1}, w_m).$$

以上により,  $m$  でも主張が成り立つことが分かる. 特に,  $m = n$  のときも成り立つ.

ところで,  $\dim V = n$  であり,  $V$  の正規直交系  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  は線形独立であるから,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  も  $V$  の基底である. 従って,  $1 \leq j \leq n$  なる任意の整数  $j$  について, (1.101) が成り立つ正規直交基底  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  が存在することが示された. ■

問 1.92  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\dim V = n > 0$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積とし,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  を  $V$  の正規直交基底とする.

(1)  $\{w_1, \dots, w_n\}$  を, 定理 1.91 の証明で与えられている方法で  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  から得られる  $V$  の正規直交基底とすると,  $v_j = w_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が成り立つことを示せ.

(2) より一般に, (1.101) をみたま  $V$  の任意の正規直交基底  $\{w_1, \dots, w_n\}$  に対して,  $|\lambda_j| = 1$  ( $1 \leq j \leq n$ ) なる複素数  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  が存在して,  $w_j = \lambda_j v_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) が成り立つことを示せ.

ここで, 内積に整合する直和空間の概念を導入する.

命題 1.93  $m$  を正整数,  $V_1, \dots, V_m$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) を  $V_j$  の (複素) 内積とする.

(1)  $V_1, \dots, V_m$  の直和  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  の元  $v = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $v' = (v'_1, \dots, v'_m) \in V$  について,  $\langle v, v' \rangle \in \mathbb{C}$  を次のように定義する.

$$\langle v, v' \rangle = \sum_{j=1}^m \langle v_j, v'_j \rangle_j = \langle v_1, v'_1 \rangle_1 + \dots + \langle v_m, v'_m \rangle_m. \quad (1.102)$$

このとき,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $V$  上の (複素) 内積である.

(2)  $1 \leq j \leq m$  なる整数  $j$  について,  $V_j$  を  $V$  の部分 vector 空間とみなす. このとき,  $1 \leq j, k \leq m$  かつ  $j \neq k$  なる整数  $j, k$  について,  $v_j \in V_j$ ,  $v_k \in V_k$  ならば,  $\langle v_j, v_k \rangle = 0$  が成り立つ.

証明. (1) 定義 1.86 における (i), (ii), (iii) が成り立つことを示せばよい. まず, (i) を示す.  $v = (v_1, \dots, v_m) \in V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  について,  $v_j \in V_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) であり,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  は  $V_j$  上の (複素) 内積であるから,  $\langle v_j, v_j \rangle_j \geq 0$ . よって,  $\langle v, v \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle_1 + \dots + \langle v_m, v_m \rangle_m \geq 0 + \dots + 0 = 0$  となる. また,  $v = (v_1, \dots, v_m) = 0_V = (0_{V_1}, \dots, 0_{V_m}) \in V$  ( $0_{V_j} \in V_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) は  $V_j$  の零 vector) とすると,  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について,  $\langle v_j, v_j \rangle_j = 0$  が成り立つ. よって,  $\langle v, v \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle_1 + \dots + \langle v_m, v_m \rangle_m = 0$  となる. 逆に,  $v = (v_1, \dots, v_m) \in V$  について,  $\langle v, v \rangle = 0$  が成り立つとする. すると,  $0 = \langle v, v \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle_1 + \dots + \langle v_m, v_m \rangle_m$  となるが,  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について  $\langle v_j, v_j \rangle_j \geq 0$  であるから, 次が成り立つことが分かる.

$$\langle v_1, v_1 \rangle_1 = \dots = \langle v_m, v_m \rangle_m = 0.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) は  $V_j$  の (複素) 内積であるから,  $v_j = 0_{V_j}$  ( $1 \leq j \leq m$ ) となる. 従って,  $v = (v_1, \dots, v_m) = (0_{V_1}, \dots, 0_{V_m}) = 0_V \in V$  が得られる.

続いて, (ii) を示す.  $v = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $v' = (v'_1, \dots, v'_m)$ ,  $w = (w_1, \dots, w_m) \in V$  とし,  $c \in \mathbb{C}$  とする. すると,  $v + v' = (v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m)$ ,  $cv = (cv_1, \dots, cv_m)$  である. よって, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \langle v + v', w \rangle &= \langle v_1 + v'_1, w_1 \rangle_1 + \cdots + \langle v_m + v'_m, w_m \rangle_m \\ &= (\langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v'_1, w_1 \rangle_1) + \cdots + (\langle v_m, w_m \rangle_m + \langle v'_m, w_m \rangle_m) \\ &= (\langle v_1, w_1 \rangle_1 + \cdots + \langle v_m, w_m \rangle_m) + (\langle v'_1, w_1 \rangle_1 + \cdots + \langle v'_m, w_m \rangle_m) \\ &= \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle, \\ \langle cv, w \rangle &= \langle cv_1, w_1 \rangle_1 + \cdots + \langle cv_m, w_m \rangle_m \\ &= c\langle v_1, w_1 \rangle_1 + \cdots + c\langle v_m, w_m \rangle_m \\ &= c(\langle v_1, w_1 \rangle_1 + \cdots + \langle v_m, w_m \rangle_m) \\ &= c\langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

従って, (ii) が成り立つ. 最後に, (iii) が成り立つことを示す.  $v = (v_1, \dots, v_m)$ ,  $w = (w_1, \dots, w_m) \in V$  とするとき,  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  が  $V_j$  の (複素) 内積であることより,  $\langle v_j, w_j \rangle_j = \overline{\langle w_j, v_j \rangle_j}$  が成り立つ. 従って, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \cdots + \langle v_m, w_m \rangle_m \\ &= \overline{\langle w_1, v_1 \rangle_1} + \cdots + \overline{\langle w_m, v_m \rangle_m} \\ &= \overline{\langle w_1, v_1 \rangle_1 + \cdots + \langle w_m, v_m \rangle_m} = \overline{\langle w, v \rangle}. \end{aligned}$$

(2) いま,  $1 \leq j < k \leq m$  とする. すると,  $v_j \in V_j$  は  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$  の元として,  $v_j = (0_{V_1}, \dots, v_j, \dots, 0_{V_k}, \dots, 0_{V_m})$  と表される. 同様に,  $v_k \in V_k$  は  $v_k = (0_{V_1}, \dots, 0_{V_j}, \dots, v_k, \dots, 0_{V_m})$  と表される. 従って, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle v_j, v_k \rangle &= \langle (0_{V_1}, \dots, v_j, \dots, 0_{V_k}, \dots, 0_{V_m}), (0_{V_1}, \dots, 0_{V_j}, \dots, v_k, \dots, 0_{V_m}) \rangle \\ &= \langle 0_{V_1}, 0_{V_1} \rangle_1 + \cdots + \langle v_j, 0_{V_j} \rangle_j + \cdots + \langle 0_{V_k}, v_k \rangle_k + \cdots + \langle 0_{V_m}, 0_{V_m} \rangle_m \\ &= 0 + \cdots + 0 + \cdots + 0 + \cdots + 0 = 0. \end{aligned}$$

$1 \leq k < j \leq m$  でも同様である. ■

**定義 1.94**  $m$  を正整数,  $V_1, \dots, V_m$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) を  $V_j$  上の (複素) 内積とし,  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$  を  $V_1, \dots, V_m$  の直和とする. このとき, (1.102) で定義される (複素) 内積を  $V$  上に与えたものを,  $V_1, \dots, V_m$  の直交直和と呼ぶ.

命題 1.102 における (ii) は,  $V_j \perp V_k$  ( $1 \leq j, k \leq m, j \neq k$ ) と表される.

vector 空間で直和分解を定義したが, 元の vector 空間に内積が与えられているときは, その内積に整合する分解が考えられる.

定義 1.95  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積とし,  $W_1, \dots, W_m \subset V$  ( $m$  は正整数) を  $V$  の部分 vector 空間とする. このとき,  $W_1 \oplus \dots \oplus W_m$  が  $V$  の直交分解であるとは, 次の条件が成り立つことである.

- (i) vector 空間として,  $V = W_1 + \dots + W_m$  である.
- (ii)  $1 \leq j, k \leq m$  かつ  $j \neq k$  なる整数  $j, k$  について, 任意の  $v_j \in W_j, v_k \in W_k$  に対して,  $\langle v_j, v_k \rangle = 0$  が成り立つ.

補題 1.96  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積,  $W_1, \dots, W_m \subset V$  ( $m$  は正整数) を定義 1.95 における (i), (ii) をみたす部分 vector 空間とする. このとき,  $V$  は vector 空間として  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$  と直和分解される.

証明. 命題 1.84 における (i), (ii) をみたすことを示せばよい. ところが, 命題 1.84 における (i) は定義 1.95 における (i) と同じであるから, 命題 1.84 における (ii) を示せば十分である.

いま,  $j$  を  $1 \leq j \leq m-1$  なる整数とし,  $v \in (W_1 + \dots + W_j) \cap W_{j+1}$  とする. すると,  $v = v_1 + \dots + v_j$  ( $v_k \in W_k, 1 \leq k \leq j$ ) と表される. ここで,  $1 \leq k \leq j$  のとき,  $k \neq j+1$  であり,  $v \in W_{j+1}$  であるから, 定義 1.95 における (ii) より,  $\langle v_k, v \rangle = 0$  となる. ゆえに, 次が成り立つ.

$$\langle v, v \rangle = \langle v_1 + \dots + v_j, v \rangle = \langle v_1, v \rangle + \dots + \langle v_j, v \rangle = 0 + \dots + 0 = 0.$$

よって,  $v = 0$  となる. ゆえに,  $(W_1 + \dots + W_m) \cap W_{j+1} = \{0\}$  となり, 命題 1.84 における (ii) が成り立つ. 従って,  $V$  は vector 空間として  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$  と直和分解される. ■

例 1.97  $n$  を正整数,  $V = \mathbb{C}^n$  とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $\mathbb{C}^n$  上の標準内積とする. ここで,  $1 \leq j \leq n$

なる任意の整数  $j$  について,  $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  (第  $j$  成分が 1, 他の成分が 0) を基本 vector

とし,  $W_j = \mathbb{C}e_j = \{ce_j \in \mathbb{C}^n; c \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^n$  とする. すると, vector 空間として  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$  である. また,  $1 \leq j < k \leq n$  なる整数  $j, k$  について,  $v_j \in W_j, v_k \in W_k$  と

すると, 複素数  $c_j, c_k \in \mathbb{C}$  が存在して,  $v_j = c_j e_j, v_k = c_k e_k$  と表される. ゆえに, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\langle v_j, v_k \rangle &= \langle c_j e_j, c_k e_k \rangle \\ &= 0 \cdot 0 + \cdots + c_j \cdot 0 + \cdots + 0 \cdot \bar{c}_k + \cdots + 0 \cdot 0 \\ &= 0 + \cdots + 0 + \cdots + 0 + \cdots + 0 = 0.\end{aligned}$$

同様にして,  $1 \leq k < j \leq n$  であるときも,  $\langle v_j, v_k \rangle = 0$  ( $v_j \in V_j, v_k \in V_k$ ) が成り立つ. 従って,  $V$  は  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$  と直交分解される.

問 1.98  $V = \mathbb{C}^2$  とし,  $W_1, W_2 \subset \mathbb{C}^2$  を次で与えられる部分 vector 空間とする.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2; z \in \mathbb{C} \right\}.$$

このとき,  $V = \mathbb{C}^2$  は vector 空間として  $V = W_1 \oplus W_2$  と直和分解されるが, この分解は直交分解でないことを示せ.

ここで, (複素) 内積が与えられた有限次元複素 vector 空間について, 任意の部分 vector 空間に対して, 特別な補空間が存在することを示す.

定理 1.99  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\dim V = n > 0$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積とし,  $W \subset V$  を  $V$  の部分 vector 空間とする. いま, 次で与えられる  $V$  の部分集合を  $W^\perp$  と表すことにする.

$$W^\perp = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0, w \in W\}. \quad (1.103)$$

(1)  $W^\perp \subset V$  は  $V$  の部分 vector 空間である.

(2)  $V$  は  $V = W \oplus W^\perp$  と直交分解される.

この  $W^\perp$  を  $W$  の直交補空間と呼ぶ.

証明. (1)  $v, v' \in W^\perp, c \in \mathbb{C}$  とする. このとき, 任意の  $w \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\langle v + v', w \rangle &= \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle = 0 + 0 = 0, \\ \langle cv, w \rangle &= c \langle v, w \rangle = c \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

ゆえに,  $v + v', cv \in W^\perp$  である. また,  $V$  の零 vector  $0_V \in V$  について,  $\langle 0_V, w \rangle = 0$  であるから,  $0_V \in W^\perp$  である. 従って,  $W^\perp \subset V$  は  $V$  の部分 vector 空間である.

(2) まず,  $V$  が vector 空間として  $V = W \oplus W^\perp$  と直和分解されることを示す. いま,

$\dim W = m (0 \leq m \leq n)$  とする.  $m = 0$  とすると,  $W = \{0_V\}$  であるから, 任意の  $v \in V$  について,  $\langle v, 0_V \rangle = 0$  となる. 従って,  $W^\perp = V$  であり,  $V$  は vector 空間として,  $V = W \oplus W^\perp$  と直和分解される.  $m = n$  のときは,  $W = V$  であるが,  $v \in W^\perp$  とすると, 任意の  $w \in W = V$  について  $\langle v, w \rangle = 0$  となる. 特に,  $w = v$  とすると,  $\langle v, v \rangle = 0$  となるから,  $v = 0_V$  が成り立つ. 従って,  $W^\perp = \{0_V\}$  となり,  $V$  は vector 空間として  $V = W \oplus W^\perp$  と直和分解される. そこで,  $1 \leq m \leq n-1$  とする. このとき,  $V$  上の (複素) 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $W$  上の制限したものを  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  とすると,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  は  $W$  上の (複素) 内積になる.  $W$  は有限次元であるから, 定理 1.91 より,  $W$  の (複素) 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  に関する正規直交基底  $\{w_1, \dots, w_m\} \subset W$  が存在する.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$  は  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  の制限であるから,  $\{w_1, \dots, w_m\} \subset W \subset V$  は  $V$  の (複素) 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に関する正規直交系である. 特に,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  は線形独立である. そこで,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  に vector を加えて,  $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n\} \subset V$  が  $V$  の基底であるようにする. この  $\{w_1, \dots, w_n\}$  から, 定理 1.91 の証明にて与えられた方法により得られる  $V$  の正規直交基底を  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  とする. すると,  $\text{Span}(v_1, \dots, v_m) = \text{Span}(w_1, \dots, w_m) = W$  であり,  $\{w_1, \dots, w_m\} \subset W$  は正規直交系であるから, 問 1.92 (i) により,  $v_j = w_j (1 \leq j \leq m)$  が成り立つ. ここで,  $V$  の部分 vector 空間  $W' \subset V$  を次のものとする.

$$W' = \text{Span}(v_{m+1}, \dots, v_n).$$

すると, 明らかに  $V$  は  $V = W \oplus W'$  と直和分解される. そこで,  $W^\perp = W'$  が成り立つことを示す. まず,  $W' \subset W^\perp$  を示す.  $v \in W'$  とすると,  $v = \sum_{k=m+1}^n c_k v_k (c_k \in \mathbb{C}, m+1 \leq k \leq n)$  と表される. また,  $\{v_1, \dots, v_m\} \subset W$  は  $W$  の正規直交基底であり, 任意の  $w \in W$  は  $w = \sum_{j=1}^m a_j v_j (a_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq m)$  と表される. ここで,  $\{w_1, \dots, w_m, w_{m+1}, \dots, w_n\} \subset V$  は  $V$  の正規直交基底であるから,  $1 \leq j \leq m, m+1 \leq k \leq n$  なる整数  $j, k$  について,  $\langle v_j, v_k \rangle = 0$  が成り立つ. ゆえに, 次が得られる.

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{k=m+1}^n c_k v_k, \sum_{j=1}^m a_j v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=m+1}^n c_k \bar{a}_j \langle v_k, v_j \rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{k=m+1}^n c_k \bar{a}_j \cdot 0 = 0.$$

従って,  $W' \subset W^\perp$  が成り立つことが分かる. 続いて,  $W^\perp \subset W'$  を示す. いま,  $v \in W^\perp \subset V$

とする. すると,  $v = \sum_{j=1}^n b_j v_j (b_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n)$  と表される. このとき,  $1 \leq k \leq m$  なる任意の整数  $k$  について,  $v_k \in W$  であり,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  は  $V$  の正規直交基底であるから, 次が成り立つ.

$$0 = \langle v, v_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n b_j v_j, v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n b_j \langle v_j, v_k \rangle = \sum_{j=1}^n b_j \delta_{j,k} = b_k.$$

ゆえに,  $v \in \text{Span}(v_{m+1}, \dots, v_n)$  となり,  $W^\perp \subset W'$  が得られる.

以上により,  $V$  の任意の部分 vector 空間  $W \subset V$  について,  $V$  は vector 空間として  $V = W \oplus W^\perp$  と直和分解される. また,  $W^\perp$  の定義より, 任意の  $v \in W^\perp$  および  $w \in W$  について,  $\langle v, w \rangle = 0$  が成り立つ. 従って,  $V = W \oplus W^\perp$  は直交分解である. ■

vector 空間の直交分解を用いて, 線形形式が内積を用いて表されることを示す.

**補題 1.100**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積とし,  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  を線形形式とする. このとき, 次が成り立つ  $v_f \in V$  がただ 1 つ存在する (Riesz の補題).

$$f(v) = \langle v, v_f \rangle, \quad v \in V. \quad (1.104)$$

**証明.** まず,  $V$  上の任意の線形形式  $f$  について,  $f(v) = \langle v, v_f \rangle$  ( $v \in V$ ) となる  $v_f \in V$  が存在することを示す.  $f = 0$  のときは,  $v_f = 0_V$  (零 vector) とすると,  $\langle v, 0_V \rangle = 0 = f(v)$  ( $v \in V$ ) となる. そこで,  $f \neq 0$  とする. すると,  $f$  の像  $\text{Im} f \subset \mathbb{C}$  は  $\{0\}$  ではないから,  $\dim \text{Im} f = 1$  となる. ここで,  $\dim V = n$  とすると,  $\dim \text{Ker} f = n - 1$  となる. よって,  $\dim(\text{Ker} f)^\perp = 1$  である.  $\|\cdot\|$  を  $V$  の (複素) 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から得られる norm とし,  $w_0 \in (\text{Ker} f)^\perp$  を  $\|w_0\| = 1$  なる元とする. このとき,  $v_f \in V$  を次のように定める.

$$v_f = \overline{f(w_0)} w_0.$$

ところで,  $V = \text{Ker} f \oplus (\text{Ker} f)^\perp$  であるから, 任意の  $v \in V$  について,  $v = v' + cw_0$  なる  $v' \in \text{Ker} f$  および  $c \in \mathbb{C}$  がただ 1 つずつ存在する. よって, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle v, v_f \rangle &= \langle v, \overline{f(w_0)} w_0 \rangle = f(w_0) \langle v, w_0 \rangle = f(w_0) \langle v' + cw_0, w_0 \rangle \\ &= f(w_0) (\langle v', w_0 \rangle + c \langle w_0, w_0 \rangle) = f(w_0) \cdot (0 + c \cdot 1) = cf(w_0). \end{aligned}$$

また,  $v' \in \text{Ker} f$  であるから, 次が成り立つ.

$$f(v) = f(v' + cw_0) = f(v') + cf(w_0) = cf(w_0).$$

よって,  $f(v) = \langle v, v_f \rangle$  ( $v \in V$ ) となることが分かる.

次に,  $f(v) = \langle v, v_f \rangle$  ( $v \in V$ ) なる  $v_f \in V$  はただ 1 つであることを示す. いま,  $f(v) = \langle v, w \rangle$  ( $v \in V$ ) が成り立つとする. すると, 任意の  $v \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\langle v, v_f - w \rangle = \langle v, v_f \rangle - \langle v, w \rangle = f(v) - f(v) = 0.$$

特に,  $v = v_f - w$  とすると,  $0 = \langle v_f - w, v_f - w \rangle$  となるから,  $v_f - w = 0_V$  となり,  $w = v_f$  が得られる. ■

ここで, 内積と線形写像の関係を考える. そのために, 内積と深く関係する, 行列に関する操作を与える.

定義 1.101  $m, n$  を正整数とし,  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$  を複素  $(m, n)$  行列とする. このとき, 次で与えられる複素  $(n, m)$  行列を  $A$  の随伴行列と呼び,  $A^*$  と表す.

$$A^* = {}^t\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1,1} & \cdots & \bar{a}_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1,n} & \cdots & \bar{a}_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (1.105)$$

問 1.102  $l, m, n$  を正整数とする.

- (1)  $A$  を複素  $(m, n)$  行列とすると,  $(A^*)^* = A$  となることを示せ.
- (2)  $A, B$  を複素  $(m, n)$  行列とし,  $c \in \mathbb{C}$  とするとき, 次が成り立つことを示せ.

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \\ (cA)^* = \bar{c}A^*.$$

- (3)  $A, B$  をそれぞれ複素  $(l, m)$  行列, 複素  $(m, n)$  行列とする. このとき,  $(AB)^* = B^*A^*$  が成り立つことを示せ.

内積が与えられた有限次元 vector 空間上の線形写像に対して, その内積により新たな線形写像が定義される.

定理 1.103  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$  をそれぞれ  $V, W$  上の (複素) 内積とし,  $f : V \rightarrow W$  を線形写像とする. このとき, 次をみたす線形写像  $g : W \rightarrow V$  がただ 1 つ存在する.

$$\langle f(v), w \rangle_W = \langle v, g(w) \rangle_V, \quad v \in V, w \in W. \quad (1.106)$$

この  $g$  を  $f$  の随伴写像と呼び,  $g = f^*$  と表す.

証明.  $w \in W$  とし,  $V$  上の写像  $f_w : V \rightarrow \mathbb{C}$  を次で定義する.

$$f_w(v) = \langle f(v), w \rangle_W, \quad v \in V. \quad (1.107)$$

このとき,  $v, v' \in V, c \in \mathbb{C}$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} f_w(v + v') &= \langle f(v + v'), w \rangle_W = \langle f(v) + f(v'), w \rangle_W \\ &= \langle f(v), w \rangle_W + \langle f(v'), w \rangle_W = f_w(v) + f_w(v'), \\ f_w(cv) &= \langle f(cv), w \rangle_W = \langle cf(v), w \rangle_W \\ &= c\langle f(v), w \rangle_W = cf_w(v). \end{aligned}$$



ゆえに,  $f_w$  は  $V$  上の線形形式である. よって, 補題 1.100 より,  $f_w(v) = \langle v, v_w \rangle_V$  ( $v \in V$ ) が成り立つ  $v_w \in V$  がただ 1 つ存在する. このとき,  $g(w) = v_w$  とする. すると, 任意の  $v \in V, w \in W$  について, (1.106) が成り立つことが分かる. さらに,  $v_w$  の一意性により, (1.106) をみたく写像  $g : W \rightarrow V$  はただ 1 つしか存在しない. ここで,  $g$  が線形写像であることを示す.  $v \in V, w, w' \in W$  であるとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle v, g(w + w') \rangle_V &= \langle f(v), w + w' \rangle_W = \langle f(v), w \rangle_W + \langle f(v), w' \rangle_W \\ &= \langle v, g(w) \rangle_V + \langle v, g(w') \rangle_V = \langle v, g(w) + g(w') \rangle_V. \end{aligned}$$

よって,  $g$  の一意性により,  $g(w + w') = g(w) + g(w')$  となる. 次に,  $c \in \mathbb{C}$  とすると, 次が得られる.

$$\langle v, g(cw) \rangle_V = \langle f(v), cw \rangle_W = \bar{c} \langle f(v), w \rangle_W = \bar{c} \langle v, g(w) \rangle_V = \langle v, cg(w) \rangle_V.$$

再び  $g$  の一意性より,  $g(cw) = cg(w)$  となる. 従って,  $g$  は線形写像である. ■

随伴写像は, 随伴行列と同様な性質をもつ.

**命題 1.104**  $U, V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間とし, それぞれ (複素) 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_U, \langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$  をもつとする.

- (1)  $f : V \rightarrow W$  を線形写像とする. このとき,  $(f^*)^* = f$  が成り立つ.
- (2)  $f, g : V \rightarrow W$  を線形写像とし,  $c \in \mathbb{C}$  とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (f + g)^* &= f^* + g^*, \\ (cf)^* &= \bar{c}f^*. \end{aligned}$$

- (3)  $f : V \rightarrow W, g : U \rightarrow V$  をともに線形写像とする. このとき,  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  が成り立つ.

証明. (1)  $f^*$  は  $W$  から  $V$  への線形写像であるから,  $(f^*)^*$  は  $V$  から  $W$  への線形写像である. このとき, 任意の  $v \in V, w \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\langle w, (f^*)^*(v) \rangle_W = \langle f^*(w), v \rangle_V = \overline{\langle v, f^*(w) \rangle_V} = \overline{\langle f(v), w \rangle_W} = \langle w, f(v) \rangle_W.$$

ここで,  $(f^*)^*$  は  $f^*$  に対して一意的に定められるから,  $(f^*)^* = f$  となる.

- (2)  $v \in V, w \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle v, (f + g)^*(w) \rangle_V &= \langle (f + g)(v), w \rangle_W = \langle f(v) + g(v), w \rangle_W \\ &= \langle f(v), w \rangle_W + \langle g(v), w \rangle_W = \langle v, f^*(w) \rangle_V + \langle v, g^*(w) \rangle_V \\ &= \langle v, f^*(w) + g^*(w) \rangle_V = \langle v, (f^* + g^*)(w) \rangle_V. \end{aligned}$$

$f + g$  に対して,  $(f + g)^*$  は一意的であるから,  $(f + g)^* = f^* + g^*$  が成り立つ. また, 次も得られる.

$$\begin{aligned}\langle v, (cf)^*(w) \rangle_V &= \langle (cf)(v), w \rangle_W = \langle c(f(v)), w \rangle_W = c\langle f(v), w \rangle_W \\ &= c\langle v, f^*(w) \rangle_V = \langle v, \bar{c}(f^*(w)) \rangle_V = \langle v, (\bar{c}f^*)(w) \rangle_V.\end{aligned}$$

$cf$  に対して,  $(cf)^*$  は一意的であるから,  $(cf)^* = \bar{c}f^*$  が成り立つことが分かる.

(3)  $f \circ g$  は  $U$  から  $W$  への線形写像であるから,  $(f \circ g)^*$  は  $W$  から  $U$  への線形写像である. いま  $u \in U, w \in W$  とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\langle u, (f \circ g)^*(w) \rangle_U &= \langle (f \circ g)(u), w \rangle_W = \langle f(g(u)), w \rangle_W \\ &= \langle g(u), f^*(w) \rangle_V = \langle u, g^*(f^*(w)) \rangle_U = \langle u, (g^* \circ f^*)(w) \rangle_U.\end{aligned}$$

$f \circ g$  に対して,  $(f \circ g)^*$  は一意的であるから,  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  が成り立つ. ■

随伴写像と随伴表現は, 正規直交基底により関連づけられる.

**命題 1.105**  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\dim V = n > 0, \dim W = m > 0$  とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$  をそれぞれ  $V, W$  上の (複素) 内積,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V, \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$  をそれぞれ  $V, W$  の正規直交基底とする. いま,  $f : V \rightarrow W$  を線形写像とし,  $\{v_1, \dots, v_n\}, \{w_1, \dots, w_m\}$  に関する表現行列を  $A$  とする. このとき,  $f^* : W \rightarrow V$  の  $\{w_1, \dots, w_m\}, \{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列は  $A^*$  である.

証明.  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$  とする. すると,  $1 \leq k \leq m$  なる任意の整数  $k$  について,

次が成り立つ.

$$f(v_k) = \sum_{j=1}^m a_{j,k} w_j.$$

$\{w_1, \dots, w_m\} \subset W$  は  $W$  の正規直交基底であるから,  $1 \leq j \leq m$  なる任意の整数  $j$  について, 次が成り立つ.

$$\langle f(v_k), w_j \rangle_W = \left\langle \sum_{l=1}^m a_{l,k} w_l, w_j \right\rangle_W = \sum_{l=1}^m a_{l,k} \langle w_l, w_j \rangle_W = \sum_{l=1}^m \delta_{l,j} a_{l,k} = a_{j,k}.$$

ここで,  $f^* : W \rightarrow V$  の表現行列を  $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}$  とする. すると,  $1 \leq j \leq m$

なる整数  $j$  について, 次が成り立つ.

$$f^*(w_j) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} v_k.$$

$\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  は  $V$  の正規直交基底であるから,  $A$  と同様にして,  $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$  なる任意の整数  $j, k$  について, 次が得られる.

$$\langle f^*(w_j), v_k \rangle_V = b_{k,j}.$$

$f^*$  は  $f$  の随伴写像であるから,  $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$  なる任意の整数  $j, k$  について,  $\langle v_k, f^*(w_j) \rangle_V = \langle f(v_k), w_j \rangle_W$  が成り立つから, 次が得られる.

$$b_{k,j} = \langle f^*(w_j), v_k \rangle_V = \overline{\langle v_k, f^*(w_j) \rangle_V} = \overline{\langle f(v_k), w_j \rangle_W} = \bar{a}_{j,k}.$$

従って, 次が成り立つことが分かる.

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1,1} & \cdots & \bar{a}_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1,n} & \cdots & \bar{a}_{m,n} \end{pmatrix} = A^*.$$

■

( 余 白 )

## 1.4 行列のなす群.

ここでは、行列たちからなる群の例を挙げる.

**定義 1.106**  $m, n$  を正整数,  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$  とする. このとき,  $\mathbb{K}$  の元を成分としてもつ  $(m, n)$  行列全体のなす vector 空間を  $M(m, n, \mathbb{K})$  と表すことにする.

$$M(m, n, \mathbb{K}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}; a_{j,k} \in \mathbb{K}, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n \right\}. \quad (1.108)$$

特に,  $m = n$  のとき,  $M(m, n, \mathbb{K})$  を単に  $M(n, \mathbb{K})$  と表すことにする.

$$M(n, \mathbb{K}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}; a_{j,k} \in \mathbb{K}, 1 \leq j, k \leq n \right\}. \quad (1.109)$$

$M(n, \mathbb{K})$  は単に体  $\mathbb{K}$  上の vector 空間というだけではなく, 通常の行列の積をとることを乗法とする (非可換) 環になる. このときの乗法の単位元は, 単位行列  $I_n$  である.

以下では, 特に断らない限り,  $M(n, \mathbb{K})$  およびその部分集合上の乗法は, 通常の行列の乗法とする.  $M(n, \mathbb{K})$  自身は乗法に関して群ではないが,  $M(n, \mathbb{K})$  の部分集合で, 乗法に関して閉じているものがある.

**定理 1.107**  $n$  を正整数とし,  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$  とする. ここで,  $M(n, \mathbb{K})$  の次の部分集合を考える.

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M(n, \mathbb{K}); \det A \neq 0\}. \quad (1.110)$$

このとき,  $GL(n, \mathbb{K})$  は乗法に関して群をなす.

証明.  $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$  とする. すると,  $\det AB = \det A \det B \neq 0$  となる. よって,  $AB \in GL(n, \mathbb{K})$  が得られる. また,  $A$  の余因子行列を  $\tilde{A}$  と表すとすると,  $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)I_n$  が成り立つ. ここで,  $\det A \neq 0$  であることより,  $B = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$  とおくと,  $AB = BA = I_n$  となり,  $A$  は逆行列  $B = A^{-1}$  をもつ. このとき,

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1}.$$

よって,  $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \neq 0$  となり,  $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$  が成り立つ.

ここで,  $GL(n, \mathbb{K})$  における乗法が, 群の公理をみたすことを示す.  $M(n, \mathbb{K})$  における行列の乗法は結合法則をみたすから,  $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$  について,  $(AB)C = A(BC)$  が成

り立つ. また,  $n$  次単位行列  $I_n$  について,  $\det I_n = 1 \neq 0$  であるから  $I_n \in GL(n, \mathbb{K})$  であり,  $I_n$  は  $M(n, \mathbb{K})$  における乗法に関する単位元であるから, 任意の  $A \in GL(n, \mathbb{K})$  に関して  $AI_n = I_nA = A$  が成り立つ. よって,  $I_n$  は  $GL(n, \mathbb{K})$  の乗法に関する単位元である. さらに,  $A \in GL(n, \mathbb{K})$  について,  $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$  であり,  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$  が成り立つ. ゆえに,  $A^{-1}$  は  $A$  の  $GL(n, \mathbb{K})$  における乗法に関する逆元である.

以上により,  $GL(n, \mathbb{K})$  が乗法に関して群をなすことが示された. ■

**定義 1.108**  $n$  を正整数,  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$  とする. このとき,  $GL(n, \mathbb{K})$  を体  $\mathbb{K}$  上の  $n$  次一般線形群と呼ぶ. 特に,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$  のとき,  $GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R})$  をそれぞれ  $n$  次複素一般線形群,  $n$  次実一般線形群と呼ぶ.

$G \subset M(n, \mathbb{K})$  を単位行列  $I_n$  を単位元とする乗法に関する部分群とする. このとき, 任意の  $A \in G$  について,  $AB = BA = I_n$  なる  $B \in G$  をとると,  $1 = \det I_n = \det AB = \det A \det B$  であるから,  $\det A \neq 0$  でなければならない. よって,  $G \subset GL(n, \mathbb{K})$  となる. 従って,  $GL(n, \mathbb{K})$  は  $M(n, \mathbb{K})$  に含まれる  $I_n$  を単位元とする最大の群であることが分かる.

それでは,  $GL(n, \mathbb{K})$  に含まれる群には, どのようなものがあるだろうか.

**定理 1.109**  $n$  を正整数,  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$  とする. いま,  $M(n, \mathbb{K})$  の次の部分集合を考える.

$$SL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M(n, \mathbb{K}); \det A = 1\}. \quad (1.111)$$

明らかに,  $SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$  である.

- (1)  $SL(n, \mathbb{K})$  は乗法に関して群をなす.
- (2)  $SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$  は  $GL(n, \mathbb{K})$  の正規部分群である.

**証明.** (1)  $SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$  であり,  $GL(n, \mathbb{K})$  は乗法に関して群であるから,  $SL(n, \mathbb{K})$  が部分群であることを示せばよい. まず,  $A, B \in SL(n, \mathbb{K})$  とする. すると,  $\det AB = \det A \det B = 1 \cdot 1 = 1$  であるから,  $AB \in SL(n, \mathbb{K})$  である. また,  $A \in SL(n, \mathbb{K})$  について,  $A \in SL(n, \mathbb{K}) \subset GL(n, \mathbb{K})$  より,  $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$  である. さらに,  $1 = \det I_n = \det AA^{-1} = (\det A)(\det A^{-1}) = \det A^{-1}$  より,  $A^{-1} \in SL(n, \mathbb{K})$  である. 以上により,  $SL(n, \mathbb{K})$  が  $GL(n, \mathbb{K})$  の部分群であることが分かり, 特に, 乗法に関して群をなす.

(2)  $A \in SL(n, \mathbb{K}), B \in GL(n, \mathbb{K})$  とする. すると,  $\det B^{-1} = (\det B)^{-1}$  であるから,  $\det BAB^{-1} = (\det B)(\det A)(\det B^{-1}) = (\det B)(\det B)^{-1} = 1$  となり,  $BAB^{-1} \in SL(n, \mathbb{K})$  が成り立つ. 従って,  $SL(n, \mathbb{K})$  は  $GL(n, \mathbb{K})$  の正規部分群である. ■

**注意 1.110** 定理 1.109 (2) は次のように証明することもできる.  $\mathbb{K}$  の単元群  $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$  は乗法に関して群をなす. いま, 行列  $A \in M(n, \mathbb{K})$  に対して行列式  $\det A$  をとる操作を,

写像  $\det : M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  と考える. このとき,  $A \in GL(n, \mathbb{K})$  について,  $\det A \neq 0$  であるから,  $\det A \in \mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathbb{K}^\times$  である. そこで, 写像  $\det$  の定義域と終域をそれぞれ  $GL(n, \mathbb{K}), \mathbb{K}^\times$  に制限したものを再び  $\det$  で表すとすると,  $A, B \in GL(n, \mathbb{K})$  について  $\det AB = (\det A)(\det B)$  であるから, 写像  $\det : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^\times$  は準同型写像である. ところで, 準同型写像  $\det$  の核  $\text{Ker}(\det)$  は  $GL(n, \mathbb{K})$  の正規部分群である. ここで,  $\text{Ker}(\det)$  を求めると, 次のようになる.

$$\text{Ker}(\det) = \{A \in GL(n, \mathbb{K}); \det A = 1\} = SL(n, \mathbb{K}).$$

従って,  $SL(n, \mathbb{K})$  は  $GL(n, \mathbb{K})$  の正規部分群である.

**定義 1.111**  $n$  を正整数とし,  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$  とする. このとき,  $SL(n, \mathbb{K})$  を体  $\mathbb{K}$  上の  $n$  次特殊線形群と呼ぶ. 特に,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$  のとき, それぞれ  $n$  次複素特殊線形群,  $n$  次実特殊線形群と呼ぶ.

$GL(n, \mathbb{K})$  の部分群には, 内積と深く関わるものがある.

**定理 1.112**  $n$  を正整数とする. いま,  $M(n, \mathbb{C})$  の次の部分集合を考える.

$$U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}); A^*A = I_n\}, \quad (1.112)$$

$$SU(n) = \{A \in U(n); \det A = 1\} = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}). \quad (1.113)$$

- (1)  $U(n), SU(n)$  とともに  $GL(n, \mathbb{C})$  の部分群であり,  $SU(n)$  は  $SL(n, \mathbb{C})$  の部分群である.
- (2)  $SU(n)$  は  $U(n)$  の正規部分群である.

証明. (1)  $A \in U(n)$  とすると,  $I_n = A^*A$  より,  $1 = \det I_n = (\det A^*)(\det A)$  となるから,  $\det A \neq 0$  である. ゆえに,  $A \in GL(n, \mathbb{C})$  が成り立つ. よって,  $U(n) \subset GL(n, \mathbb{C})$  である. ここで,  $A, B \in U(n)$  とする. すると,  $(AB)^* = B^*A^*$  であるから,

$$(AB)^*(AB) = (B^*A^*)(AB) = B^*(A^*A)B = B^*I_nB = B^*B = I_n.$$

よって,  $AB \in U(n)$  である. また,  $A \in U(n)$  について,  $A^*A = I_n$  であるから,  $AA^* = I_n$  でもある. よって,  $A^* = A^{-1}$  であり,  $(A^*)^* = A$  であるから, 次が得られる.

$$I_n = AA^* = (A^*)^*A^* = (A^{-1})^*A^{-1}.$$

ゆえに,  $A^{-1} = A^* \in U(n)$  である. 従って,  $U(n)$  は  $GL(n, \mathbb{C})$  の部分群である. また,  $U(n), SL(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$  はともに  $GL(n, \mathbb{C})$  の部分群であるから,  $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$  は  $GL(n, \mathbb{C})$  の部分群である. さらに,  $SU(n) \subset SL(n, \mathbb{C})$  であるから,  $SU(n)$  は  $SL(n, \mathbb{C})$

の部分群である.

(2)  $SU(n) \subset U(n)$  であり,  $SU(n)$  は  $GL(n, \mathbb{C})$  の部分群であるから,  $SU(n)$  は  $(n)$  の部分群である. そこで,  $SU(n)$  が  $U(n)$  の正規部分群であることを示す.  $A \in SU(n)$ ,  $B \in U(n)$  とする. すると,  $SU(n) \subset U(n)$  であるから,  $BAB^{-1} \in U(n)$  である. さらに,  $\det BAB^{-1} = (\det B)(\det A)(\det B^{-1}) = (\det B)(\det B)^{-1} = 1$  となるから,  $BAB^{-1} \in SL(n, \mathbb{C})$  となる. ゆえに,  $BAB^{-1} \in U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}) = SU(n)$  となる. 従って,  $SU(n)$  は  $U(n)$  の正規部分群である. ■

**注意 1.113** 一般に,  $G$  を群,  $H \subset G$  を部分群,  $N \subset G$  を正規部分群とすると,  $H \cap N$  は  $H$  の正規部分群である. さらに, 第二同型定理より,  $(HN)/N \simeq H/(H \cap N)$  である.

**定義 1.114**  $n$  を正整数とする. このとき,  $U(n)$  を  $n$  次 unitary 群,  $SU(n)$  を  $n$  次特殊 unitary 群と呼ぶ.  $U(n)$  は  $n$  次 unitary 行列全体のなす  $GL(n, \mathbb{C})$  の部分群に他ならない.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  の場合も, 同様な群を定義することができる.

**定理 1.115**  $n$  を正整数とする. いま,  $M(n, \mathbb{R})$  の次の部分集合を考える.

$$O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}); {}^tAA = I_n\}, \quad (1.114)$$

$$SO(n) = \{A \in O(n); \det A = 1\} = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}). \quad (1.115)$$

(1)  $O(n)$ ,  $SO(n)$  とともに  $GL(n, \mathbb{R})$  の部分群であり,  $SO(n)$  は  $SL(n, \mathbb{R})$  の部分群である.

(2)  $SO(n)$  は  $O(n)$  の正規部分群である.

証明は定理 1.112 と同様である.

**問 1.116** 定理 1.112 と同様な方法により, 定理 1.115 を証明せよ.

**定義 1.117**  $n$  を正整数とする. このとき,  $O(n)$  を  $n$  次 (実) 直交群,  $SO(n)$  を  $n$  次 (実) 特殊直交群と呼ぶ.  $O(n)$  は  $n$  次 (実) 直交行列全体のなす  $GL(n, \mathbb{R})$  の部分群に他ならない.

ここまでは, 具体的な行列たちからなる群を考えてきたが, 行列は線形写像と密接に関係する. そこで, 線形写像たちからなる群を考える.

**定理 1.118**  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$  とし,  $V$  を体  $\mathbb{K}$  上の  $\{0\}$  でない vector 空間とする. いま, 次のような集合を考える.

$$GL(V) = \{F : V \longrightarrow V; \text{線形同型写像}\}. \quad (1.116)$$

(1)  $GL(V)$  は写像の合成を乗法とする群である.

(2) さらに,  $V$  が有限次元で,  $\dim V = n > 0$  であるとき,  $GL(V)$  は  $GL(n, \mathbb{K})$  と同型である.



証明. (1) 初めに, 写像の合成は結合法則をみたすことに注意する. まず,  $F, G \in GL(V)$  とする. このとき,  $F, G$  ともに線形同型写像であるから, 逆写像  $F^{-1}, G^{-1} : V \rightarrow V$  が存在する. すると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}(F \circ G) \circ (G^{-1} \circ F^{-1}) &= F \circ (G \circ G^{-1}) \circ F^{-1} = F \circ \text{Id}_V \circ F^{-1} = F \circ F^{-1} = \text{Id}_V, \\(G^{-1} \circ F^{-1}) \circ (F \circ G) &= G^{-1} \circ (F^{-1} \circ F) \circ G = G^{-1} \circ \text{Id}_V \circ G = G^{-1} \circ G = \text{Id}_V.\end{aligned}$$

ここで,  $\text{Id}_V$  は  $V$  上の恒等写像である. よって,  $F \circ G$  は逆写像  $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$  をもち,  $F \circ G$  は線形同型写像になる. ゆえに,  $F \circ G \in GL(V)$  である. ところで, 写像の合成は結合法則をみたすから,  $F, G, H \in GL(V)$  について,  $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$  が成り立つ. また,  $V$  上の恒等写像  $\text{Id}_V : V \rightarrow V$  は線形同型写像であり, 任意の  $F \in GL(V)$  について,  $F \circ \text{Id}_V = \text{Id}_V \circ F = F$  が成り立つ. よって,  $\text{Id}_V \in GL(V)$  は, 乗法に関する単位元である. さらに,  $F \in GL(V)$  について,  $F^{-1}$  は線形写像であり, 同型写像であるから,  $F^{-1} \in GL(V)$  であるが,  $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \text{Id}_V$  であるから,  $F^{-1} \in GL(V)$  は乗法に関する  $F$  の逆元である. 従って,  $GL(V)$  は写像の合成を乗法とする群である.

(2)  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とする. このとき, 線形写像  $F : V \rightarrow V$  に対して, 基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列  $A_F \in M(n, \mathbb{K})$  を対応させることができる. この対応を  $\Phi$  と表すことにする. このとき, 線形写像  $F, G : V \rightarrow V$  について次が成り立つ.

$$A_{F \circ G} = A_F A_G. \quad (1.117)$$

さらに,  $A_{\text{Id}_V} = I_n \in M(n, \mathbb{K})$  であるから,  $F \in GL(V)$  について,  $I_n = A_{\text{Id}_V} = A_{F \circ F^{-1}} = A_F A_{F^{-1}}$  が成り立つ. よって,  $A_F \in GL(n, \mathbb{K})$  であり,  $A_{F^{-1}} = (A_F)^{-1}$  となる. そこで,  $\Phi : GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$  を  $\Phi(F) = A_F$  ( $A \in GL(V)$ ) とする. すると,  $\Phi$  は全単射であり, また, (1.117) より,  $\Phi$  は準同型写像である. 従って,  $\Phi$  は同型写像である. ■

**定義 1.119**  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$  とし,  $V$  を体  $\mathbb{K}$  上の  $\{0\}$  でない vector 空間とする. このとき,  $GL(V)$  を  $V$  上の一般線形群と呼ぶことにする.

さらに,  $V$  が有限次元であれば, 特殊線形群に対応する群を考えることができる.

**定理 1.120**  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$ ,  $V$  を体  $\mathbb{K}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\dim V = n > 0$  とする. ここで, 次のような集合を考える.

$$SL(V) = \{F : V \rightarrow V; \text{線形写像, } \det F = 1\}. \quad (1.118)$$

- (1)  $SL(V)$  は  $SL(n, \mathbb{K})$  と同型な群である.
- (2)  $SL(V)$  は  $GL(V)$  の正規部分群である.

証明.  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とし, 線形写像  $F : V \rightarrow V$  の基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列を  $A_F \in M(n, \mathbb{K})$  とする. すると,  $\det F = 1$  であるとは,  $\det A_F = 1$  であることであり, 特に  $\det A_F \neq 0$  であるから,  $A_F \in GL(n, \mathbb{K})$  である. よって,  $F \in GL(V)$  である. さらに, 同型写像  $\Phi : GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{K})$  を  $\Phi(F) = A_F (F \in GL(V))$  とすると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} SL(V) &= \{F \in GL(V); \det F = 1\} \\ &= \{F \in GL(V); \det A_F = 1\} = \Phi^{-1}(SL(n, \mathbb{K})). \end{aligned}$$

従って,  $SL(V) \subset GL(V)$  は部分群であり,  $SL(n, \mathbb{K})$  と同型になる. ■

**定義 1.121**  $\mathbb{K}$  を  $\mathbb{C}$  または  $\mathbb{R}$ ,  $V$  を体  $\mathbb{K}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とする. このとき,  $SL(V)$  を  $V$  上の特殊線形群と呼ぶことにする.

vector 空間上の内積からも, 群を定義することができる.

**定理 1.122**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の有限次元 vector 空間,  $\dim V = n > 0$  とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の複素内積とする. ここで, 次のような集合を考える.

$$U(V) = \{F : V \rightarrow V; \text{線形写像}, \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle, v, w \in V\}, \quad (1.119)$$

$$SU(V) = \{F \in U(V); \det F = 1\} = U(V) \cap SL(V). \quad (1.120)$$

- (1)  $U(V)$ ,  $SU(V)$  はそれぞれ  $U(n)$ ,  $SU(n)$  と同型な群である.
- (2)  $U(V)$ ,  $SU(V)$  はともに  $GL(V)$  の部分群であり,  $SU(V)$  は  $SL(V)$  の部分群である. さらに,  $SU(V)$  は  $U(V)$  の正規部分群である.

証明.  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の正規直交基底とし, 線形写像  $F : V \rightarrow V$  の基底  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列を  $A_F \in M(n, \mathbb{C})$  とする. いま,  $F \in U(V)$  とする. このとき,  $v \in V$  について,  $F(v) = 0$  とする. ここで, 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  から得られる norm を  $\|\cdot\|$  と表すとする. すると,

$$0 = \|F(v)\|^2 = \langle F(v), F(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

ゆえに,  $v = 0$  となるから,  $F$  は単射である. さらに,  $F : V \rightarrow V$  であり,  $V$  は有限次元であるから,  $F$  は全単射である. よって,  $F$  は  $V$  上の線形同型写像である. ここで, 同型写像  $\Phi : GL(V) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  を  $\Phi(F) = A_F (F \in GL(V))$  なるものとする. このとき,

$$A_F = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ とすると, } 1 \leq k \leq n \text{ なる整数 } k \text{ について, } F(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{j,k} v_j \text{ で}$$

あるから,  $1 \leq j \leq n$  なる任意の整数  $j, k$  について,  $a_{j,k} = \langle F(v_k), v_j \rangle$  が成り立つ. ところで,  $1 \leq j, k \leq n$  なる整数  $j, k$  について,  $\langle F(v_k), F(v_j) \rangle = \langle v_k, v_j \rangle = \delta_{j,k}$  であるから, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \delta_{j,k} &= \langle F(v_k), F(v_j) \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^n a_{l,k} v_l, \sum_{p=1}^n a_{p,j} v_p \right\rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n a_{l,k} \bar{a}_{p,j} \langle v_l, v_p \rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{p=1}^n a_{l,k} \bar{a}_{p,j} \delta_{l,p} = \sum_{l=1}^n a_{l,k} \bar{a}_{l,j} = \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

ただし,  $A_F = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  とする. ゆえに,  $A_F^* A_F = I_n$  となり,  $A_F \in U(n)$  であることが分かる. 逆に,  $A_F \in U(n)$  であるとき,  $1 \leq j, k \leq n$  なる任意の整数  $j, k$  について, 上と同様な変形により,  $\delta_{j,k} = \langle F(v_k), F(v_j) \rangle$  が得られる. よって, 任意の複素数  $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}$  について,  $v = \sum_{k=1}^n c_k v_k, w = \sum_{j=1}^n d_j v_j$  とするとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle F(v), F(w) \rangle &= \left\langle F \left( \sum_{k=1}^n c_k v_k \right), F \left( \sum_{j=1}^n d_j v_j \right) \right\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \bar{d}_j \langle F(v_k), F(v_j) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \bar{d}_j \delta_{j,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k \bar{d}_j \langle v_k, v_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^n c_k v_k, \sum_{j=1}^n d_j v_j \right\rangle = \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

ゆえに,  $F \in U(V)$  となる. 従って,  $F \in U(V)$  であることと,  $A_F \in U(n)$  であることは同値となる. よって,  $U(V) = \Phi^{-1}(U(n)) \subset GL(V)$  は部分群である. さらに,  $SU(V) = U(V) \cap SL(V)$  であるから,  $SU(V)$  は  $GL(V), SL(V)$  の部分群であり,  $SL(V)$  が  $GL(V)$  の正規部分群であることより,  $SU(V)$  は  $U(V)$  の正規部分群である. ■

**定義 1.123**  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の複素内積とする. このとき,  $U(V), SU(V)$  をそれぞれ (複素内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に関する) unitary 群, 特殊 unitary 群と呼ぶことにする.

実内積についても, 同様なことが考えられる.

**定理 1.124**  $V$  を  $\mathbb{R}$  上の有限次元 vector 空間,  $\dim V = n > 0$  とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の実内積とする. ここで, 次のような集合を考える.

$$O(V) = \{F : V \rightarrow V; \text{線形写像}, \langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle, v, w \in V\}, \quad (1.121)$$

$$SO(V) = \{F \in O(V); \det F = 1\} = O(V) \cap SL(V). \quad (1.122)$$

- (1)  $O(V)$ ,  $SO(V)$  はそれぞれ  $O(n)$ ,  $SO(n)$  と同型な群である.
- (2)  $O(V)$ ,  $SO(V)$  はともに  $GL(V)$  の部分群であり,  $SO(V)$  は  $SL(V)$  の部分群である. さらに,  $SO(V)$  は  $O(V)$  の正規部分群である.

問 1.125 定理 1.122 と同様な方法により, 定理 1.124 を証明せよ.

定義 1.126  $V$  を  $\mathbb{R}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の実内積とする. このとき,  $O(V)$ ,  $SO(V)$  をそれぞれ (実内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に関する) (実) 直交群, (実) 特殊直交群と呼ぶことにする.

## 2 有限群の表現.

ここでは、前節までに復習した群論や線形代数学に基づいて、一般の群の性質を行列群を用いて調べる群の表現について述べる.

### 2.1 定義と基本的性質.

まず、群の表現の定義を与える.

**定義 2.1**  $G$  を有限群とし、 $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とする. このとき、群の準同型写像  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を群  $G$  の  $V$  上の (有限次元線形) 表現と呼ぶ. そして、 $V$  を表現  $\pi$  の表現空間と呼ぶ. また、 $\dim V = n$  であるとき、 $\pi$  は  $n$  次元表現であるといい、 $n = \dim \pi$  と表す.

$\pi$  が  $G$  の  $V$  上の表現であるとき、 $\pi$  が準同型写像であることから、次が成り立つことが分かる.

$$\pi(xy) = \pi(x) \circ \pi(y), \quad x, y \in G, \quad (2.1)$$

$$\pi(1_G) = \text{Id}_V. \quad (2.2)$$

なお、慣習として、 $\pi(x) \circ \pi(y)$  における合成を表す記号  $\circ$  はしばしば省略されて、単に  $\pi(x)\pi(y)$  と表すことが多い. 今後混乱の恐れがない限り、 $\circ$  を省略した表し方を用いる.

群の表現と作用は次のように関連づけられる.

**命題 2.2**  $G$  を有限群、 $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし、 $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま、写像  $\Phi : G \times V \rightarrow V$  を次のように定義する.

$$\Phi(x, v) = \pi(x)(v), \quad x \in G, v \in V. \quad (2.3)$$

このとき、 $\Phi$  は  $G$  の  $V$  への作用である.

証明.  $x, y \in G, v \in V$  とするとき、次が成り立つ.

$$\Phi(xy, v) = \pi(xy)(v) = (\pi(x)\pi(y))(v) = \pi(x)(\pi(y)(v))$$

$$= \pi(x)(\Phi(y, v)) = \Phi(x, \Phi(y, v)),$$

$$\Phi(1_G, v) = \pi(1_G)(v) = \text{Id}_V(v) = v.$$

従って、 $\Phi$  は  $G$  の  $V$  への作用である. ■

逆に、写像  $\Phi : G \times V \rightarrow V$  がある性質をみたすならば、 $G$  の  $V$  上の表現を定義することができる.

命題 2.3  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\Phi : G \times V \rightarrow V$  を  $G$  の  $V$  への作用とする. いま, 任意の  $x \in G$  に対して, 写像  $\pi(x) : V \rightarrow V$  を次で定義する.

$$\pi(x)(v) = \Phi(x, v), \quad v \in V. \quad (2.4)$$

このとき, すべての  $x \in G$  に対して,  $\pi(x)$  が線形写像であれば,  $\pi(x) \in GL(V)$  であり,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  は  $G$  の  $V$  上の表現である. このような作用  $\Phi$  を  $G$  の  $V$  への線形作用と呼ぶことがある.

証明.  $x, y \in G, v \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \pi(xy)(v) &= \Phi(xy, v) = \Phi(x, \Phi(y, v)) \\ &= \pi(x)(\pi(y)(v)) = (\pi(x)\pi(y))(v), \\ \pi(1_G)(v) &= \Phi(1_G, v) = v = \text{Id}_V(v). \end{aligned}$$

ゆえに, (2.1), (2.2) が成り立つ. よって, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} \pi(x)\pi(x^{-1}) &= \pi(xx^{-1}) = \pi(1_G) = \text{Id}_V, \\ \pi(x^{-1})\pi(x) &= \pi(x^{-1}x) = \pi(1_G) = \text{Id}_V. \end{aligned}$$

ゆえに,  $\pi(x^{-1}) = \pi(x)^{-1}$  であり,  $\pi(x)$  は線形同型写像である. 従って,  $\pi(x) \in GL(V)$  であり,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  が  $G$  の  $V$  上の表現であることが分かる. ■

群の表現は, しばしば線形作用の形で表される. 即ち,  $x \in G, v \in V$  に対して,  $\pi(x)(v) \in V$  を与えるという形で表現  $\pi$  を定義することがある. このとき,  $\pi$  が表現であることを証明するには, 次のことを示す必要がある.

- (a) 任意の  $x \in G, v \in V$  に対して, (確かに)  $\pi(x)(v) \in V$  である.
- (b) 任意の  $x \in G, v, v' \in V, c \in \mathbb{C}$  について, 次が成り立つ.

$$\pi(x)(v + v') = \pi(x)(v) + \pi(x)(v'), \quad \pi(x)(cv) = c(\pi(x)(v)).$$

- (c) 任意の  $x, y \in G, v \in V$  について,  $\pi(xy)(v) = \pi(x)(\pi(y)(v))$  が成り立つ.
- (d) 任意の  $v \in V$  について,  $\pi(1_G)(v) = v$  が成り立つ.

(b), (c), (d) を示すのは当然であるが,  $\pi(x)(v)$  の形によっては, それが本当に  $V$  の元であるかどうかはすぐには分からないときがある. 従って, (a) を確認することを怠ってはならない場合がある. また, (b), (c) のみでは, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x) \in GL(V)$ , 即ち,  $\pi(x)$  が  $V$  上の線形同型写像であることを示すことができない. これを示すために, (d) が必要なのである.

例 2.4  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とする. いま,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を次で定義する.

$$\pi(x) = \text{Id}_V, \quad x \in G. \quad (2.5)$$

このとき,  $\pi$  は  $G$  の  $V$  上の表現である. これを証明するには,  $\text{Id}_V \in GL(V)$  であるから,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  が準同型写像であること, 即ち, (2.1) を示せばよい. ところが, 任意の  $x, y \in G$  について, 次が成り立つ.

$$\pi(x)\pi(y) = \text{Id}_V \circ \text{Id}_V = \text{Id}_V = \pi(xy).$$

従って,  $\pi$  は  $G$  の  $V$  上の表現である. 特に,  $\dim V = 1$  のとき,  $\pi$  を単位表現と呼ぶ.

例 2.5  $G$  を有限群,  $S$  を空でない有限集合とする. この  $S$  に対して,  $V$  を  $S$  の元を基底とする  $\mathbb{C}$  上の vector 空間とする.

$$V = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}v_s \simeq \left\{ \sum_{s \in S} a_s v_s; a_s \in \mathbb{C}, s \in S \right\}. \quad (2.6)$$

いま,  $G \times S \ni (x, s) \mapsto x \cdot s \in S$  を  $G$  の  $S$  への作用とする. このとき,  $G$  の  $V$  上の表現  $\pi$  を次で定義する.

$$\pi(x) \left( \sum_{s \in S} a_s v_s \right) = \sum_{s \in S} a_s v_{x \cdot s} = \sum_{s \in S} a_{x^{-1} \cdot s} v_s. \quad (2.7)$$

ここで,  $x \in G, a_s \in \mathbb{C} (s \in S)$  である. この  $\pi$  が表現であることを示す. まず,  $x \in G, v = \sum_{s \in S} a_s v_s \in V$  について,  $\pi(x)(v) \in V$  である. また,  $x \in G, v = \sum_{s \in S} a_s v_s, v' = \sum_{s \in S} a'_s v_s \in V, c \in \mathbb{C}$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \pi(x)(v + v') &= \pi(x) \left( \sum_{s \in S} (a_s + a'_s) v_s \right) = \sum_{s \in S} (a_s + a'_s) v_{x \cdot s} \\ &= \sum_{s \in S} a_s v_{x \cdot s} + \sum_{s \in S} a'_s v_{x \cdot s} = \pi(x)(v) + \pi(x)(v'), \\ \pi(x)(cv) &= \pi(x) \left( \sum_{s \in S} (ca_s) v_s \right) = \sum_{s \in S} (ca_s) v_{x \cdot s} \\ &= c \left( \sum_{s \in S} a_s v_{x \cdot s} \right) = c(\pi(x)(v)). \end{aligned}$$

ゆえに,  $\pi(x) : V \rightarrow V$  は線形写像である. 次に,  $x, y \in G$ ,  $v = \sum_{s \in S} a_s v_s \in V$  とする. こ

こで,  $\pi(y)(v) = \sum_{s \in S} b_s v_s \in V$  とおく. すると, 次が成り立つ.

$$\sum_{s \in S} b_s v_s = \pi(y)v = \pi(y) \left( \sum_{s \in S} a_s v_s \right) = \sum_{s \in S} a_{y^{-1} \cdot s} v_s.$$

ゆえに,  $b_s = a_{y^{-1} \cdot s}$  ( $s \in S$ ) である. よって, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \pi(xy)(v) &= \sum_{s \in S} a_s v_{xy \cdot s} = \sum_{s \in S} a_s v_{x \cdot (y \cdot s)} = \sum_{s \in S} a_{y^{-1} \cdot s} v_{x \cdot s} \\ &= \sum_{s \in S} b_s v_{x \cdot s} = \pi(x) \left( \sum_{s \in S} b_s v_s \right) = \pi(x)(\pi(y)(v)). \end{aligned}$$

さらに, 任意の  $v = \sum_{s \in S} a_s v_s \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\pi(1_G)(v) = \sum_{s \in S} a_s v_{1_G \cdot s} = \sum_{s \in S} a_s v_s = v.$$

以上により,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  は表現であることが分かる.

例 2.6 例 2.5 において,  $S = G$  とする. そして,  $G$  の  $G$  自身への作用として, 次で与えられるものを考える.

$$x \cdot y = xy, \quad x, y \in G. \quad (2.8)$$

これが  $G$  の  $G$  自身への作用であることは,  $G$  の乗法の結合法則および単位元の性質より容易に分かる. この作用を  $G$  の左移動と呼ぶ. また,  $G$  の  $G$  自身への作用として, 次のものを考える.

$$x \cdot y = yx^{-1}. \quad (2.9)$$

これが作用であることを示す. いま,  $x, y, z \in G$  とする. すると, 次が得られる.

$$\begin{aligned} xy \cdot z &= z(xy)^{-1} = z(y^{-1}x^{-1}) = (zy^{-1})x^{-1} = x \cdot zy^{-1} = x \cdot (y \cdot z), \\ 1_G \cdot z &= z1_G^{-1} = z1_G = z. \end{aligned}$$

よって, これは確かに作用になっている. この作用を右移動と呼ぶ. なお, 単に  $(x, y) \mapsto yx$  ( $x, y \in G$ ) を右移動と呼ぶこともある. このときは,  $G$  が 右から  $G$  自身に作用している.



これらの作用から  $G$  の表現を構成する. いま,  $V = \bigoplus_{x \in G} \mathbb{C}v_x = \left\{ \sum_{x \in G} a_x v_x; a_x \in \mathbb{C}, x \in G \right\}$  とする. すると, この  $G$  の左移動から得られる表現  $\pi_L : G \rightarrow GL(V)$ , 右移動から得られる表現  $\pi_R : G \rightarrow GL(V)$  はそれぞれ次のように表される.

$$\pi_L(x) \left( \sum_{y \in G} a_y v_y \right) = \sum_{y \in G} a_y v_{xy} = \sum_{y \in G} a_{x^{-1}y} v_y, \quad (2.10)$$

$$\pi_R(x) \left( \sum_{y \in G} a_y v_y \right) = \sum_{y \in G} a_y v_{yx^{-1}} = \sum_{y \in G} a_{yx} v_y. \quad (2.11)$$

ここで,  $x \in G, a_y \in \mathbb{C} (y \in G)$  である. この  $\pi_L, \pi_R$  をそれぞれ  $G$  の左正則表現, 右正則表現と呼ぶ.

例 2.7  $G$  を有限群,  $S$  を空でない有限集合とし,  $(x, s) \mapsto x \cdot s$  を  $G$  の  $S$  への作用とする. このとき, 見た目上例 2.5 と異なる表現を考える. (この例は本質的に例 2.5 と同じものである.) まず,  $\mathbb{C}$  上の vector 空間  $W$  を次で与える.

$$W = \{f : S \rightarrow \mathbb{C}\}. \quad (2.12)$$

即ち,  $W$  は  $S$  上の複素数値関数全体のなす vector 空間である. ここで,  $x \in G, f \in W$  に対して,  $\rho(x)(f) \in W$  を次で定義する.

$$(\rho(x)(f))(s) = f(x^{-1} \cdot s), \quad s \in S. \quad (2.13)$$

この  $\rho$  が  $G$  の表現であることを示す. まず, 任意の  $x \in G, f \in W$  について,  $\rho(x)(f) \in W$  である. また,  $x \in G, f, g \in W, c \in \mathbb{C}$  について, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} (\rho(x)(f+g))(s) &= (f+g)(x^{-1} \cdot s) = f(x^{-1} \cdot s) + g(x^{-1} \cdot s) \\ &= (\rho(x)(f))(s) + (\rho(x)(g))(s) = (\rho(x)(f) + \rho(x)(g))(s), \\ (\rho(x)(cf))(s) &= (cf)(x^{-1} \cdot s) = c(f(x^{-1} \cdot s)) \\ &= c((\rho(x)(f))(s)) = (c(\rho(x)(f)))(s). \end{aligned}$$

ここで,  $s \in S$  である. よって,  $\rho(x) : W \rightarrow W$  は線形写像である. そして,  $x, y \in G, f \in W$  とするとき, 次が得られる.

$$\begin{aligned} (\rho(xy)(f))(s) &= f((xy)^{-1} \cdot s) = f(y^{-1}x^{-1} \cdot s) = f(y^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot s)) \\ &= (\rho(y)(f))(x^{-1} \cdot s) = (\rho(x)(\rho(y)(f)))(s) = ((\rho(x)\rho(y))(f))(s). \end{aligned}$$

ここで,  $s \in S$  である. ゆえに,  $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$  が成り立つことが分かる. 最後に,  $f \in W$ ,  $s \in S$  について, 次が成り立つ.

$$(\rho(1_G)(f))(s) = f(1_G^{-1} \cdot s) = f(1_G \cdot s) = f(s).$$

よって,  $\rho(1_G) = \text{Id}_W$  となる. 以上により,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  は  $G$  の  $W$  上の表現である.

群の表現は, しばしば群から行列のなす群への準同型として実現されることがある. このことを, vector 空間の基底を用いて説明する.  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $\dim V = n > 0$  であるとし,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とする. すると, 任意の  $x \in G$  に対して,  $\pi(x)$  の  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列  $A_\pi(x) \in GL(n, \mathbb{C})$  が得られる. このとき, (2.1), (2.2) より, 次のことが得られる.

$$A_\pi(xy) = A_\pi(x)A_\pi(y), \quad x, y \in G, \quad (2.14)$$

$$A_\pi(1_G) = I_n. \quad (2.15)$$

よって, 写像  $A_\pi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  は準同型写像になる. 逆に,  $n$  を正整数とし,  $A : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  を準同型写像とする. このとき,  $V = \mathbb{C}^n$  とし, 任意の  $x \in G$  に対して,  $\pi_A(x) : V \rightarrow V$  を次で定義する.

$$\pi_A(x)v = A(x)v, \quad v \in V = \mathbb{C}^n. \quad (2.16)$$

すると, 任意の  $x \in G$  について,  $A(x) \in GL(n, \mathbb{C})$  であるから,  $\pi_A(x) \in GL(V)$  となり,  $\pi_A : G \rightarrow GL(V)$  は  $G$  の  $V = \mathbb{C}^n$  上の表現である. 従って,  $V = \mathbb{C}^n$  のときは,  $\mathbb{C}^n$  の標準基底  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{C}^n$  をとることにより, 準同型  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  全体と準同型  $A : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  全体は自然に同一視される. よって, 今後  $G$  の  $n$  次元表現を  $\pi : g \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  と表すことがある. このときは, 表現空間として  $V = \mathbb{C}^n$  をとっていると考える.

表現の性質を調べるには, 与えられた表現を分解することが重要である. そのために, 分解されて得られる「部分」を定義する.

**定義 2.8**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $W \subset V$  を  $V$  の部分 vector 空間で, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つとする.

$$\pi(x)W = \{\pi(x)w \in V; w \in W\} \subset W. \quad (2.17)$$

このとき,  $W$  を  $G$  不変部分 vector 空間, あるいは単に  $G$  不変部分空間と呼ぶ.

任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x)V$  は  $V$  の部分集合であるから,  $V$  自身は  $G$  不変部分空間である. また,  $W = \{0\}$  とするとき, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x)(0) = 0 \in \{0\} = W$  となる. よって,  $\{0\}$  も  $G$  不変部分空間である. この  $\{0\}$  と  $V$  自身を  $V$  の自明な  $G$  不変部分空間と呼ぶ.

命題 2.9  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間で,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とし,  $W \subset V$  を  $V$  の  $\{0\}$  でない  $G$  不変部分空間とする. いま,  $x \in G$  に対して,  $\pi_W(x) : W \rightarrow W$  を次のように定義する.

$$\pi_W(x)(w) = \pi(x)(w), \quad w \in W. \quad (2.18)$$

このとき, 任意の  $x \in G$  について  $\pi_W(x) \in GL(W)$  であり,  $\pi_W : G \rightarrow GL(W)$  は  $G$  の  $W$  上の表現になる. この  $\pi_W$  を  $\pi$  の部分表現, あるいは,  $\pi$  の  $W$  上への制限と呼ぶ.

証明. 任意の  $x \in G$  について,  $\pi_W(x)$  は  $\pi : V \rightarrow V$  の定義域と終域を  $W$  に制限したものであるから,  $\pi_W(x) : W \rightarrow W$  も線形写像である. また,  $x, y \in G, w \in W$  について, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \pi_W(xy)(w) &= \pi(xy)(w) = (\pi(x)\pi(y))(w) = \pi(x)(\pi(y)(w)) \\ &= \pi_W(x)(\pi_W(y)(w)) = (\pi_W(x)\pi_W(y))(w). \end{aligned}$$

ゆえに,  $\pi_W(xy) = \pi_W(x)\pi_W(y)$  が成り立つ. さらに, 任意の  $w \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\pi_W(1_G)(w) = \pi(1_G)(w) = \text{Id}_V(w) = w.$$

よって,  $\pi_W(1_G) = \text{Id}_W$  となる. 以上により,  $\pi_W$  は  $G$  の  $W$  上の表現である. ■

表現  $\pi$  に対して,  $\pi_W$  は  $\pi$  より「小さい」表現と考えることができる. そこで, “これ以上小さくならない” 表現を考える.

定義 2.10  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間で,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $V$  には自明でない  $G$  不変部分空間が存在しないとする. このとき,  $\pi$  は既約であるという. このことを,  $V$  が既約であるともいう. また,  $\pi$  が既約でないとき,  $\pi$  は可約であるという. このことは,  $V$  が可約であるともいわれる.

特に,  $\dim V = 1$  であるとき,  $G$  の  $V$  上の表現は常に既約である.

表現が可約であるとき, 表現空間から  $G$  不変部分空間を“除いた”部分, より正確にいうと,  $G$  不変部分空間の補空間では何が起きているであろうか. このことを説明するために, 表現の直和を定義する.

定理 2.11  $m$  を正整数,  $G$  を有限群,  $V_1, \dots, V_m$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi_j : G \rightarrow GL(V_j)$  ( $1 \leq j \leq m$ ) を  $G$  の  $V_j$  上の表現とする. いま,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  とし, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x) : V \rightarrow V$  を次のように定義する.

$$\pi(x)(v_1, \dots, v_m) = (\pi_1(x)(v_1), \dots, \pi_m(x)(v_m)), \quad v_j \in V_j, 1 \leq j \leq m. \quad (2.19)$$

このとき,  $\pi(x) \in GL(V)$  であり,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  は  $G$  の  $V$  上の表現である. この  $\pi$  を  $\pi_1, \dots, \pi_m$  の直和表現と呼び,  $\pi = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_m$  と表す.

証明.  $x \in G, v = (v_1, \dots, v_m), v' = (v'_1, \dots, v'_m) \in V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m, c \in \mathbb{C}$  とする. このとき, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \pi(x)(v + v') &= \pi(x)(v_1 + v'_1, \dots, v_m + v'_m) \\ &= (\pi_1(x)(v_1 + v'_1), \dots, \pi_m(x)(v_m + v'_m)) \\ &= (\pi_1(x)(v) + \pi_1(x)(v'_1), \dots, \pi_m(x)(v_m) + \pi_m(x)(v'_m)) \\ &= (\pi_1(x)(v_1), \dots, \pi_m(x)(v_m)) + (\pi_1(x)(v'_1), \dots, \pi_m(x)(v'_m)) \\ &= \pi(x)(v_1, \dots, v_m) + \pi(x)(v'_1, \dots, v'_m) = \pi(x)(v) + \pi(x)(v'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(x)(cv) &= \pi(x)(cv_1, \dots, cv_m) \\ &= (\pi_1(x)(cv_1), \dots, \pi_m(x)(cv_m)) \\ &= (c(\pi_1(x)(v_1)), \dots, c(\pi_m(x)(v_m))) \\ &= c(\pi_1(x)(v_1), \dots, \pi_m(x)(v_m)) \\ &= c(\pi(x)(v_1, \dots, v_m)) = c(\pi(x)(v)). \end{aligned}$$

よって,  $\pi(x) : V \rightarrow V$  は線形写像である. また, 任意の  $x, y \in G, v = (v_1, \dots, v_m) \in V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  に対して, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \pi(xy)(v) &= \pi(xy)(v_1, \dots, v_m) = (\pi_1(xy)(v_1), \dots, \pi_m(xy)(v_m)) \\ &= ((\pi_1(x)\pi_1(y))(v_1), \dots, (\pi_m(x)\pi_m(y))(v_m)) \\ &= (\pi_1(x)(\pi_1(y)(v_1)), \dots, \pi_m(x)(\pi_m(y)(v_m))) \\ &= \pi(x)(\pi_1(y)(v_1), \dots, \pi_m(y)(v_m)) \\ &= \pi(x)(\pi(y)(v_1, \dots, v_m)) = \pi(x)(\pi(y)(v)) = (\pi(x)\pi(y))(v). \end{aligned}$$

ゆえに,  $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$  が成り立つ. 最後に, 任意の  $v = (v_1, \dots, v_m) \in V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \pi(1_G)(v) &= \pi(1_G)(v_1, \dots, v_m) = (\pi_1(1_G)(v_1), \dots, \pi_m(1_G)(v_m)) \\ &= (\text{Id}_{V_1}(v_1), \dots, \text{Id}_{V_m}(v_m)) = (v_1, \dots, v_m) = v. \end{aligned}$$

よって,  $\pi(1_G) = \text{Id}_V$  が成り立つ. 以上により,  $\pi$  は  $G$  の  $V$  上の表現である. ■

この定理は, 複数の表現の表現空間たちの直和空間に表現を構成するというものである. これとは逆に, ある表現の表現空間の直和分解に整合するように, 表現を分解することを考える.

**定義 2.12**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $V$  の任意の  $G$  不変部分空間  $W$  に対して,  $G$  不変な補空間  $W'$ , 即ち,  $G$  不変であって,  $V = W \oplus W'$  が成り立つものが存在するとする. このとき,  $\pi$  は完全可約であるという.

$W = V$  のとき,  $W \oplus W' = V$  となる  $V$  の部分 vector 空間は  $W' = \{0\}$  のみであり, これは  $G$  不変である. また,  $W = \{0\}$  のときは,  $W \oplus W' = V$  となる  $V$  の部分 vector 空間は  $W' = W$  のみである. これも  $G$  不変である. よって, 特に  $G$  の  $V$  上の表現  $\pi$  が既約であれば,  $\pi$  は完全可約である. なお, 一般に,  $G$  の  $V$  上の表現  $\pi$  が完全可約であっても,  $G$  不変部分空間  $W \subset V$  に対して,  $G$  不変な補空間  $W' \subset V$  はただ1つとは限らない.

表現が完全可約であるとき,  $G$  不変部分空間とその  $G$  不変な補空間により, 表現は直和に分解される.

**命題 2.13**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $W, W' \subset V$  をともに  $G$  不変部分空間で,  $V = W \oplus W'$  なるものとする. そして,  $\pi$  の  $W, W'$  上への制限をそれぞれ  $\pi_W, \pi_{W'}$  とする. このとき,  $\pi = \pi_W \oplus \pi_{W'}$  となる.

証明.  $v = (w, w') \in V = W \oplus W'$  とする. このとき, 任意の  $x \in G$  に対して  $\pi_W(x)(w) \in W$ ,  $\pi_{W'}(x)(w') \in W'$  であるから,  $W \oplus W'$  と  $V$  の同一視を  $\Phi : W \oplus W' \ni (w, w') \mapsto w + w' \in V$  とすると, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \pi(x)(\Phi(w, w')) &= \pi(x)(w + w') = \pi(x)(w) + \pi(x)(w') \\ &= \pi_W(x)(w) + \pi_{W'}(x)(w') = \Phi(\pi_W(x)(w), \pi_{W'}(x)(w')). \end{aligned}$$

よって,  $\Phi$  による  $V$  と  $W \oplus W'$  の同一視により,  $\pi(x)(w, w') = (\pi_W(x)(w), \pi_{W'}(x)(w'))$  が成り立つと見做せる. 従って,  $\pi = \pi_W \oplus \pi_{W'}$  である. ■

表現が完全可約であるとき, 表現を直和分解する操作は, 分解して現れる部分表現が既約になるまで続けることができる.

**定理 2.14**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. もし,  $\pi$  が完全可約であるならば,  $V$  の既約な  $G$  不変部分空間  $V_1, \dots, V_r$  が存在し,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  と分解することができる. ここに現れる各  $V_j (1 \leq j \leq r)$  を  $V$  の既約成分, 直和分解  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  を  $V$  の既約分解と呼ぶ.

証明. まず,  $V$  の任意の  $\{0\}$  でない  $G$  不変部分空間  $W$  について,  $\pi$  の  $W$  への制限  $\pi_W$  も完全可約であることを示す. いま,  $W_1 \subset W$  を  $W$  の  $G$  不変部分空間とする. 即ち, 任意の  $x \in G$  および  $w \in W_1$  について,  $\pi_W(x)(w) \in W_1$  である  $W$  の部分 vector 空間とする. すると,  $W_1 \subset W \subset V$  であり, かつ任意の  $x \in G$  および  $w \in W_1$  について,  $w \in W_1 \subset W$  であるから,  $\pi(x)(w) \in W$  であり, さらに,  $\pi(x)(w) = \pi_W(x)(w) \in W_1$  となる. よって,  $W_1 \subset V$  は  $V$  の  $G$  不変部分空間である. ところで,  $\pi$  は完全可約であるから,  $V$  の  $G$  不変部分空間  $W' \subset V$  が存在して,  $V = W_1 \oplus W'$  が成り立つ. そこで,  $W'_1 = W \cap W' \subset W$  とおく. すると,  $W'_1 \subset W$  は  $W$  の部分 vector 空間である. さらに,  $w' \in W'_1 = W \cap W'$  について,  $w' \in W$  かつ  $w' \in W'$  であるから, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x)(w') \in W$  かつ  $\pi(x)(w') \in W'$  が成り立つ. ゆえに,  $\pi(x)(w') \in W \cap W' = W'_1$  となり,  $W'_1 \subset W$  は  $V$  の  $G$  不変部分空間になる. そして,  $\pi_W(x)(w') = \pi(x)(w') \in W'_1$  となる. 従って,  $W'_1 \subset W$  は  $W$  の  $G$  不変部分空間である. さらに,  $W_1 \cap W'_1 \subset W_1 \cap W' = \{0\}$  が成り立つ. そして, 任意の  $w \in W$  について,  $w \in W \subset V$  であるから,  $V = W_1 \oplus W'$  より,  $w_1 \in W_1$ ,  $w' \in W'$  が存在して,  $w = w_1 + w'$  と表される. このとき,  $w_1 \in W_1 \subset W$  であるから,  $w' = w - w_1 \in W$  となり,  $w' \in W' \cap W = W'_1$  が得られる. ゆえに,  $w = w_1 + w' \in W_1 + W'_1$  となり,  $W = W_1 + W'_1$  が成り立つことが分かる. 従って,  $W = W_1 \oplus W'_1$  となり,  $\pi_W$  は完全可約である.

ここで, 定理の主張を表現空間  $V$  の次元に関する帰納法により示す.  $\dim V = 1$  のときは,  $\pi$  は既約であるから,  $r = 1$ ,  $V_1 = V$  とすれば主張が得られる. そこで,  $\dim V = n > 1$  とし,  $n - 1$  まで主張が成り立つと仮定する. もし,  $\pi$  が既約であれば,  $r = 1$ ,  $V_1 = V$  とすればよい. そこで,  $\pi$  が可約であるとする. すると,  $\{0\}$  でも  $V$  でもない  $V$  の  $G$  不変部分空間  $W \subset V$  が存在する. すると,  $\pi$  は完全可約であるから,  $V$  の  $G$  不変部分空間  $W' \subset V$  で,  $V = W \oplus W'$  となるものが存在する. このとき,  $\dim W \neq 0, n$  であるから,  $\dim W' = n - \dim W \neq n, 0$ . よって,  $0 < \dim W, \dim W' < n$  となる. すると, 前半の議論により,  $\pi$  の  $W, W'$  上への制限  $\pi_W, \pi_{W'}$  はいずれも完全可約になる. このとき, 帰納法の仮定により,  $W$  の既約な  $G$  不変部分空間  $W_1, \dots, W_{r_1}$ ,  $W'$  の既約な  $G$  不変部分空間  $W'_1, \dots, W'_{r_2}$  が存在して,  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_{r_1}$ ,  $W' = W'_1 \oplus \dots \oplus W'_{r_2}$  が成り立つ. すると,  $W_1, \dots, W_{r_1}, W'_1, \dots, W'_{r_2} \subset V$  は  $V$  の既約な  $G$  不変部分空間である. そこで,  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_{r_1} \oplus W'_1 \oplus \dots \oplus W'_{r_2}$  を示す. いま,  $v \in V$  を任意のとる. すると,  $V = W \oplus W'$  であるから,  $w \in W$ ,  $w' \in W'$  で  $v = w + w'$  となるものが存在する. このとき,  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_{r_1}$ ,  $W' = W'_1 \oplus \dots \oplus W'_{r_2}$  であるから,  $w_j \in W_j$  ( $1 \leq j \leq r_1$ ),  $w'_k \in W'_k$  ( $1 \leq k \leq r_2$ ) が存在して, 次が得られる.

$$w = w_1 + \dots + w_{r_1}, \quad w' = w'_1 + \dots + w'_{r_2}.$$

よって、次が成り立つ。

$$v = w + w' = (w_1 + \cdots + w_{r_1}) + (w'_1 + \cdots + w'_{r_2}) \in W_1 + \cdots + W_{r_1} + W'_1 + \cdots + W'_{r_2}$$

ゆえに、 $V = W_1 + \cdots + W_{r_1} + W'_1 + \cdots + W'_{r_2}$  が得られる。次に、 $w_j \in W_j$  ( $1 \leq j \leq r_1$ ),  $w'_k \in W'_k$  ( $1 \leq k \leq r_2$ ) が存在して、次が成り立つとする。

$$w_1 + \cdots + w_{r_1} + w'_1 + \cdots + w'_{r_2} = 0.$$

すると、 $W_j \subset W$  ( $1 \leq j \leq r_1$ ),  $W'_k \subset W'$  ( $1 \leq k \leq r_2$ ) より、次が得られる。

$$w = w_1 + \cdots + w_{r_1} \in W, \quad w' = w'_1 + \cdots + w'_{r_2} \in W'.$$

ところで、 $V = W \oplus W'$  であり、 $w \in W$ ,  $w' \in W'$ , かつ  $w + w' = 0 \in V$  であるから、 $w = w' = 0$  となる。すると、 $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{r_1}$ ,  $w_j \in W_j$  ( $1 \leq j \leq r_1$ ), かつ  $0 = w = w_1 + \cdots + w_{r_1}$  であるから、 $w_1 = \cdots = w_{r_1} = 0$  が得られる。同様にして、 $w'_1 = \cdots = w'_{r_2} = 0$  が成り立つ。以上により、 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{r_1} \oplus W'_1 \oplus \cdots \oplus W'_{r_2}$  が得られる。■

実は、有限群の ( $\mathbb{C}$  上の) 有限次元線形表現は、常に完全可約である。

**定理 2.15**  $G$  を有限群、 $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし、 $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする。このとき、 $\pi$  は完全可約である (Maschke の定理)。

証明.  $\pi$  が既約であれば、 $\pi$  は完全可約であるから、主張は示されている。そこで、 $\pi$  は可約であるとし、 $W \subset V$  を  $\{0\}$  でも  $V$  自身でもない  $V$  の  $G$  不変部分空間とする。このとき、 $V$  の  $G$  不変部分空間  $W'_0 \subset V$  で、 $V = W \oplus W'_0$  となるものが存在することを示せばよい。いま、 $W' \subset V$  を  $V$  の ( $G$  不変とは限らない) 部分 vector 空間で、 $V = W \oplus W'$  なるものとする。そして、 $T : V \rightarrow W$  を  $V$  のこの直和分解に関する  $V$  から  $W$  への射影とする。このとき、任意の  $x \in G$  および  $v \in V$  について、 $(T\pi(x^{-1}))(v) = T(\pi(x^{-1})(v)) \in W$  であり、 $W$  は  $G$  不変であるから、 $(\pi(x)T\pi(x^{-1}))(v) = \pi(x)(T\pi(x^{-1})(v)) \in W$  である。そこで、 $T_0 : V \rightarrow W$  を以下のように定める。

$$T_0(v) = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} (\pi(x)T\pi(x^{-1}))(v), \quad v \in V. \quad (2.20)$$

すると、確かに  $T_0(v) \in W$  である。さらに、任意の  $x \in G$  および  $w \in W$  について、 $W$  は  $G$  不変であるから、 $\pi(x^{-1})(w) \in W$  であり、 $T$  は  $V$  から  $W$  への射影であるから、 $(T\pi(x^{-1}))(w) = T(\pi(x^{-1})(w)) = \pi(x^{-1})(w) \in W$  となる。よって、次が得られる。

$$\begin{aligned} (\pi(x)T\pi(x^{-1}))(w) &= \pi(x)(T\pi(x^{-1})(w)) = \pi(x)(\pi(x^{-1})(w)) \\ &= (\pi(x)\pi(x^{-1}))(w) = \text{Id}_V(w) = w. \end{aligned}$$

ゆえに、任意の  $w \in W$  について、次が成り立つ。

$$T_0(w) = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} (\pi(x)T\pi(x^{-1}))(w) = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} w = \frac{1}{\#G} \cdot (\#G)w = w.$$

特に、 $\text{Im } T_0 = W$  となる。そこで、 $W \subset V$  であることより、 $T_0 : V \rightarrow V$  と考えて、 $V$  の部分 vector 空間  $W'_0 \subset V$  を次のように与える。

$$W'_0 = \text{Im}(\text{Id}_V - T_0) = \{(\text{Id}_V - T_0)(v) = v - T_0(v) \in V; v \in V\}. \quad (2.21)$$

ここで、 $W'_0 \subset V$  が  $G$  不変であることを示す。任意の  $x \in G$ 、 $v \in V$  について、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (T_0\pi(x))(v) &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} (\pi(y)T\pi(y^{-1}))(\pi(x)(w)) = \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} (\pi(y)T)(\pi(y^{-1}x)(w)) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} (\pi(xy)T)(\pi((xy)^{-1}x)(w)) = \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} (\pi(x)\pi(y)T)(\pi(y^{-1})(w)) \\ &= \pi(x) \left( \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} (\pi(y)T\pi(y^{-1}))(w) \right) = \pi(x)(T_0(w)). \end{aligned}$$

ゆえに、任意の  $x \in G$ 、 $v \in V$  について、次が得られる。

$$\begin{aligned} \pi(x)((\text{Id}_V - T_0)(v)) &= \pi(x)(v - T_0(v)) = \pi(x)(v) - \pi(x)(T_0(v)) \\ &= \pi(x)(v) - T_0(\pi(x)(v)) = (\text{Id}_V - T_0)(\pi(x)(v)) \in W'_0. \end{aligned}$$

よって、 $W'_0 \subset V$  は  $G$  不変である。さらに、任意の  $v \in V$  について、次が成り立つ。

$$v = T_0(v) + (v - T_0(v)) \in W + W'_0.$$

ゆえに、 $V = W + W'_0$  が得られる。また、任意の  $v \in V$  について、 $T_0(v) \in W$  より、 $T_0^2(v) = T_0(T_0(v)) = T_0(v)$  となる。よって、 $w \in W \cap W'_0$  とすると、 $w \in W$  より  $T_0(w) = w$  となり、さらに、 $v \in V$  が存在して  $w = v - T_0(v)$  と表されるから、次が得られる。

$$w = T_0(w) = T_0(v - T_0(v)) = T_0(v) - T_0(T_0(v)) = T_0(v) - T_0(v) = 0.$$

従って、 $W \cap W'_0 = \{0\}$  となる。以上により、 $V = W \oplus W'_0$  が成り立ち、 $\pi$  が完全可約であることが分かる。■

この定理の証明の本質は、 $V$  から  $W$  へのある射影を“平均化”して、新しい射影を作ることにある。後で、この定理の内積を用いた別証明を与える。



注意 2.16 Maschke の定理において,  $G$  が有限群であるということは重要である. 実際, 無限群の表現では Maschke の定理は一般に成り立たない. このことを, 次の反例により説明する.  $G = \mathbb{Z}$  を, 整数全体のなす集合を通常の加法を群の乗法として群と考えたものとする. すると,  $G$  は無限群である. いま,  $V = \mathbb{C}^2$  とし,  $\pi : G \rightarrow GL(2, \mathbb{C})$  を次で与えられるものとする.

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

すると, 任意の  $x \in G = \mathbb{Z}$  について, 確かに  $\pi(x) \in GL(2, \mathbb{C})$  である. そして, 任意の  $x, y \in G = \mathbb{Z}$  について,  $G$  における群の演算としての乗法は通常の加法であるから, 次が成り立つ.

$$\pi(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pi(x)\pi(y).$$

さらに,  $G$  の群の乗法に関する単位元は,  $0 \in G = \mathbb{Z}$  であるから, 次が得られる.

$$\pi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

従って,  $\pi$  は  $G = \mathbb{Z}$  の 2 次元表現である. ここで,  $W = \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2; v_1 \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^2$

とする. すると, 任意の  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\pi(x)(v) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = v \in W.$$

ゆえに,  $W \subset V = \mathbb{C}^2$  は  $V$  の  $G$  不変な 1 次元部分 vector 空間である. また,  $W' \subset V = \mathbb{C}^2$  を  $V$  の  $G$  不変な 1 次元部分 vector 空間とし,  $v_2 \neq 0$  なる元  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in W'$  が存在するとする. ここで, 必要ならば  $v$  を  $v_2$  でわることにより, 初めから  $v_2 = 1$  としてよい. このとき,  $x \in \mathbb{Z}$  を 0 でない整数とすると, 次が得られる.

$$\pi(x)(v) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$x \neq 0$  より,  $v_1 \neq v_1 + x$  であるから,  $v, \pi(x)(v) \in \mathbb{C}^2$  は線形独立である. そして,  $W' \subset V$  は  $G$  不変であるから,  $\pi(x)(v) \in W'$  である. これは,  $\dim W' = 1$  であることに反する. よって,  $W'$  の任意の元  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in W'$  について,  $v_2 = 0$  でなければならず,  $W' = W$  とな

る. よって,  $V = W \oplus W'$  が成り立つような  $V$  の  $G$  不変部分空間  $W'$  は存在しない. 従って,  $\pi$  は完全可約ではない.

なお,  $G = \mathbb{Z}$  は無限群であるから,  $\pi(x)$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ) をすべてたし合わせて,  $\mathbb{Z}$  の位数で “わる” という操作はできないのである.

群の表現を分類するとき, それらがいつ本質的に同じものと見做されるかを正確に定式化する必要がある. そのために, まず, 群の作用と整合する線形写像を定義する.

**定義 2.17**  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の表現とする. いま,  $T : V \rightarrow W$  を線形写像とする. このとき,  $T$  が  $G$  線形写像, あるいは絡作用素 (intertwining operator) であるとは, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つことである.

$$T\pi(x) = \rho(x)T. \quad (2.23)$$

$G$  線形写像を用いて, 2 つの表現が本質的に同じであることを定式化することができる.

**定義 2.18**  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の表現とする. このとき,  $\pi$  と  $\rho$  が同値であるとは,  $G$  線形同型写像, 即ち, 線形同型写像である  $G$  線形写像  $T : V \rightarrow W$  が存在することである.  $\pi$  と  $\rho$  が同値であるとき,  $\pi \simeq \rho$  と表すことにする. なお,  $\pi \simeq \rho$  ならば,  $\dim \pi = \dim \rho$  が成り立つ.

**例 2.19** 1.1 小節で扱われた例を思い出す.  $G = S_3$  を 3 次対称群とし,  $V, W$  を次で与えられる  $\mathbb{C}$  上の 2 次元 vector 空間とする.

$$V = \{f = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\},$$

$$W = \{a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}, a_1 + a_2 + a_3 = 0\}.$$

$S_3$  の元は  $\{1, 2, 3\}$  上の置換全体のなす群であると考え, 任意の  $\sigma \in S_3$  に対して,  $\pi(\sigma) : V \rightarrow V$ ,  $\rho(\sigma) : W \rightarrow W$  を次で与える.

$$\begin{aligned} \pi(\sigma)(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) &= a_1x_{\sigma(1)} + a_2x_{\sigma(2)} + a_3x_{\sigma(3)} \\ &= a_{\sigma^{-1}(1)}x_1 + a_{\sigma^{-1}(2)}x_2 + a_{\sigma^{-1}(3)}x_3, \\ \rho(\sigma)(a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2) &= a_1x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)} + a_2x_{\sigma(3)}x_{\sigma(1)} + a_3x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \\ &= a_{\sigma^{-1}(1)}x_2x_3 + a_{\sigma^{-1}(2)}x_3x_1 + a_{\sigma^{-1}(3)}x_1x_2. \end{aligned}$$

すると,  $\pi, \rho$  はそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の表現である. さらに,  $T : V \rightarrow W$  を次で定義する.

$$\begin{aligned} T(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) &= -a_1x_2x_3 - a_2x_3x_1 - a_3x_1x_2 \\ &= -a_1\frac{s_3}{x_1} - a_2\frac{s_3}{x_2} - a_3\frac{s_3}{x_3}. \end{aligned}$$

ここで,  $s_1 = x_1x_2x_3$  は  $x_1, x_2, x_3$  の 3 次基本対称式である. すると,  $T$  は  $G$  線形同型写像であることがわかる. 従って,  $\pi \simeq \rho$  である.

例 2.20  $G$  を有限群,  $S$  を空でない有限集合とし,  $(x, s) \rightarrow x \cdot s$  ( $x \in G, s \in S$ ) を  $G$  の  $S$  への作用とする. このとき, 例 2.5, および例 2.7 で扱われた表現について, それらが自然に同一視されることを,  $G$  線形写像を用いて説明する. それぞれ表現空間は次のものである.

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \sum_{s \in S} a_s v_s ; a_s \in \mathbb{C}, s \in S \right\}, \\ W &= \{ f : S \rightarrow \mathbb{C} \}. \end{aligned}$$

そして,  $\pi : G \rightarrow GL(V), \rho : G \rightarrow GL(W)$  は, 次で与えられる表現である.

$$\begin{aligned} \pi(x) \left( \sum_{s \in S} a_s v_s \right) &= \sum_{s \in S} a_s v_{x \cdot s}, \\ (\rho(x)f)(s) &= f(x^{-1} \cdot s), \quad s \in S. \end{aligned}$$

ここで,  $x \in G, \sum_{s \in S} a_s v_s \in V, f \in W$  である. そこで, 線形写像  $T : W \rightarrow V$  を以下で定義する.

$$T(f) = \sum_{s \in S} f(s) v_s, f \in W.$$

すると,  $T$  は線形同型になる. さらに, 任意の  $x \in G, f \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} T(\rho(x)(f)) &= \sum_{s \in S} (\rho(x)(f))(s) v_s = \sum_{s \in S} f(x^{-1} \cdot s) v_s \\ &= \sum_{s \in S} f(s) v_{x \cdot s} = \pi(x) \left( \sum_{s \in S} f(s) v_s \right) = \pi(x)(T(f)). \end{aligned}$$

従って,  $T : W \rightarrow V$  は  $G$  線形同型写像である.

問 2.21  $G$  を有限群,  $V, W, U$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V), \rho : G \rightarrow GL(W), \tau : G \rightarrow GL(U)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W, U$  上の表現とする.

- (1)  $\text{Id}_V : V \rightarrow V$  は  $G$  線形同型写像であることを示せ. このことにより,  $\pi \simeq \pi$  である.
- (2)  $T : V \rightarrow W$  を  $G$  線形同型写像とすると,  $T^{-1} : W \rightarrow V$  も  $G$  線形同型写像であることを示せ. このことにより,  $\pi \simeq \rho$  ならば,  $\rho \simeq \pi$  である.
- (3)  $T : V \rightarrow W, S : W \rightarrow U$  をともに  $G$  線形同型写像とする. このとき,  $S \circ T : V \rightarrow U$  も  $G$  線形同型写像であることを示せ. このことにより,  $\pi \simeq \rho$ , かつ  $\rho \simeq \tau$  ならば,  $\pi \simeq \tau$  である.

群  $G$  の表現によっては,  $GL(V)$  の代わりに性質のよい部分群を考え,  $G$  からその部分群への準同型写像と考えることにより, よりよい性質をもつことがある.

**定義 2.22**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間で,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積とし,  $U(V)$  をこの内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に関する unitary 群とする. このとき, 準同型写像  $\pi : G \rightarrow U(V)$  を  $G$  の  $V$  上の unitary 表現と呼ぶ.

実は, 有限群のすべての有限次元線形表現は, 常に unitary 表現と同値である.

**定理 2.23**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. このとき,  $V$  上の (複素) 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が存在して, この内積に関する unitary 群を  $U(V)$  とするとき, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x) \in U(V)$  となる.

証明.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  を  $V$  上の任意の複素内積とする. このとき,  $v, v' \in V$  に対して,  $\langle v, v' \rangle \in \mathbb{C}$  を次で定義する.

$$\langle v, v' \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), \pi(x)(v') \rangle_0. \quad (2.24)$$

この  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  が  $V$  上の複素内積であることを示す. まず, 任意の  $v \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\langle v, v \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), \pi(x)(v) \rangle_0 \geq 0.$$

また,  $\langle v, v \rangle = 0$  とすると, 任意の  $x \in G$  について,  $\langle \pi(x)(v), \pi(x)(v) \rangle_0 \geq 0$  であるから,  $\langle \pi(x)(v), \pi(x)(v) \rangle_0 = 0$  ( $x \in G$ ) が得られる. 特に,  $0 = \langle (1_G)(v), \pi(1_G)(v) \rangle_0 = \langle v, v \rangle_0$  であるから,  $v = 0$  となる. 次に,  $v, v', w \in V, c \in \mathbb{C}$  について, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \langle v + w, v' \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v + w), \pi(x)(v') \rangle_0 \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v) + \pi(x)(w), \pi(x)(v') \rangle_0 \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), \pi(x)(v') \rangle_0 + \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(w), \pi(x)(v') \rangle_0 \\ &= \langle v, v' \rangle + \langle w, v' \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle cv, v' \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(cv), \pi(x)(v') \rangle_0 = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle c(\pi(x)(v)), \pi(x)(v') \rangle \\ &= c \left( \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), \pi(x)(v') \rangle_0 \right) = c \langle v, v' \rangle.\end{aligned}$$

さらに,  $v, v' \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\langle v, v' \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), \pi(x)(v') \rangle_0 = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \overline{\langle \pi(x)(v'), \pi(x)(v) \rangle_0} \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v'), \pi(x)(v) \rangle_0 = \overline{\langle v', v \rangle}.\end{aligned}$$

従って,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $V$  上の複素内積である.

ここで, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x) \in U(V)$  であることを示す. いま,  $v, v' \in V$  とする. このとき, 次が得られる.

$$\begin{aligned}\langle \pi(x)(v), \pi(x)(v') \rangle &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle \pi(y)(\pi(x)(v)), \pi(y)(\pi(x)(v')) \rangle_0 \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle \pi(yx)(v), \pi(yx)(v') \rangle_0 \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle \pi(y)(v), \pi(y)(v') \rangle_0 = \langle v, v' \rangle.\end{aligned}$$

従って,  $\pi(x) \in U(V)$  であることが分かる. ■

この定理は, 有限群  $G$  の任意の有限次元線形表現について, 表現空間の基底をうまくとることにより, 任意の  $x \in G$  について, 表現行列が unitary 行列となるようにすることができることを主張している. このことにより, 任意の正整数  $n$  について,  $G$  の任意の  $n$  次元表現が  $n$  次元 unitary 表現と同値であることが分かる.

系 2.24  $G$  を有限群,  $n$  を正整数とし,  $\pi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$  を  $G$  の  $n$  次元表現とする. このとき, 複素  $n$  次正則行列  $P$  が存在して, 任意の  $x \in G$  について,  $\rho(x) = P^{-1}\pi(x)P$  が unitary 行列であるようにすることができる. 特に,  $\rho : G \rightarrow U(n)$  は  $G$  の  $n$  次元 unitary 表現であり,  $\pi \simeq \rho$  である.

証明.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  を  $\mathbb{C}^n$  上の標準内積とする. そして,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を (2.24) によって定義される  $\mathbb{C}^n$  上の複素内積とする. すると, 任意の  $x \in G$  および  $v, v' \in \mathbb{C}^n$  について, 次が成り立つ.

$$\langle \pi(x)(v), \pi(x)(v') \rangle = \langle v, v' \rangle.$$

ここで,  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{C}^n$  を  $\mathbb{C}$  の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に関する正規直交基底とし,  $P = (p_1, \dots, p_n) \in M(n, \mathbb{C})$  とする. すると,  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{C}^n$  は  $\mathbb{C}^n$  の基底であるから,  $P$  は正則行列である.

そこで,  $\pi(x)(\mathbf{p}_k) = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{j,k}(x)\mathbf{p}_j$  とすると,  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{C}^n$  は内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に関する  $\mathbb{C}^n$  の正規直交基底であるから, 定理 1.122 (1) の証明より,  $\pi(x)$  の  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\}$  に関する表現行列  $A_\pi(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$  は unitary 行列である. さらに,  $\pi(x)P = PA_\pi(x)$  である. よって,  $\rho(x) = P^{-1}\pi(x)P = A_\pi(x) \in U(n)$  となる. そして,  $x, y \in G$  について, 次が成り立つ.

$$\rho(xy) = P^{-1}\pi(xy)P = P^{-1}\pi(x)\pi(y)P = (P^{-1}\pi(x)P)(P^{-1}\pi(y)P) = \rho(x)\rho(y).$$

従って,  $\rho : G \rightarrow U(n)$  は  $G$  の  $n$  次元 unitary 表現である. さらに,  $P^{-1}\pi(x)P = \rho(x)$  ( $x \in G$ ) より,  $\pi(x)P = P\rho(x)$  がすべての  $x \in G$  について成り立つ. ■

定理 2.23 を用いると, Maschke の定理の別証が得られる

定理 2.15 (Maschke の定理) の別証.  $V$  上の複素内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  をうまく選ぶことにより, 初めから  $\pi$  は unitary 表現であると仮定してよい.  $\pi$  が既約ならば完全可約であるから,  $\pi$  は可約であるとし,  $W \subset V$  を  $V$  の  $\{0\}$  でも  $V$  自身でもない  $G$  不変部分空間とする. このとき,  $W$  の内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  に関する直交補空間を  $W^\perp \subset V$  とする. すると,  $V = W \oplus W^\perp$  である. そこで,  $W^\perp \subset V$  が  $V$  の  $G$  不変部分空間であることを示す. いま,  $v \in W^\perp$  とする. このとき, 任意の  $w \in W$  について,  $W \subset V$  が  $V$  の  $G$  不変部分空間であることより, 任意の  $y \in G$  に対して  $\pi(y)w \in W$  となるから, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \langle \pi(x)(v), w \rangle &= \langle \pi(x)(v), \text{Id}_V(w) \rangle = \langle \pi(x)(v), (\pi(x)\pi(x^{-1}))(w) \rangle \\ &= \langle \pi(x)(v), \pi(x)(\pi(x^{-1})(w)) \rangle = \langle v, \pi(x^{-1})(w) \rangle = 0. \end{aligned}$$

ゆえに,  $\pi(x)(v) \in W^\perp$  となる. 従って,  $W^\perp \subset V$  は  $V$  の  $G$  不変部分空間である. ■

ここからは, 群の表現から新しい表現を構成する方法を挙げる.

**定理 2.25**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $\pi$  が可約であるとし,  $W \subset V$  を  $V$  の  $\{0\}$  でも  $V$  自身でもない  $G$  不変部分空間とする. このとき, 任意の  $x \in G$  に対して, 次で与えられる線形写像  $\pi_{V/W}(x) : V/W \rightarrow V/W$  が定義される.

$$\pi_{V/W}(x)([v]) = [\pi(x)(v)], \quad v \in V. \quad (2.25)$$

そして,  $\pi_{V/W}(x) \in GL(V/W)$  であり,  $\pi_{V/W} : G \rightarrow GL(V/W)$  は  $G$  の商 vector 空間  $V/W$  上の表現になる. この  $\pi_{V/W}$  を  $\pi$  の商表現と呼ぶ.

証明.  $x \in G$  を  $G$  の任意の元とする. すると,  $W$  は  $G$  不変であるから,  $\pi(x)(W) \subset W$  である. よって, 補足資料 1.2, 系 1.21 より, (2.25) で与えられる写像は well-defined であり, 線形写像である. さらに, 任意の  $x, y \in G, v \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\pi_{V/W}(xy)([v]) &= [\pi(xy)(v)] = [\pi(x)(\pi(y)(v))] \\ &= \pi_{V/W}(x)([\pi(y)(v)]) = \pi_{V/W}(x)(\pi_{V/W}(y)([v])).\end{aligned}$$

ゆえに,  $\pi_{V/W}(xy) = \pi_{V/W}(x)\pi_{V/W}(y)$  となる. また, 任意の  $v \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\pi_{V/W}(1_G)([v]) = [\pi(1_G)(v)] = [\text{Id}_V(v)] = [v].$$

よって,  $\pi_{V/W}(1_G) = \text{Id}_{V/W}$  が得られる. 従って, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi_{V/W}(x) \in GL(V/W)$  であり,  $\pi_{V/W}$  は  $G$  の  $V/W$  上の表現である. ■

有限群  $G$  の有限次元 vector 空間  $V$  上の表現  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  は完全可約である. よって,  $\{0\}$  でも  $V$  自身でもない  $V$  の  $G$  不変部分空間  $W$  に対して,  $G$  不変な補空間  $W'$  が存在するが, この  $W'$  はただ 1 つとは限らない. ところが,  $\pi$  の商表現  $\pi_{V/W}$  は  $W$  からただ 1 つ定められる. この商表現  $\pi_{V/W}$  を用いると,  $W$  の  $G$  不変な補空間  $W', W'' \subset V$  について,  $\pi$  の  $W', W''$  への制限  $\pi_{W'}, \pi_{W''}$  は同値になることが分かる.

**定理 2.26**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間であり,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $\pi$  は可約であるとし,  $W \subset V$  を  $\{0\}$  でも  $V$  自身でもない  $V$  の  $G$  不変部分空間とする. このとき,  $W$  の任意の  $G$  不変な補空間  $W'$  について,  $\pi$  の商表現  $\pi_{V/W}$  と  $\pi$  の  $W'$  への制限  $\pi_{W'}$  は同値である.

証明. 線形写像  $T : W' \rightarrow V/W$  を次のように定める.

$$T(v) = [v], \quad v \in W' \subset V. \tag{2.26}$$

まず, これが線形同型写像であることを示す.  $T$  は埋め込み  $\iota : W' \rightarrow V$  と自然な射影  $p : V \rightarrow V/W$  の合成であるから, 線形写像である. ここで,  $T$  が単射であることを示す.  $v \in W'$  を  $T(v) = [0] \in V/W$  なる元とする. すると,  $T(v) = [v]$  より,  $v \in W$  となる. ところが,  $W'$  は  $V$  における  $W$  の補空間であるから,  $v \in W' \cap W = \{0\}$  となる. よって,  $w = 0$  であり,  $T$  は単射であることが分かる. 次に,  $T$  が全射であることを示す. 任意の  $\alpha \in V/W$  について, 商 vector 空間の定義より,  $v \in V$  が存在して,  $\alpha = [v]$  と表される. このとき,  $V = W \oplus W'$  より,  $w \in W, w' \in W'$  が存在して,  $v = w + w'$  と表される. すると,  $w \in W$  より  $[w] = [0] \in V/W$  であるから, 次が得られる.

$$[v] = [w + w'] = [w] + [w'] = [0] + [w'] = [w'] = T(w').$$

よって,  $T$  は全射である.

このことにより,  $T$  が  $G$  線形写像であることを示せば主張が得られる. いま,  $x \in G$ ,  $v \in W'$  を任意にとる. すると, 次が得られる.

$$T(\pi_{W'}(x)(v)) = T(\pi(x)(v)) = [\pi(x)(v)] = \pi_{V/W}(x)([v]) = \pi_{V/W}(T(v)).$$

従って,  $T$  は  $G$  線形同型写像である. ■

次に, 表現空間の双対空間を表現空間としてもつ表現を構成する.

**定理 2.27**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. また,  $V^*$  を  $V$  の双対空間とする. このとき, 任意の  $x \in G$  に対して,  $\pi^\vee(x) : V^* \rightarrow V^*$  を次で与えられるものとする.

$$\pi^\vee(x)(f) = f \circ \pi(x^{-1}), \quad f \in V^*. \quad (2.27)$$

このとき,  $\pi^\vee(x) \in GL(V^*)$  であり,  $\pi^\vee : G \rightarrow GL(V^*)$  は  $G$  の  $V^*$  上の表現である. この  $\pi^\vee$  を  $\pi$  の反傾表現, あるいは, 双対表現と呼ぶ.

証明.  $x \in G$  について,  $\pi^\vee(x) = {}^t\pi(x^{-1})$  であるから, 補足資料 1.1, 定理 1.3 より  $\pi^\vee(x) : V^* \rightarrow V^*$  は線形写像である. また, 任意の  $x, y \in G$ ,  $f \in V^*$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \pi^\vee(xy)(f) &= f \circ \pi((xy)^{-1}) = f \circ \pi(y^{-1}x^{-1}) = f \circ (\pi(y^{-1}) \circ \pi(x^{-1})) \\ &= (f \circ \pi(y^{-1})) \circ \pi(x^{-1}) = \pi^\vee(x)(f \circ \pi(y^{-1})) = \pi^\vee(x)(\pi^\vee(y)(f)). \end{aligned}$$

よって,  $\pi^\vee(xy) = \pi^\vee(x)\pi^\vee(y)$  となる. さらに, 任意の  $f \in V^*$  について, 次が成り立つ.

$$\pi^\vee(1_G)(f) = f \circ \pi(1_G^{-1}) = f \circ \pi(1_G) = f \circ \text{Id}_V = f.$$

ゆえに,  $\pi^\vee(1_G) = \text{Id}_{V^*}$  となる. 従って,  $\pi^\vee(x) \in GL(V^*)$  であり,  $\pi^\vee : G \rightarrow GL(V^*)$  は  $G$  の  $V^*$  上の表現である. ■

**注意 2.28** 上の定理において,  $\pi^\vee$  の代わりに  ${}^t\pi : G \ni x \mapsto {}^t\pi(x) \in GL(V^*)$  をとるとすると, 一般にこれは表現にならない. 実際,  $x, y \in G$ ,  $f \in V^*$  について, 次が得られる.

$$\begin{aligned} {}^t\pi(xy)(f) &= f \circ \pi(xy) = f \circ (\pi(x) \circ \pi(y)) = (f \circ \pi(x)) \circ \pi(y) \\ &= {}^t\pi(y)(f \circ \pi(x)) = {}^t\pi(y)({}^t\pi(x)(f)). \end{aligned}$$

よって,  ${}^t\pi(xy) = {}^t\pi(y){}^t\pi(x)$  となる. ところが, 一般に  ${}^t\pi(y){}^t\pi(x) \neq {}^t\pi(x){}^t\pi(y)$  となるから,  ${}^t\pi$  は表現にならないのである. このようなことが起こるのは, 線形写像  $F$  と  $G$  の合成  $F \circ G$  が定義できるとき,  ${}^t(F \circ G) = {}^tG \circ {}^tF$  となることによる.



また, 表現空間の複素共役空間を表現空間としてもつ表現も構成することができる.

**定義 2.29**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $\bar{V}$  を  $V$  の複素共役空間 (補足資料 1.1, 定義 1.6) とする. このとき, 任意の  $x \in G$  について,  $\bar{\pi}(x) : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  を次で定義する.

$$\bar{\pi}(x)(\bar{v}) = \overline{\pi(x)(v)} = \overline{\pi(x)(v)}, \quad \bar{v} \in \bar{V}. \quad (2.28)$$

このとき,  $\bar{\pi}(x) \in GL(\bar{V})$  であり,  $\bar{\pi} : G \rightarrow GL(\bar{V})$  は  $G$  の  $\bar{V}$  上の表現である. この  $\bar{\pi}$  を  $\pi$  の複素共役表現と呼ぶことにする.

証明. 補足資料 1.1, 定理 1.8 より, 任意の  $x \in G$  について,  $\bar{\pi}(x) = \overline{\pi(x)} : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$  は線形写像である. また, 任意の  $x, y \in G, \bar{v} \in \bar{V}$  について, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(xy)(\bar{v}) &= \overline{\pi(xy)(v)} = \overline{\pi(xy)(v)} = \overline{\pi(x)(\pi(y)(v))} \\ &= \overline{\pi(x)(\overline{\pi(y)(v)})} = \bar{\pi}(x)(\bar{\pi}(y)(\bar{v})). \end{aligned}$$

よって,  $\bar{\pi}(xy) = \bar{\pi}(x)\bar{\pi}(y)$  が成り立つ. さらに, 任意の  $\bar{v} \in \bar{V}$  について, 次が成り立つ.

$$\bar{\pi}(1_G)(\bar{v}) = \overline{\pi(1_G)(v)} = \overline{\pi(1_G)(v)} = \overline{\text{Id}_V(v)} = \bar{v}.$$

ゆえに, 任意の  $x \in G$  について,  $\bar{\pi}(x) \in GL(\bar{V})$  であり,  $\bar{\pi} : G \rightarrow GL(\bar{V})$  は  $G$  の  $\bar{V}$  上の表現である. ■

特に, unitary 表現については, その反傾表現と複素共役表現は自然に同一視される.

**定理 2.30**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間で,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を  $V$  上の (複素) 内積,  $U(V)$  をこの内積に関する unitary 群とし,  $\pi : G \rightarrow U(V)$  を  $G$  の  $V$  上の unitary 表現とする. そして,  $V^*, \bar{V}$  をそれぞれ  $V$  の双対空間, 複素共役空間とし, 任意の  $v \in V$  について,  $f_v \in V^*$  を  $f_v(v') = \langle v', v \rangle$  なるものとする. このとき, 次の写像  $C : \bar{V} \rightarrow V^*$  を考える.

$$C(\bar{v}) = f_v, \quad \bar{v} \in \bar{V}. \quad (2.29)$$

このとき,  $C$  は線形同型であり, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つ.

$$C(\bar{\pi}(x)(\bar{v})) = \pi^\vee(x)(C(\bar{v})), \quad \bar{v} \in \bar{V}. \quad (2.30)$$

特に,  $\bar{\pi} \simeq \pi^\vee$  となる.

証明. 補足資料 1.1, 定理 1.11 より,  $C$  は線形同型写像である. さらに,  $x \in G, \bar{v} \in \bar{V}$ , および  $v' \in V$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} C(\overline{\pi(x)(\bar{v})})(v') &= C(\overline{\pi(x)(v)})(v') = f_{\pi(x)(v)}(v') = \langle v', \pi(x)(v) \rangle \\ &= \langle \pi(x)(\pi(x^{-1})(v')), \pi(x)(v) \rangle = \langle \pi(x^{-1})(v'), v \rangle \\ &= f_v(\pi(x^{-1})(v')) = C(\bar{v})(\pi(x^{-1})(v')) = \pi^\vee(x)(C(\bar{v}))(v'). \end{aligned}$$

よって,  $C(\overline{\pi(x)(\bar{v})}) = \pi^\vee(x)(C(\bar{v}))$  が成り立ち,  $\bar{\pi} \simeq \pi^\vee$  が得られる. ■

この定理は, 次のように説明することもできる.  $\dim V = n > 0$  とし,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の正規直交基底とする. すると,  $\pi$  は unitary 表現であるから, 任意の  $x \in G$  の  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列  $A_\pi(x)$  は unitary 行列である. また,  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset \bar{V}$  を  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に対応する  $\bar{V}$  の基底,  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset V^*$  を  $\{v_1, \dots, v_n\}$  の双対基底とする. すると,  $\bar{\pi}(x) = \overline{\pi(x)}$  の  $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  に関する表現行列は  $\overline{A_\pi(x)}$  であり,  $\pi^\vee(x) = {}^t\pi(x^{-1})$  の  $\{f_1, \dots, f_n\}$  に関する表現行列は  ${}^t(A_\pi(x^{-1})) = {}^t((A_\pi(x))^{-1})$  である. ところで,  $\pi$  は unitary 表現であるから,  $A_\pi(x)$  は unitary 行列であり,  $(A_\pi(x))^{-1} = (A_\pi(x))^* = {}^t\overline{A_\pi(x)}$  である. ゆえに,  $\pi^\vee(x)$  の  $\{f_1, \dots, f_n\}$  に関する表現行列は  ${}^t(\overline{A_\pi(x)}) = \overline{A_\pi(x)}$  である. よって,  $\bar{V}, V^*$  において固定された基底に関して,  $\bar{\pi}(x)$  と  $\pi^\vee(x)$  は同じ表現行列をもつ. 従って,  $\bar{\pi} \simeq \pi^\vee$  となる.

続いて,  $G$  の 2 つの表現から直和とは異なる表現を表現空間の tensor 積上に構成する.

**定理 2.31**  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の表現とする. いま,  $V \otimes W$  を  $V$  と  $W$  の tensor 積とする (補足資料 1.3, 定義 1.27). すると, 任意の  $x \in G$  に対して, 次で与えられる線形写像  $(\pi \otimes \rho)(x) : V \otimes W \rightarrow V \otimes W$  が定義される.

$$(\pi \otimes \rho)(x)(v \otimes w) = (\pi(x)(v)) \otimes (\rho(x)(w)), \quad v \in V, w \in W. \quad (2.31)$$

すると,  $(\pi \otimes \rho)(x) \in GL(V \otimes W)$  であり,  $\pi \otimes \rho : G \rightarrow GL(V \otimes W)$  は  $G$  の  $V \otimes W$  上の表現である. この  $\pi \otimes \rho$  を  $\pi$  と  $\rho$  の tensor 積表現と呼ぶことにする.

証明.  $x \in G$  について, 補足資料 1.3, 定理 1.33 (2) より,  $(\pi \otimes \rho)(x) = \pi(x) \otimes \rho(x)$  である. そして,  $x, y \in G$  について, 補足資料 1.3, 命題 1.34 (1) より, 次が得られる.

$$\begin{aligned} (\pi \otimes \rho)(xy) &= \pi(xy) \otimes \rho(xy) = (\pi(x)\pi(y)) \otimes (\rho(x)\rho(y)) \\ &= (\pi(x) \otimes \rho(x))(\pi(y) \otimes \rho(y)) = (\pi \otimes \rho)(x)(\pi \otimes \rho)(y). \end{aligned}$$

さらに, 補足資料 1.3, 命題 1.34 (2) より, 次のことが分かる.

$$(\pi \otimes \rho)(1_G) = \pi(1_G) \otimes \rho(1_G) = \text{Id}_V \otimes \text{Id}_W = \text{Id}_{V \otimes W}.$$

従って、任意の  $x \in G$  について、 $(\pi \otimes \rho)(x) \in GL(V \otimes W)$  であり、 $\pi \otimes \rho : G \rightarrow GL(V \otimes W)$  は  $G$  の  $V \otimes W$  上の表現である。■

tensor 積表現の特別なものとして、元の表現のうちの少なくとも一方が 1 次元表現である場合がある。

命題 2.32  $G$  を有限群、 $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし、 $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする。また、 $\chi : G \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^\times$  を  $G$  の 1 次元表現とする。このとき、任意の  $x \in G$  について、 $(\chi\pi)(x) : V \rightarrow V$  を次のものとする。

$$(\chi\pi)(x) = \chi(x)\pi(x). \quad (2.32)$$

すると、 $(\chi\pi)(x) \in GL(V)$  であり、 $\chi\pi : G \rightarrow GL(V)$  は  $G$  の  $V$  上の表現であって、 $\chi\pi \simeq \chi \otimes \pi$  である。さらに、 $\pi$  が既約ならば、 $\chi\pi$  も既約である。

証明. まず、任意の  $x \in G$  について、 $\pi(x) \in GL(V)$  であり、 $\chi(x) \neq 0$  であるから、 $(\chi\pi)(x) = \chi(x)\pi(x) \in GL(V)$  である。続いて、 $\chi\pi$  が  $G$  の  $V$  上の表現であることを、 $\chi\pi \simeq \chi \otimes \pi$  により示す。ここで、 $V$  と  $\mathbb{C} \otimes V$  を次のようにして同一視する。

$$\Phi : V \ni v \mapsto 1 \otimes v \in \mathbb{C} \otimes V.$$

このとき、任意の  $x \in G$ ,  $v \in V$  について、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Phi((\chi\pi)(x)(v)) &= \Phi(\chi(x)(\pi(x)(v))) = 1 \otimes (\chi(x)(\pi(x)(v))) \\ &= (\chi(x) \cdot 1) \otimes (\pi(x)(v)) = (\chi(x) \otimes \pi(x))(1 \otimes v) \\ &= (\chi \otimes \pi)(x)(1 \otimes v) = (\chi \otimes \pi)(x)(\Phi(v)). \end{aligned}$$

よって、 $\Phi(\chi\pi)(x) = (\chi \otimes \pi)(x)\Phi$  となり、 $\Phi$  は  $G$  線形写像である。さらに、 $\Phi$  は線形同型写像であるから、 $\Phi$  は  $G$  線形同型写像となり、 $\chi\pi \simeq \chi \otimes \pi$  である。特に、 $\chi\pi : G \rightarrow GL(V)$  は  $G$  の  $V$  上の表現である。

続いて、 $\pi$  が既約であるときに、 $\chi\pi$  が既約であることを示す。いま、 $W \subset V$  を表現  $\chi\pi$  に関して  $G$  不変な部分 vector 空間とする。すると、任意の  $x \in G$ ,  $w \in W$  について、次が成り立つ。

$$(\chi\pi)(x)(w) = \chi(x)(\pi(x)(w)) \in W.$$

よって、次が得られる。

$$\pi(x)(w) = \chi(x)^{-1}(\chi(x)(\pi(x)(w))) = \chi(x)((\chi\pi)(x)(w)) \in W.$$

ゆえに、 $W \subset V$  は表現  $\pi$  に関して  $G$  不変である。ここで、 $\pi$  は既約であるから、 $W = \{0\}$  または  $V$  である。よって、 $\chi\pi$  も既約である。■

一般に、表現  $\pi, \rho$  いずれも既約であっても、tensor 積表現  $\pi \otimes \rho$  は既約とは限らない。

( 余 白 )

## 2.2 Schur の補題.

ここで、群の既約表現の性質を調べるために重要な Schur の補題について述べる.

**補題 2.33**  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の表現,  $T : V \rightarrow W$  を  $G$  線形写像とする.

- (1)  $\text{Ker } T \subset V$  は  $V$  の  $G$  不変部分空間である.
- (2)  $\text{Im } T \subset W$  は  $W$  の  $G$  不変部分空間である.

証明. (1)  $v \in \text{Ker } T$ ,  $x \in G$  について、次が成り立つ.

$$T(\pi(x)(v)) = \rho(x)(T(v)) = \rho(x)(0) = 0.$$

ゆえに,  $\pi(x)(v) \in \text{Ker } T$  となり,  $\text{Ker } T \subset V$  が  $G$  不変であることが分かる.

- (2) 任意の  $w \in \text{Im } T \subset W$  は  $v \in V$  により  $w = T(v)$  とあらわされる. よって,  $x \in G$  について、次が得られる.

$$\rho(x)(w) = \rho(x)(T(v)) = T(\pi(x)(v)) \in \text{Im } T.$$

ゆえに,  $\text{Im } T \subset W$  は  $G$  不変部分空間である. ■

特に,  $\pi$  や  $\rho$  が既約のときは,  $T$  の性質も明らかになる.

**補題 2.34**  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の表現,  $T : V \rightarrow W$  を  $G$  線形写像とする.

- (1)  $\pi$  が既約で,  $T \neq 0$  であれば,  $T$  は単射である.
- (2)  $\rho$  が既約で,  $T \neq 0$  であれば,  $T$  は全射である.
- (3)  $\pi, \rho$  ともに既約で,  $T \neq 0$  であれば,  $T$  は  $G$  線形同型写像であり,  $\pi \simeq \rho$  が成り立つ.

証明. (1) 補題 2.33(1) より,  $\text{Ker } T \subset V$  は  $V$  の  $G$  不変部分空間である. ここで,  $\pi$  は既約であるから,  $\text{Ker } T = \{0\}$  または  $V$  である.  $\text{Ker } T = V$  であるということは,  $T = 0$  であることと意味するから,  $T \neq 0$  であれば,  $\text{Ker } T = \{0\}$  となり,  $T$  は単射である.

(2) 補題 2.33(2) より,  $\text{Im } T \subset W$  は  $W$  の  $G$  不変部分空間である. ここで,  $\rho$  が既約であるから,  $\text{Im } T = \{0\}$  または  $W$  である.  $\text{Im } T = \{0\}$  であるということは,  $T = 0$  であるということであるから,  $T \neq 0$  ならば,  $\text{Im } T = W$  であり,  $T$  は全射であることが分かる.

(3)  $\pi, \rho$  ともに既約であり,  $T \neq 0$  であるから, (1), (2) より,  $\text{Ker } T = \{0\}$  かつ  $\text{Im } T = W$  が成り立ち,  $T$  が全単射であることが分かる. 従って,  $T$  は  $G$  線形同型写像であり,  $\pi \simeq \rho$  が得られる. ■

ここで、有限群の既約表現の性質を調べるために最も重要である、Schur の補題を与える。「補題」と呼ばれているが、むしろ「定理」と呼ぶにふさわしい主張である.

定理 2.35 (Schur の補題).  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の既約表現とする. いま,  $T : V \rightarrow W$  を  $G$  線形写像とする.

- (1)  $\pi = \rho$  ならば, 複素数  $\lambda \in \mathbb{C}$  が存在して,  $T = \lambda \text{Id}_V$  と表される.
- (2)  $\pi \neq \rho$  ならば,  $T = 0$  である.

証明. (1)  $c \in \mathbb{C}$  を任意の複素数とする. すると, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つ.

$$(c\text{Id}_V)\pi(x) = c(\text{Id}_V\pi(x)) = c\pi(x) = c(\pi(x)\text{Id}_V) = \pi(x)(c\text{Id}_V).$$

よって, 次が得られる.

$$(T - c\text{Id}_V)\pi(x) = T\pi(x) - (c\text{Id}_V)\pi(x) = \pi(x)T - \pi(x)(c\text{Id}_V) = \pi(x)(T - c\text{Id}_V).$$

ゆえに,  $T - c\text{Id}_V$  も  $G$  線形写像である. ここで,  $\lambda \in \mathbb{C}$  を  $T$  の固有値とする. もし,  $T - \lambda\text{Id}_V \neq 0$  であれば, 補題 2.34 (1) より  $\text{Ker}(T - \lambda\text{Id}_V) = \{0\}$  である. これは,  $\lambda \in \mathbb{C}$  が  $T$  の固有値であることに反する. 従って,  $T - \lambda\text{Id}_V = 0$  であり,  $T = \lambda\text{Id}_V$  が得られる.

(2)  $T \neq 0$  とする. すると, 補題 2.34 (3) より,  $T$  は  $G$  線形同型写像となり,  $\pi \simeq \rho$  が成り立つが, これは仮定に反する. 従って,  $T = 0$  である. ■

注意 2.36 定理 2.35 では,  $\pi \simeq \rho$  かつ  $\pi \neq \rho$  である場合についてはっきりとは述べていない. この場合は, 次のように説明される.  $\pi \simeq \rho$  であるから,  $G$  線形同型写像  $S : V \rightarrow W$  が存在して, 任意の  $x \in G$  について,  $S\pi(x) = \rho(x)S$  が成り立つ. ここで,  $S$  は線形同型であるから, 任意の  $x \in G$  について, 次が得られる.

$$\pi(x)S^{-1} = S^{-1}S\pi(x)S^{-1} = S^{-1}\rho(x)SS^{-1} = S^{-1}\rho(x).$$

よって, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つ.

$$S^{-1}T\pi(x) = S^{-1}\rho(x)T = \pi(x)S^{-1}T. \quad (2.33)$$

従って, 定理 2.35 (1) より, 複素数  $\lambda \in \mathbb{C}$  が存在して,  $S^{-1}T = \lambda\text{Id}_V$  となる. よって,  $T = S(\lambda\text{Id}_V) = \lambda S$  が得られる. つまり,  $G$  線形同型写像  $S : V \rightarrow W$  を固定すれば, 任意の  $G$  線形同型写像  $T : V \rightarrow W$  は, ある複素数  $\lambda \in \mathbb{C}$  により,  $T = \lambda S$  と表される. なお, 任意の  $c \in \mathbb{C}$  について,  $cS : V \rightarrow W$  は  $G$  線形写像であり,  $c \neq 0$  であれば,  $G$  線形同型写像である.

この Schur の補題により, 有限 Abel 群  $G$  の既約表現はすべて 1 次元であることが分かる.

系 2.37  $G$  を有限 Abel 群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の既約表現とする. このとき,  $\dim V = 1$  である.

証明.  $x \in G$  を任意にとり固定する. すると,  $G$  が Abel 群であることより, 任意の  $y \in G$  について,  $xy = yx$  であるから, 次が得られる.

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy) = \pi(yx) = \pi(y)\pi(x).$$

よって,  $\pi(x) : V \rightarrow V$  は  $G$  線形写像である. ゆえに, Schur の補題より, 複素数  $\lambda_x \in \mathbb{C}$  が存在して,  $\pi(x) = \lambda_x \text{Id}_V$  と表される. ここで,  $W \subset V$  を  $\dim W = 1$  なる部分 vector 空間とする. すると, 任意の  $w \in W$  および  $x \in G$  について, 次が得られる.

$$\pi(x)(w) = (\lambda_x \text{Id}_V)(w) = \lambda_x (\text{Id}_V(w)) = \lambda_x w \in W.$$

よって,  $W \subset V$  は  $V$  の  $\{0\}$  でない  $G$  不変部分空間である. ところで,  $\pi$  は既約表現である. ゆえに,  $W = V$  でなければならない. 従って,  $\dim V = \dim W = 1$  である. ■

なお, Abel 群の基本定理より, 有限 Abel 群は, 巡回群の直積に分解される. この分解を用いると, 有限 Abel 群のすべての既約表現を記述することができる.

有限群の有限次元線形表現は, 完全可約であるから, 有限個の既約表現の直和に分解される. しかし, その分解は一通りではない. ところが, 直和分解に現れる既約部分表現のうち, ある既約表現に同値なもの個数は既約分解に依らずに決まる. そのことについて, 特別な場合として, ある既約表現に同値な表現たちの直和で表される表現の分解の様子を調べる.

補題 2.38  $G$  を有限群,  $\rho$  を  $V_\rho$  を表現空間としてもつ  $G$  の既約表現とする. そして,  $r$  を正整数,  $\pi_1, \dots, \pi_r$  をそれぞれ  $V_1, \dots, V_r$  を表現空間とする  $G$  の表現で, いずれも  $\rho$  と同値であるとする. いま,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ ,  $\pi = \pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_r$  とする.

(1)  $W \subset V$  を  $V$  の任意の既約な  $G$  不変部分空間とする. このとき,  $\pi$  の  $W$  上への制限  $\pi_W$  は  $\rho$  と同値である.

(2)  $W_1, \dots, W_s \subset V$  を  $V$  の既約な  $G$  不変部分空間で,  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$  と直和分解されるものとする. このとき,  $1 \leq k \leq s$  なる任意の整数  $k$  について,  $\pi$  の  $W_k$  上への制限は  $\rho$  と同値である. さらに,  $r = s$  が成り立つ.

証明.  $1 \leq j \leq r$  なる整数  $j$  に対して,  $p_j : V \rightarrow V_j$  を射影とする. そして,  $\iota : W \rightarrow V$  を埋め込みとする. すると, 任意の  $x \in G$ ,  $w \in W \subset V$  について,  $w = (w_1, \dots, w_r) \in V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  とすると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (p_j \iota \pi_W(x))(w) &= p_j(\pi(x)(w)) = p_j(\pi(x)(w_1, \dots, w_r)) \\ &= p_j(\pi_1(x)w_1, \dots, \pi_r(x)w_r) = \pi_j(x)(w_j) = \pi_j(x)(p_j \iota(w)). \end{aligned}$$

ゆえに,  $p_{j\iota} : W \rightarrow V_j$  は  $G$  線形写像である. ところで, 任意の  $w = (w_1, \dots, w_r) \in W \subset V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  について,  $(p_{j\iota}(w)) = p_j(w) = p_j(w_1, \dots, w_r) = w_j$  であるから,  $1 \leq j \leq r$  なるすべての整数  $j$  について  $p_{j\iota} = 0$  とすると,  $W = \{0\}$  となり, 仮定に反する. よって,  $p_{j\iota} \neq 0$  なる整数  $j$  が存在する. このとき, 補題 2.34 (3) より,  $p_{j\iota}$  は  $G$  線形同型写像となり,  $\pi_W \simeq \pi_j \simeq \rho$  が得られる.

(2)  $1 \leq k \leq s$  なる任意の整数  $k$  について,  $W_k \subset V$  は既約な  $G$  不変部分空間であるから, (1) より,  $\pi_{W_k} \simeq \rho$  が成り立つ. よって,  $\dim W_k = \dim \pi_{W_k} = \dim \rho = \dim V_\rho$  であり,  $\dim V = r \dim V_\rho = s \dim V_\rho$  が成り立つから,  $r = s$  が得られる. ■

有限群の表現の既約分解に現れる既約表現の中には, 互いに同値であるものたちが存在することがある. このようものを集めると, その表現空間の和空間は, 不変部分空間になる.

**定理 2.39**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. いま,  $\rho$  を  $V_\rho$  を表現空間とする  $G$  の既約表現とし,  $\mathcal{F}_\rho$  を次で与えられる  $V$  の  $G$  不変部分空間の族とする.

$$\mathcal{F}_\rho = \{W \subset V; G \text{ 不変, かつ } G \text{ 線形同型写像 } T : V_\rho \rightarrow W \text{ が存在}\}. \quad (2.34)$$

そして,  $W_\rho = V$  を, 次で与えられる  $V$  の部分 vector 空間とする.

$$W_\rho = \sum_{W \in \mathcal{F}_\rho} W = \left\{ \sum_{1 \leq j \leq r} w_j; r \text{ は正整数, } w_j \in W^{(j)}, W^{(j)} \in \mathcal{F}_\rho \right\}. \quad (2.35)$$

(1)  $W_\rho \subset V$  は  $V$  の  $G$  不変部分空間である.

(2)  $W_\rho$  が既約な  $G$  不変部分空間たち  $W_1, \dots, W_r$  により,  $W_\rho = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$  と直和分解されたとする. このとき,  $1 \leq j \leq r$  なる任意の整数  $j$  について,  $\pi_{W_j} \simeq \rho$  となる.

(3)  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$  を  $V$  の直和分解とする. いま,  $I_\rho = \{j; \pi_{V_j} \sim \rho\}$  とし,  $n(\rho) = \#I_\rho$  とする. このとき,  $W_\rho = \bigoplus_{j \in I_\rho} V_j$  が成り立つ. 特に,  $n(\rho)$  は  $V$  の既約な  $G$  不変部分空間たちによる既約分解に依らずに定められる.

この  $W_\rho$  を  $V$  の等質成分と呼ぶ.

**証明.** (1) まず,  $W_\rho$  が  $V$  の部分 vector 空間であることを確認する.  $w, w' \in W_\rho, c \in \mathbb{C}$  とする. このとき, 必要ならば零 vector をつけ加えることにより,  $W^{(1)}, \dots, W^{(t)} \in \mathcal{F}_\rho$  が存在して,  $w = \sum_{j=1}^t w_j, w' = \sum_{j=1}^t w'_j, w_j, w'_j \in W^{(j)} (1 \leq j \leq t)$  と表されるとしてよい. このとき,  $1 \leq j \leq r$  なる任意の  $j$  について,  $w_j + w'_j, cw_j \in W^{(j)}$  が成り立つから, 次が得ら



れる。

$$w + w' = \sum_{j=1}^t w_j + \sum_{j=1}^t w'_j = \sum_{j=1}^t (w_j + w'_j) \in W_\rho,$$

$$cw = c \sum_{j=1}^t w_j = \sum_{j=1}^t cw_j \in W_\rho.$$

従って,  $W_\rho \subset V$  は  $V$  の部分 vector 空間である. 次に,  $W_\rho \subset V$  が  $G$  不変であることを示す. いま,  $w = \sum_{j=1}^t w_j \in W_\rho$  ( $w_j \in W^{(j)}$ ,  $W^{(j)} \in \mathcal{F}_\rho$ ,  $1 \leq j \leq t$ ) を  $W$  の任意の元とする. このとき, 任意の  $x \in G$  について,  $1 \leq j \leq t$  なる任意の整数  $j$  について  $\pi(x)w_j \in W^{(j)}$  となるから, 次が成り立つ.

$$\pi(x)(w) = \pi(x) \left( \sum_{j=1}^t w_j \right) = \sum_{j=1}^t \pi(x)(w_j) \in W_\rho.$$

従って,  $W_\rho \subset V$  は  $G$  不変である.

(2)  $1 \leq j \leq r$  なる整数  $j$  について,  $p_j : W_\rho \rightarrow W_j$  を射影とする. すると, 任意の  $W \in \mathcal{F}_\rho$  について,  $p_j(W) \subset W_j$  は  $W_j$  の部分 vector 空間である. もし, すべての  $W \in \mathcal{F}_\rho$  について  $p_j(W) = \{0\}$  であるとすると,  $W \subset \bigoplus_{k \neq j} W_k$  となり,  $W_\rho \subset \bigoplus_{k \neq j} W_k$  となるが, これは  $W_\rho = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$  に反する. ゆえに,  $p_j(W) \neq \{0\}$  なる  $W \in \mathcal{F}_\rho$  が存在する. ここで,  $\iota : W \rightarrow W_\rho$  を埋め込みとすると, 補題 2.38 (1) の証明と同様にして,  $p_j \iota : W \rightarrow W_j$  が零写像でない  $G$  線形写像となる. ここで,  $W_j \subset W_\rho$  は既約であり,  $G$  線形同型写像  $T : V_\rho \rightarrow W$  が存在するから,  $W$  も既約である. よって,  $p_j \iota$  は  $G$  線形同型写像となり,  $\pi_{W_j} \simeq \pi_W \simeq \rho$  となる.

(3)  $W_\rho$  の定義より, 明らかに  $\bigoplus_{j \in I_\rho} V_j \subset W_\rho$  が成り立つ. ここで,  $1 \leq k \leq s$  なる整数  $k$  について,  $p_k : V \rightarrow V_k$  を射影とする. いま,  $W \in \mathcal{F}_\rho$  を任意にとり,  $\iota : W \subset V$  を包含写像とする. すると, 補題 2.38 (1) の証明と同様にして,  $p_k \iota : W \rightarrow V_k$  は  $G$  線形写像である. もし,  $p_k \iota \neq 0$  とすると,  $W, V_k$  とともに既約であるから,  $\pi_{V_k} \simeq \pi_W \simeq \rho$  となり,  $k \in I_\rho$  が成り立つ. よって,  $W \subset \bigoplus_{j \in I_\rho} V_j$  が任意の  $W \in \mathcal{F}_\rho$  について成り立つ. 従って,  $W_\rho = \bigoplus_{j \in I_\rho} V_j$  となる. ■

有限群の有限次元線形表現の既約分解は一通りではないが, 等質成分たちによる直和分解は一意的である.

**定理 2.40**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. このとき,  $G$  の既約表現  $\rho_1, \dots, \rho_r$  が存在して,  $V$  は次のよう

に直和分解される.

$$V = \bigoplus_{j=1}^r W_{\rho_j}. \quad (2.36)$$

ここで,  $1 \leq j \leq r$  なる整数  $j$  について,  $W_{\rho_j} \subset V$  は  $\rho_j$  に対して (2.35) で与えられる  $V$  の部分 vector 空間である.

証明.  $V$  の既約分解  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$  を一つとり,  $\{\pi_{V_k}; 1 \leq k \leq s\}$  のうち互いに同値でないものを集めたものを,  $\{\pi_{V_{k_1}}, \dots, \pi_{V_{k_r}}\}$  とし,  $\rho_j = \pi_{V_{k_j}}$  ( $1 \leq j \leq r$ ) とする. そして,  $I_{\rho_j} = \{k; \pi_{V_k} \simeq \rho_j\}$  とすると, 定理 2.39 (3) より,  $W_{\rho_j} = \bigoplus_{k \in I_{\rho_j}} V_k$  が成り立つ. さらに,  $\{\rho_j; 1 \leq j \leq r\}$  の定義より,  $1 \leq k \leq s$  なる任意の整数  $k$  に対して,  $k \in I_{\rho_j}$  なる整数  $j$  が存在する. よって, 次が得られる.

$$V = \bigoplus_{k=1}^s V_k = \bigoplus_{j=1}^r \left( \bigoplus_{k \in I_{\rho_j}} V_k \right) = \bigoplus_{j=1}^r W_{\rho_j}.$$

■

**定義 2.41**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi: G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. また,  $\rho$  を  $V_\rho$  を表現空間とする  $G$  の既約表現とし,  $W_\rho \subset V$  を (2.35) で与えられる  $V$  の部分 vector 空間とし,  $W_\rho = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$  を  $W$  の既約分解とする. このとき,  $r$  を  $V$  における  $V_\rho$  の重複度, あるいは,  $\pi$  における  $\rho$  の重複度と呼び,  $r = n(\rho, \pi)$  と表すことにする.

重複度のこの定義は, 等質成分の直和分解を用いている. しかし, 補題 2.38 (2) より, 別の直和分解を用いても値は変わらない. さらに, 直和分解を用いなくても定義することができる.

**定理 2.42**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間であり,  $\pi: G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. また,  $\rho$  を  $V_\rho$  を表現空間とする  $G$  の既約表現とする. ここで, 次の集合  $I(\rho, \pi)$  を考える.

$$I(\rho, \pi) = \{T: V_\rho \rightarrow V, G \text{ 線形写像}\}. \quad (2.37)$$

このとき,  $I(\rho, \pi)$  は  $\mathbb{C}$  上の vector 空間であり,  $\dim I(\rho, \pi) = n(\rho, \pi)$  である.

証明.  $T, T' \in I(\rho, \pi)$ ,  $c \in \mathbb{C}$  について, 任意の  $x \in G$ ,  $v \in V_\rho$  に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} ((T + T')\rho(x))(v) &= T(\rho(x)(v)) + T'(\rho(x)(v)) = \pi(x)(T(v)) + \pi(x)(T'(v)) \\ &= \pi(x)(T(v) + T'(v)) = \pi(x)((T + T')(v)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((cT)\rho(x))(v) &= c(T(\rho(x)(v))) = c(\pi(x)(T(v))) \\ &= \pi(x)(c(T(v))) = \pi(x)((cT)(v)). \end{aligned}$$

ゆえに,  $T + T', cT \in I(\rho, \pi)$  となり,  $I(\rho, \pi)$  が  $\mathbb{C}$  上の vector 空間であることが分かる. そこで, この  $I(\rho, \pi)$  の次元を求める. 定理 2.40 より,  $G$  の既約表現  $\rho_1, \dots, \rho_t$  が存在して,  $V = \bigoplus_{k=1}^t W_{\rho_k}$  と分解される. ただし,  $W_{\rho_k}$  ( $1 \leq k \leq t$ ) は (2.35) で与えられる  $V$  の部分 vector 空間である. いま,  $T \in I(\rho, \pi)$  を零写像でない  $G$  線形写像とする. すると,  $\rho$  は既約だから, 補題 2.34 (1) より  $T$  は単射であり,  $W = T(V_\rho) \subset V$  は  $\pi_W \simeq \rho$  なる  $V$  の  $G$  不変部分空間である. ここで,  $1 \leq j \leq t$  なる整数  $j$  について,  $W_{\rho_j} = V_1^{(j)} \oplus \dots \oplus V_{n(\rho_j, \pi)}^{(j)}$  を既約分解とする. そして,  $p_k^{(j)} : V \rightarrow V_k^{(j)}$  を射影とし,  $\iota : W \rightarrow V$  を埋め込みとすると, 補題 2.38 (1) の証明と同様にして,  $p_k^{(j)} \iota : W \rightarrow V_k^{(j)}$  は  $G$  線形写像になる. そして,  $W, V_k^{(j)}$  いずれも既約であるから,  $p_k^{(j)} \iota$  が零写像であるか,  $\rho_j \simeq \pi_W \simeq \rho$  が成り立つ. ゆえに,  $1 \leq j \leq t$  なるすべての整数  $j$  について  $\rho \not\simeq \rho_j$  であれば,  $I(\rho, \pi) = \{0\}$  となり,  $\dim(\rho, \pi) = 0 = n(\rho, \pi)$  となる. そこで,  $1 \leq j \leq t$  なるある整数  $j$  が存在して,  $\rho \simeq \rho_j$  であるとする. ここで, 添え字を取り換えることにより,  $\rho = \rho_1$  としてよい. すると, 任意の零写像でない  $T \in I(\rho, \pi)$  について,  $T(V_\rho) \subset W_\rho$  である. よって, 初めから  $T : V_\rho \rightarrow W_\rho$  と考えてよい. いま,  $W_\rho = W_1 \oplus \dots \oplus W_{n(\rho, \pi)}$  を既約分解とし,  $1 \leq k \leq n(\rho, \pi)$  なる整数  $k$  に対して,  $p_k : W_\rho \rightarrow W_k$  を射影とする. そして,  $T_k : V_\rho \rightarrow W_k$  を  $G$  線形同型写像とし, これを固定する. すると, 補題 2.38 (1) の証明と同様にして,  $p_k T : V_\rho \rightarrow W_k$  は  $G$  線形写像である. ゆえに, 複素数  $c_k \in \mathbb{C}$  が存在して,  $p_k T = c_k T_k$  が成り立つ. よって,  $T = \sum_{k=1}^{n(\rho, \pi)} c_k T_k$  が得られる. 従って,  $\{T_1, \dots, T_{n(\rho, \pi)}\}$  が線形独立であることを示せば, 定理が証明される. いま,  $a_1, \dots, a_{n(\rho, \pi)} \in \mathbb{C}$  について,  $\sum_{k=1}^{n(\rho, \pi)} a_k T_k = 0$  が成り立つとする. すると, 任意の  $v \in V_\rho$  について, 次が成り立つ.

$$0 = \left( \sum_{k=1}^{n(\rho, \pi)} a_k T_k \right) (v) = \sum_{k=1}^{n(\rho, \pi)} a_k (T_k(v)).$$

ここで,  $W_\rho = W_1 \oplus \dots \oplus W_{n(\rho, \pi)}$  であるから,  $1 \leq k \leq n(\rho, \pi)$  なる任意の整数  $k$  について,  $a_k (T_k(v)) = 0$  が成り立つ. よって,  $a_k T_k = 0$  となるが,  $T_k$  は線形同型写像であるから,  $a_k = 0$  でなければならない. 以上により,  $T_1, \dots, T_{n(\rho, \pi)}$  は線形独立であり,  $I(\rho, \pi)$  の基底である. ゆえに,  $\dim I(\rho, \pi) = n(\rho, \pi)$  が成り立つ. ■

( 余 白 )

## 2.3 指標.

ここでは、群の表現の性質を反映し、かつ表現そのものに比べて様々な計算を行いやすい概念である表現の指標について述べる。正確に言うと、表現の指標は表現そのものではなく、表現の同値類の性質を反映しているものである。

**定義 2.43**  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする。このとき,  $G$  上の関数  $\chi_\pi : G \rightarrow \mathbb{C}$  を次で定義する。

$$\chi_\pi(x) = \text{tr } \pi(x), \quad x \in G. \quad (2.38)$$

この  $\chi_\pi$  を  $\pi$  の指標と呼ぶ。

これから、指標の性質を述べていくが、そのために、群論の概念を幾つか用意する。

**定義 2.44** 群  $G$  に対して、同型写像  $\alpha : G \rightarrow G$  を群  $G$  の自己同型と呼ぶ。

群に対して、自己同型たちにより、新しい群を構成する。

**命題 2.45**  $G$  を群とし,  $G$  の自己同型全体のなす集合を  $\text{Aut}(G)$  と表すことにする。このとき,  $\text{Aut}(G)$  は写像の合成を乗法とする群である。この群を  $G$  の自己同型群と呼ぶ。

証明.  $\alpha, \beta \in \text{Aut}(G)$  について,  $\alpha \circ \beta : G \rightarrow G$  も同型写像である。そして、写像の合成は結合法則をみたすから、この乗法も結合法則をみたす。また、 $G$  の恒等写像  $\text{Id}_G$  は群同型写像であり、任意の  $\alpha \in \text{Aut}(G)$ ,  $x \in G$  について、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \text{Id}_G)(x) &= \alpha(\text{Id}_G(x)) = \alpha(x), \\ (\text{Id}_G \circ \alpha)(x) &= \text{Id}_G(\alpha(x)) = \alpha(x). \end{aligned}$$

よって,  $\alpha \circ \text{Id}_G = \text{Id}_G \circ \alpha = \alpha$  となり,  $\text{Id}_G \in \text{Aut}(G)$  は乗法に関する単位元である。さらに,  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  について, 逆写像  $\alpha^{-1}$  も  $G$  の自己同型である。そして, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \alpha^{-1})(x) &= \alpha(\alpha^{-1}(x)) = x, \\ (\alpha^{-1} \circ \alpha)(x) &= \alpha^{-1}(\alpha(x)) = x. \end{aligned}$$

ゆえに,  $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \text{Id}_G$  であり,  $\alpha^{-1} \in \text{Aut}(G)$  は乗法に関する  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  の逆元である。従って,  $\text{Aut}(G)$  は写像の合成を乗法とする群である。■

群の自己同型のうち、群の元から構成できるものがある。

定理 2.46  $G$  を群とする.

(1) 任意の  $g \in G$  について, 次の写像  $i_g : G \rightarrow G$  は同型写像である.

$$i_g(x) = gxg^{-1} \in G, \quad x \in G. \quad (2.39)$$

この  $i_g$  を  $G$  の内部自己同型と呼ぶ.

(2)  $G$  の内部自己同型全体のなす  $\text{Aut}(G)$  の部分集合を  $\text{Inn}(G)$  と表すことにする.

$$\text{Inn}(G) = \{i_g \in \text{Aut}(G); g \in G\}. \quad (2.40)$$

このとき,  $\text{Inn}(G)$  は  $\text{Aut}(G)$  の正規部分群である.

証明. いま,  $g \in G$  とする. このとき, 任意の  $x, y \in G$  について, 次が成り立つ.

$$i_g(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = i_g(x)i_g(y).$$

よって,  $i_g : G \rightarrow G$  は準同型である. また,  $g, h \in G$  について, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つ.

$$i_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1} = (gh)x(h^{-1}g^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1} = i_g(i_h(x))$$

ゆえに,  $i_{gh} = i_g \circ i_h$  となる. さらに, 任意の  $x \in G$  について, 次が成り立つ.

$$i_{1_G}(x) = 1_G x 1_G^{-1} = 1_G x 1_G = x.$$

よって,  $i_{1_G} = \text{Id}_G$  である. このことにより,  $g \in G$  について, 次が成り立つ

$$i_g \circ i_{g^{-1}} = i_{gg^{-1}} = i_{1_G} = \text{Id}_G,$$

$$i_{g^{-1}} \circ i_g = i_{g^{-1}g} = i_{1_G} = \text{Id}_G.$$

ゆえに,  $(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}}$  であり,  $i_g : G \rightarrow G$  は同型写像である. よって, (1) が示された. さらに, 任意の  $g, h \in G$  について,  $i_g \circ i_h = i_{gh} \in \text{Inn}(G)$ ,  $(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}} \in \text{Inn}(G)$  であるから,  $\text{Inn}(G) \subset \text{Aut}(G)$  は  $\text{Aut}(G)$  の部分群である. そして,  $g \in G$ ,  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  について, 任意の  $x \in G$  に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\alpha \circ i_g \circ \alpha^{-1})(x) &= \alpha(g\alpha^{-1}(x)g^{-1}) = \alpha(g)\alpha(\alpha^{-1}(x))\alpha(g^{-1}) \\ &= \alpha(g)x(\alpha(g))^{-1} = i_{\alpha(g)}(x). \end{aligned}$$

ゆえに,  $\alpha \circ i_g \circ \alpha^{-1} = i_{\alpha(g)} \in \text{Inn}(G)$  となる. よって,  $\text{Inn}(G)$  は  $\text{Aut}(G)$  の正規部分群である. 以上により, (2) が示された. ■

群は, 内部自己同型により, 自分自身に作用する.

定義 2.47  $G$  を群とする. このとき,  $G$  は  $G$  自身に次のように作用する.

$$G \times G \ni (g, x) \mapsto g \cdot x = i_g(x) = gxg^{-1}, \quad g, x \in G. \quad (2.41)$$

そして,  $x \in G$  のこの作用に関する  $G$  軌道を  $x$  を元としてもつ共役類, あるいは  $x$  を通る共役類と呼び, その元を  $x$  と共役な元と呼ぶ.

$G$  が Abel 群であれば, 任意の  $g, x \in G$  について, 次が成り立つ.

$$i_g(x) = gxg^{-1} = xgg^{-1} = x1_G = x.$$

ゆえに,  $x$  を通る共役類は  $\{x\}$  である.

例 2.48  $G = S_3$  を 3 次対称群とする. すると,  $S_3$  の元は恒等置換, 互換, 長さ 3 の巡回置換である. いま,  $\sigma = (1, 2)$  とする. すると, 任意の  $\tau \in S_3$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(1)) &= (\tau\sigma)(\tau^{-1}(\tau(1))) = (\tau\sigma)(1) = \tau(2), \\ (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(2)) &= (\tau\sigma)(\tau^{-1}(\tau(2))) = (\tau\sigma)(2) = \tau(1), \\ (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(3)) &= (\tau\sigma)(\tau^{-1}(\tau(3))) = (\tau\sigma)(3) = \tau(3). \end{aligned}$$

よって,  $\tau(1, 2)\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2))$  であり, 特に, 互換である. ここで,  $\tau = (2, 3)$  とすると,  $\tau(1, 2)\tau^{-1} = (1, 3)$ ,  $\tau = (1, 3)$  とすると,  $\tau(1, 2)\tau^{-1} = (3, 2) = (2, 3)$  である. よって,  $(1, 2) \in S_3$  を通る共役類は  $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \subset S_3$  である. また,  $\sigma = (1, 2, 3)$  とするとき, 任意の  $\tau \in S_3$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(1)) &= (\tau\sigma)(\tau^{-1}(\tau(1))) = (\tau\sigma)(1) = \tau(2), \\ (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(2)) &= (\tau\sigma)(\tau^{-1}(\tau(2))) = (\tau\sigma)(2) = \tau(3), \\ (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(3)) &= (\tau\sigma)(\tau^{-1}(\tau(3))) = (\tau\sigma)(3) = \tau(1). \end{aligned}$$

ゆえに,  $\tau(1, 2, 3)\tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2), \tau(3))$  であり, 特に, 長さ 3 の巡回置換である. ここで,  $\tau = (2, 3)$  とすると,  $\tau(1, 2, 3)\tau^{-1} = (1, 3, 2)$  となる. 従って,  $(1, 2, 3) \in S_3$  を通る共役類は,  $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\} \subset S_3$  である. また, 恒等置換  $\iota \in S_3$  について, 任意の  $\tau \in S_3$  に対して,  $\tau\iota\tau^{-1} = \tau\tau^{-1} = \iota$  が成り立つ. 従って,  $\iota \in S_3$  を通る共役類は  $\{\iota\} \subset S_3$  である. 以上により,  $S_3$  の共役類は, 以下の通りである.

$$\{\iota\}, \quad \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}, \quad \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}. \quad (2.42)$$

群の指標は, 群上の関数というより, むしろ, 群の共役類全体のなす空間上の関数である.

定義 2.49  $G$  を群とし,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  を関数とする. このとき,  $f$  が類関数であるとは, 以下の性質をみたすことである.

$$f(gxg^{-1}) = f(x), \quad g, x \in G. \quad (2.43)$$

命題 2.50  $G$  を有限群,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$  を  $G$  の  $V$  上の表現とする. このとき,  $\pi$  の指標  $\chi_\pi : G \rightarrow \mathbb{C}$  は  $G$  上の類関数である.

証明.  $g, x \in G$  とする. このとき, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} \chi_\pi(gxg^{-1}) &= \text{tr } \pi(gxg^{-1}) = \text{tr } (\pi(g)\pi(x)\pi(g^{-1})) \\ &= \text{tr } (\pi(g)\pi(x)\pi(g)^{-1}) = \text{tr } \pi(x) = \chi_\pi(x). \end{aligned}$$

従って,  $\chi_\pi$  は類関数である. ■

群の表現の指標の重要な性質として, 同値な表現の指標が一致することが挙げられる.

定理 2.51  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V)$ ,  $\rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の表現とする. このとき,  $\pi \simeq \rho$  ならば,  $\chi_\pi = \chi_\rho$  が成り立つ.

証明.  $\dim V = n > 0$  とし,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の基底とする. そして, 任意の  $x \in G$  について,  $\pi(x)$  の  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列を  $A_\pi(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$

とする. すると,  $1 \leq k \leq n$  なる任意の整数  $k$  について  $\pi(x) = \sum_{j=1}^n a_{j,k}(x)v_j$  であり,

$\chi_\pi(x) = \text{tr } \pi(x) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}(x)$  となる. また,  $T : V \rightarrow W$  を  $G$  線形同型写像とし,  $1 \leq$

$j \leq n$  なる整数  $j$  について,  $w_j = T(v_j) \in W$  とする. すると,  $T$  が線形同型写像であることより,  $\{w_1, \dots, w_n\} \subset W$  は  $W$  の基底であり, 特に,  $\dim W = n$  である. さらに, 任意の  $x \in G$  について,  $T\pi(x) = \rho(x)T$  である. そして,  $1 \leq k \leq n$  なる任意の整数  $k$  および  $x \in G$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \rho(x)(w_k) &= \rho(x)(T(v_k)) = T(\pi(x)(v_k)) = T\left(\sum_{j=1}^n a_{j,k}(x)v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{j,k}(x)(T(v_j)) = \sum_{j=1}^n a_{j,k}(x)(w_j). \end{aligned}$$



ゆえに,  $\rho(x)$  の  $\{w_1, \dots, w_n\}$  に関する表現行列も  $A_\pi(x)$  となり,  $\chi_\rho(x) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}(x) = \chi_\pi(x)$  が成り立つ. 従って,  $\chi_\pi = \chi_\rho$  となる. ■

群の表現の指標を用いると, 2つの既約表現が同値であるかどうか,  $G$  線形同型写像を具体的に構成しなくても, 関数を用いた計算により判定することができる. そのために, 群の表現の行列成分の性質を調べる. ところで, 有限群の任意の有限次元線形表現は, 表現空間に適当な複素内積を入れることにより, unitary 表現と考えることができる. そこで, ここからしばらくは, unitary 表現のみ考える.

**定理 2.52**  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$  をそれぞれ  $V, W$  上の (複素) 内積,  $U(V), U(W)$  をこれらの内積に関する unitary 群とし,  $\pi : G \rightarrow U(V), \rho : G \rightarrow U(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の既約 unitary 表現とする.

(1) いま,  $\pi = \rho$  とする. このとき, 任意の  $v, v' \in V, w, w' \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v' \rangle_V \overline{\langle \rho(x)(w), w' \rangle_V} = \frac{1}{\dim \pi} \langle v, w \rangle_V \overline{\langle v', w' \rangle_V}. \quad (2.44)$$

(2)  $\pi \neq \rho$  であれば, 任意の  $v, v' \in V, w, w' \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v' \rangle_V \overline{\langle \rho(x)(w), w' \rangle_W} = 0. \quad (2.45)$$

証明. 写像  $T : W \rightarrow V$  を次のように定義する.

$$T(w') = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle w', \rho(x)(w) \rangle_W \pi(x)v, \quad w' \in W. \quad (2.46)$$

すると,  $T$  は線形写像であり, 任意の  $x \in G, w' \in W$  について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} T(\rho(x)(w')) &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle \rho(x)(w'), \rho(y)(w) \rangle_W \pi(y)(v) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle w', \rho(x^{-1}y)(w) \rangle_W \pi(y)(v) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle w', \rho(y)(w) \rangle_W \pi(xy)(v) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle w', \rho(y)(w) \rangle_W \pi(x)(\pi(y)(v)) \\ &= \pi(x) \left( \frac{1}{\#G} \sum_{y \in G} \langle w', \rho(y)(w) \rangle_W \pi(y)v \right) = \pi(x)(T(w')). \end{aligned}$$

よって,  $T : W \rightarrow V$  は  $G$  線形写像である.

ここで, (2) を証明する.  $\pi, \rho$  はいずれも既約であり,  $\pi \neq \rho$  であるから, 定理 2.35 (2) より,  $T = 0$  となる. よって,  $v' \in V, w' \in W$  について, 次が得られる.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(w'), v' \rangle_V = \left\langle \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle w', \rho(x)(w) \rangle_W \pi(x)(v), v' \right\rangle_V \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v' \rangle_V \langle w', \rho(x)(w) \rangle_W \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v' \rangle_V \overline{\langle \rho(x)(w), w' \rangle_W}. \end{aligned}$$

続いて, (1) を証明する.  $\pi$  は既約であるから, 定理 2.35 (1) より, 複素数  $\lambda \in \mathbb{C}$  が存在して,  $T = \lambda \text{Id}_V$  となる. よって,  $v', w' \in V$  について, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \lambda \langle w', v' \rangle_V &= \langle (\lambda \text{Id}_V)(w'), v' \rangle_V = \langle T(w'), v' \rangle_V = \left\langle \frac{1}{\#G} \langle w', \pi(x)(w) \rangle_W \pi(x)(v), v' \right\rangle_V \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v' \rangle_V \langle w', \pi(x)(w) \rangle_W \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v' \rangle_V \overline{\langle \pi(x)(w), w' \rangle_W}. \end{aligned}$$

ここで,  $\dim \pi = \dim V = n > 0$  とし,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の正規直交基底とする. すると, 任意の  $u = \sum_{j=1}^n a_j v_j, \sum_{j=1}^n b_j v_j \in V$  に対して,  $a_j = \langle u, v_j \rangle_V, b_j = \langle u', v_j \rangle_V$  ( $1 \leq j \leq n$ ) であり, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \langle u, u' \rangle_V &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_j v_j, \sum_{k=1}^n b_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j \bar{b}_k \langle v_j, v_k \rangle_V \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j \bar{b}_k \delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j = \sum_{j=1}^n \langle u, v_j \rangle_V \overline{\langle u', v_j \rangle_V}. \end{aligned}$$

ゆえに, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} n\lambda &= \lambda \sum_{j=1}^n \langle v_j, v_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v_j \rangle_V \overline{\langle \pi(x)(w), v_j \rangle_V} \right) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \left( \sum_{j=1}^n \langle \pi(x)(v), v_j \rangle_V \overline{\langle \pi(x)(w), v_j \rangle_V} \right) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), \pi(x)(w) \rangle_V = \frac{1}{\#G} \cdot (\#G) \langle v, w \rangle_V = \langle v, w \rangle_V. \end{aligned}$$

従って,  $\frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v), v' \rangle_V \overline{\langle \pi(x)(w), w' \rangle_V} = \frac{1}{n} \langle v, w \rangle_V \overline{\langle v', w' \rangle_V}$  が成り立つ. ■

この定理を用いて, 2つの既約表現が同値かどうかを, 指標を用いて調べることができる.

定理 2.53 (指標の第一直交関係).  $G$  を有限群,  $V, W$  を  $\mathbb{C}$  上の  $\{0\}$  でない有限次元 vector 空間とし,  $\pi : G \rightarrow GL(V), \rho : G \rightarrow GL(W)$  をそれぞれ  $G$  の  $V, W$  上の既約表現とする.

(1)  $\pi \simeq \rho$  であれば, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \chi_\pi(x) \overline{\chi_\rho(x)} = 1. \quad (2.47)$$

(2)  $\pi \not\simeq \rho$  であれば, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \chi_\pi(x) \overline{\chi_\rho(x)} = 0. \quad (2.48)$$

証明. 定理 2.23 より,  $V, W$  上に適当な複素内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_V, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$  が存在して, すべての  $x \in G$  について,  $\pi(x) \in U(V), \rho(x) \in U(W)$  が成り立つ. よって, 初めから,  $\pi, \rho$  とともに既約 unitary 表現と仮定してよい.

(1)  $\pi \simeq \rho$  であるから, 定理 2.51 より,  $\chi_\pi = \chi_\rho$  である. よって, 初めから  $\pi = \rho$  としてよい. ここで,  $\dim V = n > 0$  とし,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  を  $V$  の正規直交基底とする. すると, 任意の

$x \in G$  について,  $\pi(x)$  の  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に関する表現行列を  $A_\pi(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$

とおくと,  $1 \leq k \leq n$  なる任意の整数  $k$  について,  $\pi(x)(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{j,k}(x)v_j$  であるから,  $a_{k,k}(x) = \langle \pi(x)(v_k), v_k \rangle_V$  となる. ゆえに, 次が得られる.

$$\chi_\pi(x) = \text{tr } \pi(x) = \sum_{j=1}^n \langle \pi(x)v_j, v_j \rangle_V.$$

よって, (2.44) より, 次が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \chi_\pi(x) \overline{\chi_\pi(x)} &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle \pi(x)(v_j), v_j \rangle_V \overline{\langle \pi(x)(v_k), v_k \rangle_V} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v_j), v_j \rangle_V \overline{\langle \pi(x)(v_k), v_k \rangle_V} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \langle v_j, v_k \rangle_V \overline{\langle v_j, v_k \rangle_V} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \delta_{j,k} \bar{\delta}_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

(2)  $\dim V = n > 0$ ,  $\dim W = m > 0$  とし,  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\} \subset W$  をそれぞれ  $V, W$  の正規直交基底とすると, (1) と同様にして, 任意の  $x \in G$  について, 次が得られる.

$$\chi_\pi(x) = \sum_{j=1}^n \langle \pi(x)(v_j), v_j \rangle_V, \quad \chi_\rho(x) = \sum_{k=1}^m \langle \rho(x)(w_k), w_k \rangle_W.$$

ゆえに, (2.45) より, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \chi_\pi(x) \overline{\chi_\rho(x)} &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \langle \pi(x)(v_j), v_j \rangle_V \overline{\langle \rho(x)(w_k), w_k \rangle_W} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \langle \pi(x)(v_j), v_j \rangle_V \overline{\langle \rho(x)(w_k), w_k \rangle_W} \right) = 0. \end{aligned}$$

■

ここで,  $G$  上の関数全体のなす空間  $\mathbb{C}(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$  上に, 次のように (複素) 内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を入れる.

$$\langle f, f' \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} f(x) \overline{f'(x)}, \quad f, f' \in \mathbb{C}(G). \quad (2.49)$$

問 2.54 (2.49) が  $\mathbb{C}(G)$  上の内積であることを示せ.

すると,  $G$  の既約表現の指標たちは, この内積に関して互いに直交していることが分かる.

系 2.55  $G$  を有限群,  $\mathbb{C}(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C}\}$  とし,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を (2.49) で与えられる  $\mathbb{C}(G)$  上の内積とする. このとき,  $G$  の既約表現  $\pi, \rho$  の指標  $\chi_\pi, \chi_\rho$  について, 次が成り立つ.

$$\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \begin{cases} 1, & \pi \simeq \rho, \\ 0, & \pi \not\simeq \rho. \end{cases} \quad (2.50)$$

証明. 内積の定義より, 次が成り立つ.

$$\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \chi_\pi(x) \overline{\chi_\rho(x)}.$$

従って, この系の主張は定理 2.46 の言い換えである. ■

この系より, 既約表現の指標から, それらが同値であるかが分かる.

系 2.56  $G$  を有限群,  $\pi, \rho$  を  $G$  の既約表現とする. このとき,  $\chi_\pi = \chi_\rho$  ならば,  $\pi \simeq \rho$  が成り立つ.

証明.  $\pi \not\simeq \rho$  であれば, (2.50) より,  $\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = 0$  である. ところが,  $\chi_\pi = \chi_\rho$  であれば, (2.50) より,  $\langle \chi_\pi, \chi_\rho \rangle = \langle \chi_\pi, \chi_\pi \rangle = 1$  となり, 矛盾する. 従って,  $\pi \simeq \rho$  となる. ■