和歌山大学教育学部

2011年度 微分方程式 (後期火曜4限)

補足資料

目次

この補足資料について

これは, 2011 年度和歌山大学教育学部で開講される「微分方程式」の講義を進める際に, 講義内容の前提となるべき内容であるが, それを講義資料の中にまとめるには難しすぎるもの, あるいは, 予め学習している必要があり, 改めて講義資料にまとめると必要以上に量が膨大となるものを, 別にまとめたものである. 言うなれば, 「講義資料」が教科書のようなものと考えると, 「補足資料」はその付録, あるいは補遺として書かれるものである. 従って, 講義資料のように, 例や問はほとんど用意していない. 「補足資料」の内容は, 講義では「講義資料」の内容と比べてそれほど丁寧には説明しない予定であるので, 「講義資料」に加えてこの内容まで完全に理解するのはなかなか大変かもしれないが, 余力のある人は, 是非自分で手を動かして理解を目指してほしい.

都合により, この補足資料も講義と同時進行で作成していく予定である. 新たに原稿を付け加える場合には, 講義時に連絡する予定である. また, 原稿が更新されるごとに目次も更新されるので, 必要に応じて表紙を差し替えてもらえると幸いである.

これも都合により, 本文中にほとんど図を載せない予定である. また, ページ数の具合により, 随所に余白を挿入する予定である. 講義時に板書等で与えた図等をその余白に書き込むのもよいであろう.

なお, この補足資料の最新版を以下の Web ページにて公開する予定である.

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kikuchi/parttime/wakayama2011/de/2011de.html

最終版は 2012 年 1 月末か 2 月初めに完成する予定である.

1　微分積分学から.

1.1　陰関数定理.

ここでは, 変数分離型の微分方程式の解の存在および一意性の証明に必要である陰関数定理について述べる. まず, 実数体 $\mathbb{R}$ の連続性の 1 つの定式化であるボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理について述べる.

定理 1.1 a, b を $a < b$ なる実数とし, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意の正整数 n について $x_n \in [a, b]$ なる数列とする. このとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $\alpha \in [a, b]$ なる実数 α が存在して, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束する (**ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理**).

証明は微分積分学の教科書等を参照してもらいたい.

定理 1.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ を開集合, $(a, b) \in D$ とし, $f(x, y)$ を D 上で定義された C^1 級実数値関数で, $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ をみたすものとする. このとき, a, b の開近傍 U, V および U 上で定義された函数 $g(x)$ で, 以下の性質をみたすものが存在する (**陰関数定理**).
(i) $U \times V \subset D$.
(ii) $x \in U$ のとき $y = g(x) \in V$.
(iii) $(x, y) \in U \times V$ について, $y = g(x)$ であることと, $f(x, y) = 0$ であることは同値.
(iv) g は C^1 級であり, 導関数 $\dfrac{dg}{dx}$ は次のように表される.

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}. \tag{1.1}$$

g を f から得られる (a, b) の近傍における**陰関数**と呼ぶ.

証明. $f_y(a, b) > 0$ の場合を考える. f は C^1 級であるから, 正実数 $\delta_0, \delta_1 > 0$ が存在して, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |x - a| \leq \delta_0, |y - b| \leq \delta_1\} \subset D$, かつ, $|x - a| < \delta_0$, $|y - b| < \delta_1$ ならば, $f_y(x, y) > 0$ となる. $|x - a| < \delta_0$ なる x を固定すると, y の関数 $f^{(x)}(y) = f(x, y)$ は閉区間 $[b - \delta_1, b + \delta_1]$ で狭義単調増加である. 特に, $f^{(a)}$ は狭義単調増加であるから, $f^{(a)}(b - \delta_1) = f(a, b - \delta_1) < f^{(a)}(b) = f(a, b) = 0 < f^{(a)}(b + \delta_1) = f(a, b + \delta_1)$ が成り立つ. f は C^1 級であることより連続であるから, $0 < \delta_2 < \delta_0$ なる実数 δ_2 で, $|x - a| < \delta_2$ ならば, $f(x, b - \delta_1) < 0$ かつ $f(x, b + \delta_1) > 0$ が成り立つものが存在する. このとき, $|x - a| < \delta_2$ なる任意の x について, y の関数 $f^{(x)}$ は閉区間 $[b - \delta_1, b + \delta_1]$ において狭義単調増加であるから, $|y - b| < \delta_1$ かつ $f^{(x)}(y) = f(x, y) = 0$ をみたす実数 y が存在する. そこで, $U = \{x \in \mathbb{R} ; |x - a| < \delta_2\}$, $V = \{y \in \mathbb{R} ; |y - b| < \delta_1\}$ とし, $x \in U$ に対して, 上で定まる y を $g(x)$ と表すとする. すると, その定義により (i)(ii)(iii) が成り立つ.

(iv) を証明するために, まず g が連続であることを示す. そのためには, $x_0 \in U$ とし, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意の正整数 n について $x_n \in U$ であり x_0 に収束する数列をとるとき, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $y_0 = g(x_0)$ に収束することを示せばよい. まず, 任意の正整数 n について, $y_n = g(x_n) \in V$ より $|y_n - b| \leq \delta_1$ である. よって, ボルツァーノ-ワイエルシュトラスの定理より, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ および $|y'_0 - b| \leq \delta_1$ なる実数 y'_0 が存在して, $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ は y'_0 に収束する. $\{y'_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるから, 任意の正整数 n について $y'_n = y_{k_n}$ となる狭義単調増加正整数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する. そこで, 正整数 n について $x'_n = x_{k_n}$ とすると, $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は x_0 に収束するから, $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ も x_0 に収束する. よって, D の点列 $\{(x'_n, y'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は D の点 (x_0, y'_0) に収束する. f は連続だから, $f(x_0, y'_0) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = 0$ である. $x_0 \in U$ であるから, $f(x_0, b - \delta_1) < 0$ かつ $f(x_0, b + \delta_1) > 0$ である. ゆえに, $y'_0 \in V$ となる. $f(x_0, y'_0) = 0$ かつ $(x_0, y'_0) \in U \times V$ であるから, $y'_0 = g(x_0) = y_0$ でなければならない. これは, 数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が $y_0 = g(x_0)$ に収束することを意味する. 従って, g は連続である.

上のことを用いて (iv) を示す. 既に $(x, y) \in U \times V$ のとき $f_y(x, y) > 0$ であることは示してあるので, (iv) の右辺は意味をもつ. いま, $x_0 \in U$ とし, $y_0 = g(x_0) \in V$ とする. $x \in U$ をとり $y = g(x)$ とし, 閉区間 $[0, 1]$ 上の函数 φ を次で定義する.

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)), \quad t \in [0, 1].$$

すると, φ は C^1 級であり,

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = &f_x(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0)\\ &+ f_y(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(y - y_0), \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

$\varphi(0) = f(x_0, y_0) = 0$, $\varphi(1) = f(x, y) = 0$ であるから, ロルの定理より, $0 < \theta < 1$ なる実数 θ が存在して, $\varphi'(\theta) = 0$ となる. ゆえに,

$$\begin{aligned}0 = &f_x(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(x - x_0)\\ &+ f_y(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(y - y_0).\end{aligned}$$

よって, $x \neq x_0$ のとき,

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{f_x(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))}{f_y(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))}.$$

x が x_0 に近づくとき, g は連続であるから $y = g(x)$ も $y_0 = g(x_0)$ に近づく. $0 < \theta < 1$ であるから, $(x_0 + \theta(x - x_0), (y_0 + \theta(y - y_0))$ は (x_0, y_0) に近づく. よって,

$$\frac{dg}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{f_x(x_0, g(x_0))}{f_y(x_0, g(x_0))}.$$

$x_0 \in U$ は任意であり, (1.1) の右辺は x について連続であるから, g は C^1 級である. 以上のことは, $f_y(a, b) < 0$ のときも同様に議論できる. ■

1.2 一様収束.

ここでは, 関数の一様収束に関連する内容をまとめておく. まず, 集合上の実数値関数列に関する 2 つの収束を定義する.

定義 1.3 S を集合, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ を実数値関数とし, 任意の正整数 n に対して, S 上の関数 $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$ が与えられているとする. このとき, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f に**各点収束**するとは, 任意の $x \in S$ について, 実数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f(x)$ に収束することである.

定義 1.4 S を集合, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ を実数値関数とし, 任意の正整数 n に対して, S 上の関数 $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$ が与えられているとする. このとき, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f に**一様収束**するとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, $n \geq n_0$ かつ $x \in S$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことである.

S 上の実関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f に一様収束すれば, S 上各点収束する. しかし, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f に各点収束しても, S 上一様収束するとは限らない.

一様収束する関数列で特に重要なのは, 関数列が連続関数からなる場合である. 簡単のために, $\mathbb{R}^m$ の部分集合上で定義された関数のみ考えることにする.

定理 1.5 m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合とし, 任意の正整数について, $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. このとき, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D 上 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束するならば, f は連続関数である.

<u>証明</u>. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D 上 f に一様収束するから, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, 任意の $x \in D$ について, 次が成り立つ.

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.2}$$

いま, $a \in D$ を任意の点とする. すると, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, $x \in D$ かつ $|x - a| < \delta$ ならば, 次が成り立つ.

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3}$$

(1.2), (1.3) より, $x \in D$, $|x - a| < \delta$ なる x について, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)) + (f_{n_0}(a) - f(a))| \\
&\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに, f は a で連続である. $a \in D$ は任意であるから, f は D 上連続である. ■

続いて, 関数列が作るコーシー列について述べる. まず, 実数列のコーシー列の性質を述べる.

定義 1.6 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする. このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**であるとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, $m, n \geq n_0$ ならば, 次が成り立つことである.

$$|a_m - a_n| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

収束する実数列は常にコーシー列である. この逆を主張する次の定理の内容は, 実数の**完備性**と呼ばれる.

定理 1.7 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であるとする. このとき, ある実数 $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する (**コーシーの定理**).

この定理の証明は, 微分積分学の教科書等を参照してもらいたい.

定義 1.8 S を集合とし, 正整数 n について, $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$ を実数値関数とする. このとき, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**コーシー列**であるとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, S の任意の元 $x \in S$ および $m, n \geq n_0$ なる任意の正整数 m, n について, 次が成り立つ.

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

コーシー列である関数列は, ある関数に各点収束することは容易に分かる.

補題 1.9 S を集合とし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上の実数値関数列で, コーシー列になっているものとする. このとき, S 上の関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に各点収束する.

<u>証明</u>. $x \in S$ とすると, 関数列のコーシー列の定義より, 実数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である. よって, 実数 $a_x \in \mathbb{R}$ が存在して, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は a_x に収束する. そこで, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = a_x \, (x \in S)$ とすると, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S 上 f に各点収束することが分かる. ■

定理 1.10 S を集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数値関数列で, コーシー列であるものとする. このとき, S 上の関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S 上 f に一様収束する.

<u>証明</u>. 任意の正実数に対して, 正整数 n_0 が存在して, 任意の $x \in S$ および $m, n \geq n_0$ なる正整数 m, n について, 次が成り立つ.

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

ここで, 補題 1.9 より, S 上の実数値関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in S$ について $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となるから, 次が成り立つ.

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

これが任意の正実数 $\varepsilon > 0$ について成り立つから, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S 上 f に一様収束することが分かる. ■

連続関数列に対しては, より強い主張が得られる.

定理 1.11 *m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合とし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の実数値連続関数からなる関数列で, コーシー列であるものとする. このとき, D 上の連続関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D 上 f に一様収束する.*

証明. 定理 1.10 より, 連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D 上のある実数値関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する. このとき, 定理 1.5 より, f は D 上の連続関数になる. ■

ここからは, 特別な関数列である関数項級数について述べる.

定義 1.12 *S を集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数値関数列とする. このとき, 関数 f_n を第 n 項 (n は正整数) とする級数を**関数項級数**と呼び, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ と表す. また, 正整数 n に対して, $\sum_{j=1}^{n} f_j = f_1 + \cdots + f_n$ を第 n **部分和**と呼ぶ. 部分和のなす関数列が S 上各点収束, 一様収束するとき, それぞれ関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が各点収束, 一様収束するという.*

集合 S 上の実数値関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ について, S 上の各点において, 関数の値 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ をとる関数を $|f|$ と表すことにする.

$$|f|(x) = |f(x)|, \quad x \in S. \tag{1.6}$$

定義 1.13 *S を集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数値関数列とする. このとき, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が**一様に絶対収束**するとは, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ が S 上一様収束することである.*

ここで, 絶対収束する級数の性質について述べる.

定理 1.14 *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とする. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束, 即ち, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.*

証明. 任意の正整数 n に対して, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく. すると, 数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であり, 仮定より収束する. よって, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である. 即ち, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, $n_0 \leq m \leq n$ ならば, 次が成り立つ.

$$|t_n - t_m| = t_n - t_m < \varepsilon.$$

よって, 次が得られる.

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| = t_n - t_m < \varepsilon.$$

ゆえに, 数列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列になり, コーシーの定理より収束する. これは, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを意味する. ■

この定理の逆は一般に成り立たない. 実際, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するが, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束しない例がある.

級数が絶対収束するための十分条件として, 優級数を用いる方法がある.

定義 1.15 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負実数列とする. このとき, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**優級数**であるとは, 任意の正整数 n について $|a_n| \leq b_n$ が成り立つことである.

定理 1.16 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負実数列とし, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の優級数であるとする. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する.

証明. 任意の正整数 n について $|a_n| \leq b_n$ であるから, 次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_n.$$

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は非負実数列であり, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するから, ある正実数 $M > 0$ が存在して, 任意の正整数 n に対して, 次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leq M.$$

よって, 次が得られる.

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq M.$$

ここで, 正整数 n に対して, $t_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく. すると, 非負実数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であり, 任意の正整数 n について $t_n \leq M$ が成り立つ. ゆえに, 数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する. $t_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ (n は正整数) であるから, これは級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が絶対収束することを示している. ■

絶対収束する級数が収束することと同様にして, 一様に絶対収束する関数項級数は一様収束することが分かる.

定理 1.17 S を集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上の実数値関数列とする. このとき, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が S 上一様に絶対収束するならば, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は S 上一様収束する.

証明. 任意の正整数 n に対して, $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$ とする. 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は一様に絶対収束するから, S 上の実数値関数 $g : S \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, 正整数 m について, $m \geq n_0$ ならば, S 上の任意の点 $x \in S$ について, 次が成り立つ.

$$|g_m(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

ここで, S 上の任意の点 $x \in S$ について実数列 $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加数列であるから, 任意の正整数 n について $g_n(x) \leq g(x)$ が成り立つ. よって, $n_0 \leq m \leq n$ なる正整数 m, n について, 任意の $x \in S$ に対して, 次が得られる.

$$|g_m(x) - g_n(x)| = g_n(x) - g_m(x) \leq g(x) - g_m(x) = |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

ここで, 任意の正整数 n に対して, $h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ とおく. すると, $n_0 \leq m \leq n$ なる正整数および任意の $x \in S$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} |h_n(x) - h_m(x)| &= |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \\ &\leq |f_{m+1}(x)| + \cdots + |f_n(x)| = g_n(x) - g_m(x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

ところで, S 上の任意の点 $x \in S$ について, 仮定より級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は絶対収束するから, 定理 1.14 よりある実数 $a_x \in \mathbb{R}$ に収束する. 即ち, 数列 $\{h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は a_x に収束する. このとき, S 上の関数 $h : S \longrightarrow \mathbb{R}$ を $h(x) = a_x$ $(x \in S)$ とおくと, $n_0 \leq m$ なる正整数および任意の $x \in S$ について, 次が得られる.

$$|h_m(x) - h(x)| = \lim_{n \to \infty} |h_m(x) - h_n(x)| \leq \varepsilon.$$

ゆえに, 関数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S 上 h に一様収束する. これは, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が S 上 h に一様収束することを意味する. ■

連続関数列から得られる関数項級数については, さらに次のことが得られる.

定理 1.18 m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の実数値連続関数列とし, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が D 上一様に絶対収束するとする. このとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は D 上ある連続関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する.

証明. 定理 1.17 より, D 上の実数値関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在し, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が D 上 f に一様収束する. このとき, 定理 1.5 より, f は連続関数になるから, 主張が得られる. ■

関数項級数が一様に絶対収束するための十分条件として, 級数と同様に優級数を用いるものがある.

定義 1.19 S を集合とし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上の実数値関数列とする. このとき, 非負実数列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ から得られる級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ の**優級数**であるとは, 任意の正整数 n および S 上の任意の点 $x \in S$ に対して, $|f_n(x)| \leq M_n$ が成り立つことである.

定理 1.20 S を集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上の実数値関数列とし, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負実数列とする. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束し, かつ関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ の優級数であるならば, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は S 上ある関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する.

証明. 任意の正整数 n に対して, $L_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k$ とおく. すると, 数列 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であり, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束するから, 数列 $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である. よって, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, $n_0 \leq m \leq n$ なる正整数 m, n に対して, 次が成り立つ.

$$|L_n - L_m| < \varepsilon.$$

ここで, 任意の正整数 n について, $g_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |f_n|$ とする. すると, $n_0 \leq m \leq n$ なる正整数 m, n および $x \in S$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= g_n(x) - g_m(x) = |f_{m+1}(x)| + \cdots + |f_n(x)| \\ &\leq M_{m+1} + \cdots + M_n = L_n - L_m = |L_m - L_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

ところで, S 上の任意の点 $x \in S$ について, 仮定より, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は絶対収束するから, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ とおく. このとき, 任意の正整数 m および $x \in S$ について, 次が成り立つ.

$$g(x) - g_m(x) = \lim_{n\to\infty} (g_n(x) - g_m(x)) \leq \varepsilon.$$

ゆえに, 関数列 $\{g_m\}_{n=1}^{\infty}$ は S 上 g に一様収束する. これは, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が S 上一様に絶対収束することを意味する. ■

定理 1.21 m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の実数値連続関数列とし, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負実数列とする. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束し, かつ関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ の優級数であるならば, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は D 上ある連続関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する.

証明. 定理 1.20 より, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は D 上ある実数値関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する. このとき, 定理 1.5 より f は連続関数である. ■

今までのことは, $\mathbb{R}^l$ (l は正整数) に値をとる関数についても同様に成り立つ. このことを述べるために, $\mathbb{R}^l$ における収束について必要事項をまとめる.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ に対して, $\boldsymbol{a}$ のユークリッドノルム $\|\boldsymbol{a}\|$ は次で与えられる.

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_l^2}. \tag{1.7}$$

このノルムを用いることにより, $\mathbb{R}^l$ の点列の収束や, $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数の収束が定義できる. $\mathbb{R}^l$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^l$ に収束するとは, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ ということである. また, $\mathbb{R}^m$ (m は正整数) の空でない部分集合 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上の関数 $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ について, $x \in D$ が $a \in D$ に近づくとき, 関数 $\boldsymbol{f}(x)$ が $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^l$ に収束するとは, $\displaystyle\lim_{x\to a} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{b}$ ということである. 特に, $\boldsymbol{f}$ が $a \in D$ で連続であるとは, $\displaystyle\lim_{x\to a} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(a)$ となることである.

補題 1.22 l を正整数とし, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ とする.

(1) $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j について, $|a_j| \leq \|\boldsymbol{a}\|$ が成り立つ.

(2) $\|\boldsymbol{a}\| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{l} |a_j|$ が成り立つ.

証明. (1) $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j について, 次が成り立つ.

$$a_j^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_l^2 = \sum_{k=1}^{l} a_k^2.$$

この両辺の平方根をとることにより, 主張が得られる.

(2) 次のことは容易に得られる.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{l} |a_j|^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq l} |a_j||a_k| = \left(\sum_{j=1}^{l} |a_j| \right)^2.$$

この両辺の平方根をとることにより, 主張が成り立つことが分かる. ■

命題 1.23 l を正整数とし, 正整数 n に対して, $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_1^{(n)} \\ \vdots \\ a_l^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ とする. このとき, 点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^l$ に収束することと, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 数列 $\{a_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が a_j に収束することは同値である.

証明. 補題 1.22 (1) より, $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j について, 任意の正整数 n に対して, $0 \leq |a_j^{(n)} - a_j| \leq \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\|$ が成り立つから, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$ であるとき, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, はさみうちの原理により, $\lim_{n\to\infty} |a_j^{(n)} - a_j| = 0$ が成り立つ. 従って, $\lim_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$ が $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について成り立つ.

逆に, 補題 1.22 (2) より, 任意の正整数 n に対して, $0 \leq \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| \leq \sum_{j=1}^{l} |a_j^{(n)} - a_j|$ が成り立つ. ここで, $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j について, $\lim_{n\to\infty} a_j^{(n)} = a_j$ が成り立つとすると, 次が得られる.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} |a_j^{(n)} - a_j| = \sum_{j=1}^{l} \left(\lim_{n\to\infty} |a_j^{(n)} - a_j| \right) = 0.$$

ゆえに, はさみうちの原理により, $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ が得られる. 従って, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$ となる. ■

命題 1.24 m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合とし, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる D 上の関数とする. このとき, $\boldsymbol{f}$ が連続であることと, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について f_j が連続であることは同値である.

<u>証明</u>. $a \in D$ とする. このとき, 補題 1.22 (1) より, $x \in D$ について, $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j に対して, 次が成り立つ.

$$|f_j(x) - f_j(a)| \leq \|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(a)\|.$$

ゆえに, $\boldsymbol{f}$が連続ならば, $\lim_{x \to a} \|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(a)\| = 0$ であるから, はさみうちの原理により, $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j について, 次が得られる.

$$\lim_{x \to a} |f_j(x) - f_j(a)| = 0.$$

よって, $a \in D$ において, f_j は連続である. これが, 任意の $a \in D$ について成り立つから, $1 \leq j \leq l$ なる任意の整数 j について, f_j は D 上連続である.

逆に, 補題 1.22 (2) より, $x \in D$ について, 次が得られる.

$$\|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(a)\| \leq \sum_{j=1}^{l} |f_j(x) - f_j(a)|.$$

いま, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, f_j が連続であるとする. すると, 次が成り立つ.

$$\lim_{x \to a} \sum_{j=1}^{l} |f_j(x) - f_j(a)| = \sum_{j=1}^{l} \left(\lim_{x \to a} |f_j(x) - f_j(a)| \right) = 0.$$

よって, はさみうちの原理により, 次が得られる.

$$\lim_{x \to a} \|\boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(a)\| = 0.$$

よって, $\boldsymbol{f}$は $a \in D$ において連続である. これが, すべての $a \in D$ について成り立つから, $\boldsymbol{f}$は D 上連続である. ■

$\mathbb{R}^l$ (l は正整数) に値をとる関数列についても, 各点収束や一様収束は実数値関数列と同様に定義される.

定義 1.25 *S を集合, l を正整数, $\boldsymbol{f} : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数とし, 任意の正整数 n に対して, S 上の $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数 $\boldsymbol{f}_n : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が与えられているとする. このとき, 関数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 $\boldsymbol{f}$ に* **各点収束** *するとは, 任意の $x \in S$ について, 点列 $\{\boldsymbol{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{f}(x)$ に収束することである.*

$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$ とし, 任意の正整数 n について, $\boldsymbol{f}_n = \begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ \vdots \\ f_l^{(n)} \end{pmatrix}$ とするとき, 命題 1.23 より, 任意の $x \in S$ について, 点列 $\{\boldsymbol{f}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{f}(x)$ に収束することと, $1 \leq j \leq l$ なるすべての

整数 j について, 数列 $\{f_j^{(n)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が $f_j(x)$ に収束することは同値である. ゆえに, 関数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上各点収束することと, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 関数列 $\{f_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上各点収束することは同値である.

定義 1.26 S を集合, l を正整数, $\boldsymbol{f} : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数とし, 任意の正整数 n に対して, S 上の $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数 $\boldsymbol{f}_n : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が与えられているとする. このとき, 関数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 $\boldsymbol{f}$ に**一様収束**するとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, $n \geq n_0$ かつ $x \in S$ ならば, $\|\boldsymbol{f}_n(x) - \boldsymbol{f}(x)\| < \varepsilon$ が成り立つことである.

命題 1.27 S を集合, l を正整数, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix} : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数とし, 任意の正整数 n について, $\boldsymbol{f}_n = \begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ \vdots \\ f_l^{(n)} \end{pmatrix} : S \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が与えられているとする. このとき, 関数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f に一様収束することと, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 関数列 $\{f_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f_j に一様収束することは同値である.

証明. $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 $\boldsymbol{f}$ に一様収束するとする. すると, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ について, 正整数 n_0 が存在して, $n \geq n_0$ なる整数 n および任意の $x \in S$ について, 次が成り立つ.

$$\|\boldsymbol{f}_n(x) - \boldsymbol{f}(x)\| < \varepsilon.$$

ここで, 補題 1.22 (1) より, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, $n \geq n_0$ なる整数 n および任意の $x \in S$ について次が得られる.

$$|f_j^{(n)}(x) - f_j(x)| \leq \|\boldsymbol{f}_n(x) - \boldsymbol{f}(x)\| < \varepsilon.$$

ゆえに, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 関数列 $\{f_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f_j に一様収束する.

逆に, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 関数列 $\{f_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f_j に一様収束するとする. すると, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, $n \geq n_0$ なる整数 n および任意の $x \in S$ に対して, 次が成り立つ.

$$|f_j^{(n)}(x) - f_j(x)| < \frac{\varepsilon}{l}.$$

ここで, 補題 1.22 (2) より, $n \geq n_0$ なる整数 n および任意の $x \in S$ について次が得られる.

$$\|\boldsymbol{f}_n(x) - \boldsymbol{f}(x)\| \leq \sum_{j=1}^{l} |f_j^{(n)}(x) - f_j(x)| < l \cdot \frac{\varepsilon}{l} = \varepsilon.$$

従って, 関数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は S 上 $\boldsymbol{f}$ に一様収束する. ■

$\mathbb{R}^l$ (l は正整数) に値をとる関数列の一様収束を考える場合も, 各関数が連続である場合が重要である.

定理 1.28 m, l を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合とし, 任意の正整数 n について, $\boldsymbol{f}_n : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる連続関数とする. このとき, 関数列 $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数 $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ に一様収束するならば, $\boldsymbol{f}$ は連続関数である.

証明. $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$ とし, 任意の正整数 n について $\boldsymbol{f}_n = \begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ \vdots \\ f_l^{(n)} \end{pmatrix}$ とする. すると, 命題 1.27 より, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 関数列 $\{f_j^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上 f_j に一様収束する. また, すべての正整数 n について, $\boldsymbol{f}_n$ は連続であるから, 命題 1.24 より, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, $f_j^{(n)}$ は連続である. ゆえに, 定理 1.5 より f_j は連続関数である. よって, 再び命題 1.24 より, $\boldsymbol{f}$ は連続である. ■

続いて, $\mathbb{R}^l$ (l は正整数) に値をとる関数列から得られる関数項級数について述べる.

定義 1.29 S を集合, l を正整数, $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数列とする. このとき, 関数 $\boldsymbol{f}_n$ を第 n 項 (n は正整数) とする級数も**関数項級数**と呼び, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ と表す. また, 正整数 n に対して, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{f}_1 + \cdots + \boldsymbol{f}_n$ を第 n **部分和**と呼ぶ.

$\mathbb{R}^l$ (l は正整数) に値をとる関数列から得られる関数項級数についても, 一様な絶対収束を考えることができる.

定義 1.30 S を集合, l を正整数, $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数列とし, 正整数 n について, $\varphi_n(x) = \|\boldsymbol{f}_n(x)\| \ \ (x \in S)$ とする. このとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ が S 上**一様に絶対収束**するとは, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ が S 上一様収束することである.

定理 1.31 S を集合, l を正整数, $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数列とする. このとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ が S 上一様に絶対収束するならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ は S 上一様収束する.

証明. 任意の正整数 n について, $\boldsymbol{f}_n = \begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ \vdots \\ f_l^{(n)} \end{pmatrix}$ とする. すると, 補題 1.22 (1) より, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j および任意の $x \in S$ について, 次が成り立つ.

$$|f_j^{(n)}(x)| \leq \|\boldsymbol{f}_n(x)\|.$$

任意の正整数 n について, $\varphi_n(x) = \|\boldsymbol{f}_n(x)\|$ $(x \in S)$ とし, $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$ $(x \in S)$ とすると, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ は S 上一様収束するから, 定理 1.17 の証明と同様にして, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 n_0 が存在して, $n_0 \leq m \leq n$ なる正整数 m, n について, 任意の $x \in S$ に対して, 次が成り立つ.

$$g_n(x) - g_m(x) < \varepsilon.$$

ここで, $1 \leq j \leq l$ なる整数 j および正整数 n について, $h_j^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_j^{(k)}$ とおく. すると, $n_0 \leq m \leq n$ なる正整数 m, n および任意の $x \in S$ について, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
|h_j^{(n)}(x) - h_j^{(m)}(x)| &= |f_j^{(m+1)}(x) + \cdots + f_j^{(n)}(x)| \\
&\leq |f_j^{(m+1)}(x)| + \cdots + |f_j^{(n)}(x)| \\
&\leq \|\boldsymbol{f}_{m+1}(x)\| + \cdots + \|\boldsymbol{f}_n(x)\| = g_n(x) - g_m(x) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって, 定理 1.17 の証明と同様にして, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ は S 上一様収束する. 従って, 命題 1.27 より, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ は S 上一様収束する. ■

定理 1.32 *m, l を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合, $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の $\mathbb{R}^l$ に値をとる連続関数列とし, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ が D 上一様に絶対収束するとする. このとき, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ は D 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとる連続関数 $\boldsymbol{f}$ に D 上一様収束する.*

証明. 定理 1.31 より, D 上の $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数 $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が存在して, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ が D 上 $\boldsymbol{f}$ に一様収束する. このとき, 定理 1.28 より, $\boldsymbol{f}$ は連続関数である. ■

$\mathbb{R}^l$ (l は正整数) に値をとる関数列から得られる関数項級数の一様収束の判定にも, 優級数は有効である.

定義 1.33 *S を集合, l を正整数とし, $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数列とする. このとき, 非負実数列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ から得られる級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ の* **優級数** *であるとは, 任意の正整数 n および S 上の任意の点 $x \in S$ に対して, $\|\boldsymbol{f}_n(x)\| \leq M_n$ が成り立つことである.*

定理 1.34 S を集合, l を正整数とし, $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとる関数列とし, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負実数列とする. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束し, かつ関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ の優級数であるならば, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ は S 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとるある関数 $\boldsymbol{f}$ に一様収束する.

証明. 任意の正整数 n について, $\boldsymbol{f}_n = \begin{pmatrix} f_1^{(n)} \\ \vdots \\ f_l^{(n)} \end{pmatrix}$ とする. すると, 補題 1.22 (1) より $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 任意の正整数 n および $x \in S$ に対して, 次が成り立つ.

$$|f_j^{(n)}(x)| \leq \|\boldsymbol{f}_n(x)\| \leq M_n.$$

ゆえに, $1 \leq j \leq l$ なるすべての整数 j について, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ の優級数である. よって, 定理 1.20 より, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ は S 上ある関数 $f_j : S \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する. 従って, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{pmatrix}$ とおくと, 命題 1.27 より, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ は S 上 $\boldsymbol{f}$ に一様収束する. ■

定理 1.35 m, l を正整数, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合, $\{\boldsymbol{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとる連続関数列とし, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負実数列とする. このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が収束し, かつ関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ の優級数であるならば, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ は D 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとるある連続関数 $\boldsymbol{f}$ に一様収束する.

証明. 定理 1.34 より, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{f}_n$ は D 上 $\mathbb{R}^l$ に値をとるある関数 $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ に一様収束する. このとき, 定理 1.28 より $\boldsymbol{f}$ は連続関数である. ■

（　余　　　白　）