和歌山大学教育学部

2011年度 微分方程式 (後期火曜4限)

講義資料

目 次

この講義資料について

これは, 2011 年度和歌山大学教育学部で開講される「微分方程式」の講義を円滑に進めるための資料である. 資料といっても, 定義や定理, 計算結果などの羅列や箇条書きではなく, 教科書の代わりになることを目指して, 必要に応じて証明をつけている. この講義を履修する場合は, 一つ一つの定理や式変形に対して, ノートで実際に手を動かすことにより, 内容の理解を深めてもらいたい.

都合により, この講義資料は講義と同時進行で作成していく予定である. 新たに原稿を付け加える場合には, 講義時に連絡する予定である. また, 原稿が更新されるごとに目次も更新されるので, 必要に応じて表紙を差し替えてもらえると幸いである.

これも都合により, 本文中にほとんど図を載せない予定である. また, ページ数の具合により, 随所に余白を挿入する予定である. 講義時に板書等で与えた図等をその余白に書き込むのもよいであろう.

なお, この講義資料の最新版を以下の Web ページにて公開する予定である.

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kikuchi/parttime/wakayama2011/de/2011de.html

最終版は 2012 年 1 月末か 2 月初めに完成する予定である.

1　微分方程式と初等解法.

微分方程式とは, 平たく言うと, ある関数と, その関数の “導関数たち” の関係式である. その関係式は, しばしば自然法則により得られることがある. その自然法則は, 幾多の観測によって得られたり, あるいは, 他の自然法則から導かれたりする. そして, 微分方程式を解くとは, 微分方程式の解, 即ち, その微分方程式をみたす関数を (ある一定の条件の下で) 求めることである. 解を求めることにより, 例えば, これから起こる現象を “理論的” に知ることができるのである. そこで, まず, 比較的容易に解くことができる微分方程式の例をとり上げることにする.

1.1　微分方程式とその例.

最初に, 自然界に現れる微分方程式のうち, 力学から題材をとることにする.

例 1.1 (ばねに繋がれた物体の運動). 水平に置かれたばねの一方に物体を繋ぎ, 他方を固定した状態を考える. 物体をばねが自然な長さとなる点からばねが伸縮する方向に動かしたとき, ある一定の範囲において, 物体には自然な長さからの距離に比例して, 動いた向きとは反対の向きに力が働く. このことは, 通常フックの法則と呼ばれる. いま, 物体の質量を m とし, ばねが自然な長さから伸びる向きを正として, 自然な長さから x だけ伸縮する方向に物体が動いているとする. (ばねが縮んでいるときは, $x < 0$ として, ばねが $|x|$ だけ縮んでいると理解する.) すると, フックの法則より, ばねから物体に $-kx$ の力が働く. ただし, k は正実数 (ばね定数などと呼ばれる) であり, $-$ が付いているのは, 物体が移動した向きと逆向きの力が働いていることを意味する. 時刻を t とすると, 次の関係式 (運動方程式) が成り立つ.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{1.1}$$

これは微分方程式の 1 つの例である. ここで, 例えばある時刻における物体の位置と速度が分かっているときの微分方程式の解を考える. 話を簡単にするために, 時刻 0 における位置と速度が分かっている場合を考える.

まず, 時刻 0 における物体の位置が a, 速度が 0 である場合を考える. このとき, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とし, $x = a\cos\omega t$ とすると, $t = 0$ のとき $x = a\cos 0 = a$, $\dfrac{dx}{dt} = -a\omega\sin 0 = 0$ であり,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(a\cos\omega t) = ma\cdot\omega^2\cdot(-\cos\omega t) = -ma\cdot\frac{k}{m}\cdot\cos\omega t = -kx.$$

ゆえに, $x = x(t) = a\cos\omega t$ は微分方程式 (1.1) の条件 $x(0) = a$, $\dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ をみたす解である.

次に, 時刻 0 において, 物体の位置が 0, 速度が b とする. このときは, $x = \frac{b}{\omega}\sin\omega t$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \frac{b}{\omega}\cdot\omega\cos\omega t = b\cos\omega t$ であり, 特に, $t = 0$ のとき $\frac{dx}{dt} = b\cos 0 = b$ となる. さらに,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{b}{\omega}\sin\omega t\right) = m\frac{b}{\omega}\cdot\omega^2\cdot(-\sin\omega t) = -k\cdot\frac{b}{\omega}\sin\omega t = -kx.$$

よって, $x = x(t) = \frac{b}{\omega}\sin\omega t$ は微分方程式 (1.1) の条件 $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = b$ をみたす解である.

より一般的に, 時刻 0 における物体の位置が a, 速度が b である状態を考える. このとき, $x = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t$ とおくと,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(a\cos\omega t) + m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{b}{\omega}\sin\omega t\right) = (-ka\cos\omega t) + \left(-k\frac{b}{\omega}\sin\omega t\right) = -kx.$$

また,

$$\begin{aligned} x(0) &= a\cos 0 + \frac{b}{\omega}\sin 0 = a, \\ \frac{dx}{dt}(0) &= a\cdot\omega\cdot(-\sin 0) + \frac{b}{\omega}\cdot\omega\cdot\cos 0 = b. \end{aligned}$$

よって, $x = x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t$ は微分方程式 (1.1) の条件 $x(0) = a$, $\frac{dx}{dt}(0) = b$ をみたす解である. なお, この解は条件 $x(0) = a$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ をみたす解と, 条件 $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = b$ をみたす解の和である. これは, 微分方程式 (1.1) が x と $\frac{d^2x}{dt^2}$ の斉次 1 次式, 即ち, 定数項のない 1 次式で表されていることと関係する.

問 1.2 微分方程式 (1.1) の $x(0) = a$, $\frac{dx}{dt}(0) = b$ をみたす実軸全体で定義された実数解が $x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t$ 以外に存在しないことを, 以下の方針により示せ.

(1) $y = y(t) = \left(x(t) - \left(a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t\right)\right)^2 + \frac{m}{k}\left(\frac{dx}{dt}(t) - (-a\omega\sin\omega t + b\cos\omega t)\right)^2$ とし, $x(t)$ が条件をみたす微分方程式 (1.1) の解であるとき, $\frac{dy}{dt} = 0$ が成り立つことを示す.

(2) (1) を用いて, $x(t) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t$ であることを示す.

例 1.3 (空気抵抗を考慮した垂直落下運動). 地球上の物体は, その質量 m が地球に比べて十分小さいとき, 地上からある一定の高さまでは, 地球の重力によりほぼ一定の加速度 (重力加速度)g がかかる. 空気抵抗等を一切考えなければ, ある高さ $h > 0$ において静止した物体の支えを静かに外すと, その時刻から時間の 2 乗に比例して物体が鉛直方向下

向きに地上まで動く．具体的には，物体の支えを外した時刻を 0 とすると，時刻 t における物体の地上からの高さは $x = h - \dfrac{1}{2}gt^2$，物体の速度は $v = -gt$ で与えられる．これは，微分方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -mg$ の条件 $x(0) = h$, $v(0) = \dfrac{dx}{dt}(0) = 0$ をみたす解を求めることにより容易に得られる．実際，条件を積分定数と考えて，定数函数 $-g$ を積分することにより速度 v が求められ，もう 1 回積分すれば高さ x が得られる．

それでは，空気抵抗を考慮したらどうなるであろうか．空気抵抗は，物体の形状や空気の濃度，風力などに依存するが，簡単のため，物体の支えを外す地点から地上まで空気の濃度はほぼ一定とし，無風であるとする．このとき，物体には速度 v に比例し，速度と逆向きの抵抗力が発生する．このことにより，速度 v は次の関係式をみたすことがわかる．

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv. \tag{1.2}$$

ここで，k は時刻に物体の位置依存せず，物体のみにより決まる正実数とする．時刻 0 において，物体が静止した状態から静かに支えを外すとする．すると，$v(0) = 0$ と考えられる．この条件の下で，微分方程式 (1.3) は次のように解くことができる．微分方程式を整理すると，$m\dfrac{dv}{dt} + kv = -mg$ となる．この両辺に $e^{\frac{k}{m}t}$ をかけると，

$$m\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{k}{m}t}v\right) = me^{\frac{k}{m}t}\frac{dv}{dt} + m\cdot\frac{k}{m}e^{\frac{k}{m}}v = e^{\frac{k}{m}t}\left(m\frac{dv}{dt} + kv\right) = -mge^{\frac{k}{m}t}.$$

この両辺を m でわり，条件 $v(0) = 0$ の下で積分すると，

$$e^{\frac{k}{m}t}v = -g\int_0^t e^{\frac{k}{m}s}ds = -g\left[\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}s}\right]_0^t = -\frac{mg}{k}(e^{\frac{k}{m}t} - 1).$$

ゆえに，

$$v = -\frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

確かに，$v(0) = -\dfrac{mg}{k}(1-1) = 0$ であり，$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{mg}{k}\cdot\left(-\dfrac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right) = -ge^{\frac{k}{m}t}$ であるから，物体は下向きに加速する．しかし，$v > -\dfrac{mg}{k}$ であるから，速度の大きさ $|v|$ は $\dfrac{mg}{k}$ を超えない．さらに，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v = -\frac{mg}{k}$ となることより，十分な時間が経てば，物体はほぼ速度 $-\dfrac{mg}{k}$ で落下することがわかる．この速度は，重力と空気による抵抗力が釣り合う速度である．

問 1.4 上のように空気抵抗を考慮した下で，自由落下ではなく，時刻 0 において物体が鉛直方向に速度 $-v_0$ で落下しているとする．ただし，$v_0 > 0$ とする．このとき，物体は落下するのだが，微分方程式 (1.2) を条件 $v(0) = -v_0$ の下で解くことにより，時刻 $t \geq 0$ における物体の速度を求めることができる．そこで，物体は下向きに加速するのか，減速するのか，v_0 の値により分類せよ．特に，下向きに加速から減速，あるいは減速から加速に転じることがあるかどうか述べよ．

例 1.5 (中心力の下での物体の運動). 宇宙空間において, 2 つの天体の間には**万有引力**が働く. 特に, その 2 つの天体が恒星とその周りを回る惑星で, 惑星の質量が恒星の質量に比べて圧倒的に小さい場合 (例えば, 太陽と地球) を考える. すると, 恒星と惑星全体の重心はほぼ恒星の中心にあると見做される. この恒星が固定されているとして, 恒星と惑星に対する他の天体からの万有引力がほぼ無視できるほど小さいとすると, 惑星には, 恒星の中心への引力が働いていると考えられる. 具体的には, 以下のようにする. 恒星の中心を原点として, 惑星が時刻 t において $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に存在するとする. $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ で $\boldsymbol{x}$ の大きさ, 即ち, 恒星と惑星の距離を表すとする. さらに, 恒星の質量を M, 惑星の質量 m とすると, 正実数 $G > 0$ が存在して, 次の関係が成り立つ (**万有引力の法則**).

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -\frac{GMm\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3}. \tag{1.3}$$

($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (零ベクトル) ならば, 惑星は恒星の中心にあり, 恒星に呑み込まれている. よって, 惑星として存在し得ない.) この G を**万有引力定数**と呼ぶ. $r = \|\boldsymbol{x}\|$ とおくと, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ は $\boldsymbol{x}$ と同じ向きの単位ベクトル, 即ち, 大きさ 1 のベクトルであるから, 万有引力の大きさだけ考えると, それは恒星と惑星の距離の逆二乗, 即ち, 距離の -2 乗に比例していることがわかる. $g = GM$ とし, (1.3) を整理すると, 以下のようになる.

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -\frac{g\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3}. \tag{1.4}$$

惑星の速度 $\boldsymbol{v}$ は, 位置の導関数 $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ で表される. このとき, 位置と速度の外積を用いて定義される量 $\boldsymbol{l} = m(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})$ を惑星の**角運動量**と呼ぶ. 外積の性質より, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}$ いずれとも直交する. よって, 時刻 t における惑星の角運動量は, その時刻の位置ベクトル $\boldsymbol{x}$, 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ により張られる平面に垂直なベクトル量である. ただし, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$ が平行である場合, 外積の性質より角運動量は零ベクトルである.

角運動量が時間によりどのように変化するか考える. ここで, $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right) = \dfrac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$ である. よって, 次が得られる.

$$\frac{d(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{x} \times \left(-\frac{g\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{1.5}$$

従って,

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d(m(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}))}{dt} = \boldsymbol{0}. \tag{1.6}$$

これは**角運動量保存の法則**と呼ばれる. ここで, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ について標準的な内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ とする. (1.5) より $\boldsymbol{l}_0 = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}$ は時刻 t に依らず一

定であるから,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{l}_0)=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}))=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})=0.$$

これは, 惑星がある時刻 t_0 において, 位置ベクトルと平行でない速度ベクトルで運動しているとき, 任意の時刻において, 惑星は恒星を中心として時刻 t_0 における位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ によって張られる平面の法線方向に運動していないことを意味している. 即ち, 惑星はこの平面上で運動していることが分かる.

そこで, 座標を取り換えることにより, 恒星が原点にあり, 惑星の時刻 t における位置が $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ であるとする. すると, 惑星の速度は $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ である. このとき, $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})=\dfrac{1}{2}(x_1v_2-x_2v_1)$ を惑星の**面積速度**と呼ぶ. これは, 原点と惑星の中心を結ぶ線分が単位時間当たりに走査する (符号付き) 面積のことである. (この値の絶対値を面積速度と呼ぶこともある.) 面積速度は, 位置ベクトルと速度ベクトルの第 3 成分を 0 として, ともに $\mathbb{R}^3$ の元であると考えたときの角運動量の $\dfrac{1}{2m}$ 倍である. よって, (1.5) あるいは (1.6) により, 惑星の面積速度は, 時刻 t に依らず一定である. これを, **面積速度一定の法則**あるいは**ケプラーの第二法則**と呼ぶ.

ここからは, 惑星が平面上で位置ベクトルと平行でない速度ベクトルで運動しているとし, 必要ならば座標の符号を変えることにより, ある時刻 t_0 において $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}=x_1v_2-x_2v_1>0$ であるとする. ここで, 位置を原点に関する極座標で表すとする. 即ち,

$$\begin{cases}x_1=r\cos\theta,\\ x_2=r\sin\theta.\end{cases}\tag{1.7}$$

特に, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ である. このとき,

$$\begin{cases}v_1=\dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dt},\\ v_2=\dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dt}.\end{cases}\tag{1.8}$$

さらに,

$$\begin{cases}\dfrac{dv_1}{dt}=\dfrac{d^2r}{dt^2}\cos\theta-2\dfrac{dr}{dt}\sin\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dt}-r\cos\theta\cdot\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2-r\sin\theta\cdot\dfrac{d^2\theta}{dt^2},\\ \dfrac{dv_2}{dt}=\dfrac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+2\dfrac{dr}{dt}\cos\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dt}-r\sin\theta\cdot\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2+r\cos\theta\cdot\dfrac{d^2\theta}{dt^2}.\end{cases}\tag{1.9}$$

ここで,

$$\begin{aligned}0&<x_1v_2-x_2v_1\\ &=r\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)-r\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)=r^2\frac{d\theta}{dt}.\end{aligned}$$

よって, $\dfrac{d\theta}{dt} > 0$ である. $\dfrac{d\theta}{dt}$ は**角速度**と呼ばれる. さらに, $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は平行でないから, (1.4) より,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{r^2}, \tag{1.10}$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0. \tag{1.11}$$

(1.11) の両辺に r をかけると,

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$$

ゆえに,

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = c\ (\text{一定}). \tag{1.12}$$

時刻 t_0 において $\dfrac{d\theta}{dt} > 0$ であるから, $c > 0$ である. これを (1.10) に代入すると,

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{g}{r^2}. \tag{1.13}$$

$\dfrac{d\theta}{dt} > 0$ より, 任意の時刻 t において局所的に $\theta = \theta(t)$ の逆関数 $t = \psi(\theta)$ が存在し, $t = \psi(\theta)$ と関数 $r = r(t)$ を合成することにより, r を (一般角)θ の関数と考えることができる. このとき,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2}{c}\frac{dr}{dt}. \tag{1.14}$$

ここで, $u = \dfrac{1}{r}$ とする. すると,

$$\frac{du}{d\theta} = \left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}. \tag{1.15}$$

ゆえに,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{1}{c}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{r^2}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}. \tag{1.16}$$

これを, (1.13) に代入し, 整理すると,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{g}{c^2}. \tag{1.17}$$

ここで, $u_0 = \dfrac{g}{c^2}$ (定数関数) とし, $\widetilde{u} = u - u_0$ とおくと, $\dfrac{d^2u_0}{d\theta^2} = 0$ となることより,

$$\frac{d^2\widetilde{u}}{d\theta^2} + \widetilde{u} = \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) - \left(\frac{d^2u_0}{d\theta^2} + u_0\right) = \frac{g}{c^2} - \frac{g}{c^2} = 0. \tag{1.18}$$

これは, 例 1.1 に現れた微分方程式と同じ形をしているから, 実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$\widetilde{u} = \alpha \cos\theta + \beta \sin\theta. \tag{1.19}$$

ここで, $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ とし, $\cos\theta_1 = \dfrac{\alpha}{\delta}$, $\sin\theta_1 = \dfrac{\beta}{\delta}$ をみたす実数 θ_1 をとると, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{r} = u = \frac{g}{c^2} + \delta\cos(\theta - \theta_1) \tag{1.20}$$

さらに, $h = \dfrac{c^2}{g}$, $\varepsilon = \dfrac{c^2\delta}{g} \geq 0$ とおく．すると, $u = \dfrac{1}{h}(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_1))$ となり, $1 + \varepsilon(\theta - \theta_1) > 0$ なる範囲で θ が動くとき, $r = \dfrac{1}{u} = \dfrac{h}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_1)}$ である．特に, $\varepsilon = 0$ ならば, $r = h$, $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{c}{h^2}$ となり, 惑星は恒星の周りを等速円運動する．ここで, $\widetilde{\theta} = \theta - \theta_1$, $\widetilde{x}_1 = r\cos\widetilde{\theta}$, $\widetilde{x}_2 = r\sin\widetilde{\theta}$ とする．これは, 平面 $\mathbb{R}^2$ において, x_1 軸および x_2 軸を原点に関して θ_1 回転変換したものを, $\widetilde{x}_1$ 軸および $\widetilde{x}_2$ 軸とし, 惑星の位置を $\widetilde{x}_1\widetilde{x}_2$ 平面上で観測していることに対応する．このとき, $h = r(1 + \varepsilon\cos\widetilde{\theta})$ であるから,

$$\begin{aligned}
h^2 &= r^2(1 + \varepsilon\cos\widetilde{\theta})^2 \\
&= r^2(1 + 2\varepsilon\cos\widetilde{\theta} + \varepsilon^2\cos^2\widetilde{\theta}) \\
&= r^2(1 + 2\varepsilon\cos\widetilde{\theta}(1 + \varepsilon\cos\widetilde{\theta}) - \varepsilon^2\cos^2\widetilde{\theta}) \\
&= r^2 + 2h\varepsilon\widetilde{x}_1 - \varepsilon^2\widetilde{x}_1^2 = (1 - \varepsilon^2)\widetilde{x}_1^2 + 2h\varepsilon\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2^2.
\end{aligned}$$

特に, $0 < \varepsilon < 1$ のとき,

$$(1 - \varepsilon^2)\left(\widetilde{x}_1 + \frac{h\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + \widetilde{x}_2^2 = h^2 + \frac{h^2\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{h^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

ゆえに, $a = \dfrac{h}{1 - \varepsilon^2}$, $b = \dfrac{h}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$, $a_0 = \dfrac{h\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$ とおくと,

$$\frac{(\widetilde{x}_1 + a_0)^2}{a^2} + \frac{\widetilde{x}_2^2}{b^2} = 1. \tag{1.21}$$

$0 < \varepsilon < 1$ より $\sqrt{1 - \varepsilon^2} > 1 - \varepsilon^2$. よって, 惑星は長径 (長軸の長さの半分) が $a = \dfrac{h}{1 - \varepsilon^2}$, 短径 (短軸の長さの半分) が $b = \dfrac{h}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$ なる楕円上を周回する．なお, $\varepsilon = 0$ のときは, この特別な場合である．これは, **ケプラーの第一法則**と呼ばれる．ちなみに, $\varepsilon = 1$ のとき,

$$\widetilde{x}_2^2 = -2h\left(\widetilde{x}_1 - \frac{h}{2}\right). \tag{1.22}$$

このときは, 惑星の軌道は$\widetilde{x}_1$軸を軸とする放物線となる．そして, $\varepsilon > 1$の場合は, $0 < \varepsilon < 1$のときと同様にして,

$$(\varepsilon^2 - 1)\left(\widetilde{x}_1 - \frac{h\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}\right)^2 - \widetilde{x}_2^2 = \frac{h^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

よって, $a = \dfrac{h}{\varepsilon^2 - 1}$, $b = \dfrac{h}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$, $a_0 = \dfrac{h\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$ とおくと,

$$\frac{(\widetilde{x}_1^2 - a_0)^2}{a^2} - \frac{\widetilde{x}_2^2}{b^2} = 1. \tag{1.23}$$

これは, 2つの焦点が$\widetilde{x}_1$軸にある双曲線の方程式である．双曲線の方程式が表す曲線は2本からなるが, 惑星はどちらに存在し得るのだろうか．ここで, sの関数$\dfrac{hs}{1 + \varepsilon s} = \dfrac{h}{\varepsilon} - \dfrac{\frac{h}{\varepsilon^2}}{\frac{1}{\varepsilon} + s}$を考えると, これは, $s > -\dfrac{1}{\varepsilon}$で単調増加であり, $1 + \varepsilon\cos\widetilde{\theta} > 0$より$\cos\widetilde{\theta} > -\dfrac{1}{\varepsilon}$であるから,

$$\widetilde{x}_1 = \frac{h\cos\widetilde{\theta}}{1 + \varepsilon\cos\widetilde{\theta}} \leq \frac{h}{1 + \varepsilon} < \frac{h\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} = a_0.$$

従って, 惑星は双曲線のうち$\widetilde{x}_1 < a_0$なる部分を動く．

このεを**離心率**という．ちなみに, $0 < \varepsilon < 1$のとき, $\varepsilon = \dfrac{a_0}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $\varepsilon > 1$のときは, $\varepsilon = \dfrac{a_0}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2}$が成り立つ．なお, $\varepsilon \geq 1$のときは, 一度恒星に最接近した後は遠ざかるのみであるので, もはや惑星とは呼べないかもしれない．

以下では, 話を簡単にするために, 座標軸を回転させ, 基準となる時刻を変更することにより, $\theta_1 = \theta(0) = 0$, 即ち, 時刻0において惑星が恒星に最接近しているとする．さらに, $0 \leq \varepsilon < 1$とする．惑星は周回軌道上を動くが, この運動において面積速度は一定であるから, 楕円の面積πabを面積速度でわることにより, この周回軌道の惑星の運動の周期Tが分かる．ところで, (1.12)より面積速度は$\dfrac{1}{2}(x_1v_2 - x_2v_1) = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{c}{2}$である．よって,

$$T = \frac{2\pi ab}{c} = \frac{2\pi}{c} \cdot \frac{h}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{2\pi h^2}{c(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{1.24}$$

ゆえに,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 h^4}{c^2(1 - \varepsilon^2)^3} = \frac{4\pi^2 h}{c^2} \cdot \left(\frac{h}{1 - \varepsilon^2}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{g}a^3. \tag{1.25}$$

従って, 恒星の周りの回る惑星の周期の二乗はその楕円軌道の長径の三乗に比例する．これは, **ケプラーの第三法則**と呼ばれる．

ここで, 惑星の力学的エネルギー E を考える．それは, 運動エネルギー $E_m = \dfrac{1}{2}m\|\boldsymbol{v}\|^2$ と, 恒星との間の万有引力に対する位置エネルギー $E_p = -\dfrac{GMm}{r} = -\dfrac{gm}{r}$ の和 $E = E_m + E_p$ である．ただし, 位置エネルギー E_m は, 無限遠で 0 であるようにとってある．すると, (1.8), (1.12) および (1.14) より,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\|^2 &= \left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\right)^2 \\
&= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right) = \frac{c^2}{r^4}\left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right).
\end{aligned}
$$

ここで, $r = \dfrac{h}{1+\varepsilon\cos\theta}$ であり,

$$
\frac{dr}{d\theta} = \frac{h\varepsilon\sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}.
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\|^2 &= \frac{c^2(1+\varepsilon\cos\theta)^4}{h^4}\left(\frac{h^2\varepsilon^2\sin^2\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^4} + \frac{h^2}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}\right) \\
&= \frac{g}{h}(1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2).
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$
\begin{aligned}
E = E_m + E_p &= \frac{1}{2}m\|\boldsymbol{v}\|^2 - \frac{gm}{r} \\
&= \frac{gm}{2h}(1+2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2) - \frac{gm}{h}(1+\varepsilon\cos\theta) = \frac{gm}{2h}(\varepsilon^2-1).
\end{aligned}
$$

従って, 惑星の力学的エネルギーが負であることと, $0 \leq \varepsilon < 1$ は同値であるから, それは惑星が恒星の周りの周回軌道上を動くことと同値である．即ち, 惑星が当に「惑星」であるためには, 力学的エネルギーが負であることが必要十分である．惑星に限らず, 宇宙空間の物体が圧倒的に大きい恒星の影響を強く受けているとすると, その影響から逃れるためには, 力学的エネルギーを非負にするだけの運動エネルギー, 簡単に言えば, 「速さ」が必要なのである．

（　余　　白　）

1.2　初等解法その１ - 変数分離型 - .

ここからは, 解法がよく知られている微分方程式の型を与えて, その解法を述べる.

そもそも微分方程式とは, 変数 $x_1, \ldots, x_n$ の関数 f とその (高階なものも含めた) 導関数たちの関係式のことである. この関数 f は**未知関数**と呼ばれる. 未知関数の変数が 1 個のときと, 2 個以上のときに, 微分方程式をそれぞれ**常微分方程式**, **偏微分方程式**と呼ぶ. この講義で主として扱うのは, 常微分方程式である.

常微分方程式は, しばしば, m を正整数として, $\mathbb{R}^{m+2}$ 内の開集合 $D \subset \mathbb{R}^{m+2}$ 上で定義された関数 $\varPhi(x, y, u_1, \ldots, u_m)$ を用いて, 次のように表される.

$$\varPhi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0. \tag{1.26}$$

(1.26) における x を**独立変数**, y を**従属変数**ともいう.

場合によっては, 未知関数も複数同時に考える場合もある. また, 微分方程式も複数同時に考えることもある. 未知関数が複数であるとき, 多くの場合複数の微分方程式を同時に扱う. そのような複数の微分方程式の集まりを**連立微分方程式系**という. 連立微分方程式系の中には, 例 1.5 の (1.3) 等のように, 未知関数を $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix}$ などとして, 未知関数 1 個の微分方程式と同じような形で表されるものもある.

微分方程式に本質的に現れる未知関数の高階導関数たちの階数の最大値, 即ち, 未知関数を微分した回数の最大値を, 微分方程式 (1.26) の**階数**と呼ぶ. 例えば, 例 1.1 の方程式 (1.1) は 2 階, 例 1.3 の方程式 (1.2) は 1 階微分方程式である. 連立微分方程式系では, そこに現れる微分方程式の階数の最大値を, その微分方程式系の階数と呼ぶ. 2 階以上の微分方程式を高階微分方程式と呼ぶことがある. 高階微分方程式は, 未知関数を増やすことにより, 1 階連立微分方程式系に変形することができる. 例えば, 例 1.1 の方程式 (1.1) は, $x_1 = x$, $x_2 = \dfrac{dx}{dt}$ とおくことにより, 次のように変形される.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= -\dfrac{k}{m} x_1. \end{cases} \tag{1.27}$$

ここからしばらくは, 単独の 1 階常微分方程式を扱う. 即ち, $\mathbb{R}^3$ の開集合 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上で定義された関数 $\varPhi(x, y, u)$ により与えられる, 次の微分方程式を考える.

$$\varPhi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{1.28}$$

方程式 $\varPhi(x,y,u)=0$ を u について解くことができ, $\mathbb{R}^2$ の開集合 $D_0\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義される関数 $F(x,y)$ によって $u=F(x,y)$ と表されたとき, 次の微分方程式を**正規型**と呼ぶ.

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y). \tag{1.29}$$

これに対して, 微分方程式 (1.28) を**非正規型**と呼ぶことがある. 非正規型の場合, 未知関数 f の $(x_0,y_0)\in D_0\,(y_0=f(x_0))$ における微分係数 $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$ が 1 つに定まらない場合もある. 例えば, 次の微分方程式を考える.

$$y-\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

この微分方程式の解 $y=f(x)$ で, $f(0)=1$ をみたすものを求める. すると, $\dfrac{dy}{dx}(0)=\pm 2$ であり, 点 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の近傍で, $f(x)=(x+1)^2$, $f(x)=(x-1)^2$ がそれぞれ $\dfrac{dy}{dx}(0)=2$, $\dfrac{dy}{dx}(0)=-2$ をみたす微分方程式の解 $y=f(x)$ である. 一般に, 微分方程式について, 求める解がみたすべき点, 即ち, $y_0=f(x_0)$ なる点 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in D_0$ のことを微分方程式の**初期値**あるいは**初期条件**と呼ぶ. そして, 与えられた初期値をみたす微分方程式の解を考えることを, 微分方程式の**初期値問題**と呼ぶ. 非正規型の微分方程式では, 与えられた初期値に対して, 未知関数の微分係数になり得る実数が複数存在することがある. これは, 非正規型の微分方程式が, 正規型の微分方程式より扱いが難しいことの表れの 1 つである.

正規型の微分方程式の中で, 解が求められるものの 1 つに**変数分離型**がある. これは, 次のように与えられる.

定義 1.6 $I_x, I_y\subset\mathbb{R}$ を開区間とし, $\varphi\,:\,I_x\longrightarrow\mathbb{R}$, $\psi\,:\,I_y\longrightarrow\mathbb{R}$ を連続関数で, I_y 上 $\psi(y)\neq 0$ とする. このとき, 次のような微分方程式を**変数分離型**であるという.

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y). \tag{1.30}$$

$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in I_x\times I_y$ が与えられたとき, 微分方程式 (1.30) の解 $y=f(x)$ で, $y_0=f(x_0)$ をみたすものを求める. ここで, 次の関数 $F\,:\,I_x\times I_y\longrightarrow\mathbb{R}$ を考える.

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds-\int_{y_0}^{y}\frac{1}{\psi(t)}dt. \tag{1.31}$$

明らかに, $F(x_0,y_0)=0$ である. また, $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\varphi(x)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\dfrac{1}{\psi(y)}$ であり, I_y 上で $\psi(y)\neq 0$ であるから, $I_x\times I_y$ 上で $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ となる. よって, 陰関数定理 (補足資料 1.1, 定理 1.2) よ

り, $x_0 \in I_{x,0} \subset I_x$, $y_0 \in I_{y,0} \subset I_y$ なる開区間 $I_{x,0}, I_{y,0} \subset \mathbb{R}$ が存在して, $I_{x,0}$ 上の C^1 級関数 $f : I_{x,0} \longrightarrow \mathbb{R}$ で, 次をみたすものがただ 1 つ存在する.

(i) $f(x_0) = y_0$.

(ii) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I_{x,0} \times I_{y,0}$ なる $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について, $y = f(x)$ と $F(x,y) = 0$ が同値である.

(iii) $\dfrac{df}{dx} = -\dfrac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = \varphi(x)\psi(f(x))$.

(i), (iii) より, この関数 $y = f(x)$ が微分方程式 (1.30) の初期値問題 $y_0 = f(x_0)$ の (局所的な) ただ 1 つの解であることが分かる.

例 1.7 $I_x = I_y = (0, +\infty)$ (半直線) とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}. \tag{1.32}$$

この微分方程式の初期値 $f(1) = 1$ なる解 $y = f(x)$ を求める. (1.31) に当たる関数 $F : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ は次のようになる.

$$F(x,y) = \int_1^x \frac{ds}{s} - \int_1^y \frac{dt}{t^2} = [\log s]_1^x + \left[\frac{1}{t}\right]_1^y = \log x + \frac{1}{y} - 1. \tag{1.33}$$

$y = f(x)$ は $F(x,y) = 0$ をみたすから, $1 \in (0, +\infty)$ の十分小さい近傍 $1 \in I_x, I_y \subset (0, +\infty)$ をとると, $y = f(x) = \dfrac{1}{1 - \log x}$ は I_x 上 $f(1) = 1$ なる微分方程式 (1.32) の解である. この場合, $I_{x,0} = (0, e)$, $I_{y,0} = (0, +\infty)$ ととることができる.

問 1.8 $(0, e)$ 上の関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{1 - \log x}$ が初期値 $f(1) = 1$ なる微分方程式 (1.32) の解であることを, 直接計算することにより確かめよ.

なお, $\psi(y_0) = 0$ なる y_0 が I_y に存在するとき, $f(x) = y_0$ (定数関数) は微分方程式 (1.30) の初期値 $y_0 = f(x_0)$ をみたす解である. しかし, 初期値をみたす解が 1 つとは限らない.

例 1.9 $I_x = I_y = \mathbb{R}$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}. \tag{1.34}$$

ここで, 任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ について, $t^{\frac{2}{3}} = (t^{\frac{1}{3}})^2$ とする. このとき, $\varphi(x) = 1$, $\psi(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ とすると, $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$ と表される. この微分方程式 (1.34) の初期値 $f(0) = 0$ なる解を考える. 変数分離型の微分方程式の上の解法の通り, 広義積分に注意しながら解くと, $y = f(x) = x^3$ なる解が得られる. ところが, $\psi(0) = 3 \cdot 0^{\frac{2}{3}} = 0$ より, $y = f(x) = 0$ (定数関数) も微分方程式 (1.34) の解であることが直接計算することにより分かる. これは, 初期値問題の解が一意的でないことを意味する.

問 1.10 (1) $y = f(x) = x^3$, $y = f(x) = 0$ (定数関数) が微分方程式 (1.34) の $f(0) = 0$ なる解であることを各自確認せよ.

(2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で与えられるものとする.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

このとき, $y = f(x)$ は微分方程式 (1.34) の $f(0) = 0$ なる解であることを示せ. 他にも, $f(0) = 0$ をみたす (1.34) の解 $y = f(x)$ が存在する. そのようなものを 1 つ与えよ.

次に, 変数分離型の微分方程式に帰着できる例として, 同次型と呼ばれる微分方程式を考える.

定義 1.11 $J \subset \mathbb{R}$ を開区間とし, $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ を $F(t) \neq t\,(t \in J)$ なる連続関数とする. このとき, 次の形で与えられる微分方程式は**同次型**あるいは**斉次型**と呼ばれる.

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.35}$$

いま, $x_0 \neq 0$ かつ $\dfrac{y_0}{x_0} \in J$ なる点 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ をとり, $y_0 = f(x_0)$ なる微分方程式 (1.35) の解を考える. ここで, $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと, y が x の関数として微分可能ならば, u も $x \neq 0$ なる x において微分可能である. そして, $y = xu$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = F(u).$$

よって, 次の微分方程式が得られる.

$$\frac{du}{dx} = \frac{F(u) - u}{x}. \tag{1.36}$$

ここで, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$, $\psi(u) = F(u) - u$, $D = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \neq 0,\, u \in J\}$ とおくことにより, 微分方程式 (1.36) は変数分離型であることが分かる. さらに, $u_0 = \dfrac{y_0}{x_0}$ とおくと, $\begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in D$ であるから, 微分方程式 (1.36) の初期値 $u_0 = g(x_0)$ をみたす解 $u = g(x)$ を (局所的に) 求めることができる. そこで, $f(x) = xu = xg(x)$ とすれば, $y = f(x)$ は微分方程式 (1.35) の初期値 $y_0 = f(x_0)$ をみたす解である.

例 1.12 $J = (0, +\infty)$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}. \tag{1.37}$$

この右辺は，$x \neq 0$ なる x について，$\dfrac{x+y}{x} = 1 + \dfrac{y}{x}$ であるから，$F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ を $F(t) = 1 + t \, (t \in J)$ とすると，J 上で $F(t) \neq t$ であり，微分方程式 (1.37) は同次型である．ここで，$u = \dfrac{y}{x}$ とおくと，微分方程式 (1.37) は次のように変形される．

$$\frac{du}{dx} = \frac{F(u) - u}{x} = \frac{1}{x}. \tag{1.38}$$

いま，微分方程式 (1.37) の初期値 $f(1) = 1$ なる解 $y = f(x)$ を求める．これは，微分方程式 (1.38) の初期値 $g(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ なる解 $u = g(x)$ を求めることに帰着される．(1.38) の右辺には u が現れないから，右辺を初期値 $g(1) = 1$ の下で積分することにより，$g(u) = [\log s]_1^x + 1 = \log x + 1$ が得られる．よって，微分方程式 (1.37) の $f(1) = 1$ なる解は $y = f(x) = xg(x) = x(\log x + 1)$ である．

問 1.13 $y = f(x) = x(\log x + 1)$ が微分方程式 (1.37) の $f(1) = 1$ なる解であることを，直接計算することにより確認せよ．

開区間 $J \subset \mathbb{R}$ において，$F(t) = t$ なる $t \in J$ が存在する場合でも，微分方程式 (1.35) を考えることができる．いま，$u_0 \in J$ を $F(u_0) = u_0$ なる実数とする．このとき，$f(x) = u_0 x$ (定数項のない 1 次関数．ただし，$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) とすると，$x \neq 0$ なる実数 x について，$\dfrac{y}{x} = u_0$ であるが，$\dfrac{df}{dx} = u_0 = F(u_0) = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ となる．よって，$y = f(x) = u_0 x$ は微分方程式 (1.35) の $f(x_0) = u_0 x_0$ なる解である．

（　余　　白　）

1.3 初等解法その 2 - 1 階線形常微分方程式 - .

ここでは, 1 階線形常微分方程式の解法を説明する. この型の微分方程式に帰着できる微分方程式についても述べる.

定義 1.14 m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{m+2}$ を空でない開集合とし, $\Phi(x, y, u_1, \ldots, u_m)$ を D 上で定義された関数で, $y, u_1, \ldots, u_m$ について 1 次式であるとする. このとき, 次の微分方程式を**線形常微分方程式**と呼ぶ.

$$\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0. \tag{1.39}$$

特に, Φ が $y, u_1, \ldots, u_m$ について斉次, 即ち, 定数項のない 1 次式であるとき, この微分方程式が**斉次**であるといい, そうでないとき, **非斉次**であるという.

ここからしばらくは, 正規型 1 階線形常微分方程式について考える.

定理 1.15 $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. いま, $a \in I$ とする. このとき, 任意の実数 $b \in \mathbb{R}$ に対して, 次の微分方程式の $f(a) = b$ なる解 $y = f(x)$ が I 上ただ 1 つ存在する.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)y + \psi(x). \tag{1.40}$$

その解は次のように表される.

$$f(x) = b\exp\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right) + \int_a^x \exp\left(\int_t^x \varphi(s)ds\right)\psi(t)dt, \quad x \in I. \tag{1.41}$$

<u>証明</u>. 与えられた微分方程式は次のように変形される.

$$\frac{dy}{dx} - \varphi(x)y = \psi(x).$$

この両辺に $\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right)$ をかけると, 次のようになる.

$$\frac{dy}{dx}\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right) - y\varphi(x)\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right) = \psi(x)\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right).$$

この左辺は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right) - y\varphi(x)\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(y\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right)\right).\end{aligned}$$

ゆえに, 次の微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{dx}\left(y\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right)\right) = \psi(x)\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right). \tag{1.42}$$

ここで, 求める解 $y = f(x)$ が $f(a) = b$ をみたすとすると, 上の両辺を a から x まで積分することにより, 以下のようになる.

$$f(x)\exp\left(-\int_a^x \varphi(t)dt\right) - b = \int_a^x \exp\left(-\int_a^t \varphi(s)ds\right)\psi(t)dt.$$

従って, 求める解 $y = f(x)$ は次の形になる.

$$\begin{aligned} f(x) &= b\exp\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right) + \exp\left(\int_a^x \varphi(s)ds\right)\int_a^x \exp\left(-\int_a^t \varphi(s)ds\right)\psi(t)dt \\ &= b\exp\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right) + \int_a^x \exp\left(\int_t^x \varphi(s)ds\right)\psi(t)dt. \end{aligned}$$

■

例 1.16 $I = \mathbb{R}$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = y + x. \tag{1.43}$$

いま, $b \in \mathbb{R}$ を任意の実数とする. $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ として, $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = x\ (x \in I = \mathbb{R})$ ととることにより, 上の微分方程式の $f(0) = b$ なる解 $y = f(x)$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} f(x) &= b\left(\exp\int_0^x dt\right) + \int_0^x \exp\left(\int_t^x ds\right)tdt = be^x + \int_0^x t\exp(x-t)dt \\ &= be^x + \int_0^x (x-t)e^t dt = be^x + x\int_0^x e^t dt - \int_0^x te^t dt \\ &= be^x + x(e^x - 1) - [te^t]_0^x + \int_0^x e^t dt = be^x + x(e^x-1) - xe^x + (e^x - 1) \\ &= (b+1)e^x - x - 1. \end{aligned}$$

問 1.17 $y = f(x) = (b+1)e^x - x - 1$ が微分方程式 (1.43) の $f(0) = b$ なる解であることを, 直接計算することにより確認せよ.

微分方程式 (1.40) において, 微分方程式が斉次, 即ち, I 上恒等的に $\psi(x) = 0$ であるとする.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)y. \tag{1.44}$$

すると, $f(a) = b$ なる解は以下のようになる.

$$f(x) = b\exp\left(\int_a^x \varphi(t)dt\right), \quad x \in I. \tag{1.45}$$

ところで, この微分方程式 (1.44) は変数分離型でもある. よって, $b \neq 0$ のときは, 次のように解くこともできる. いま, $I_y = \{y \in \mathbb{R};\, |y-b| < |b|\}$ とする. すると, 次の関数 $F : I \times I_y \longrightarrow \mathbb{R}$ を考えることができる.

$$F(x,y) = \int_a^x \varphi(s)ds - \int_b^y \frac{dt}{t} = \int_a^x \varphi(s)ds - \log|y| + \log|b|, \quad (x,y) \in I \times I_y.$$

このとき, $a \in U \subset I$ なる開区間 U および $b \in V \subset I_y$ なる開区間 V が存在して, 微分方程式 (1.44) の解 $y = f(x)$ は $U \times V$ 上 $F(x,y) = 0$ をみたすから, $\log|y| = \log|b| + \displaystyle\int_a^x \varphi(s)ds$ となる. よって, $|y| = |b|\exp\left(\displaystyle\int_a^x \varphi(s)ds\right)$ が成り立つが, $y \in V \subset I_y$ のとき, y と b の符号は一致するから, 次のことが得られる.

$$y = f(x) = b\exp\left(\int_a^x \varphi(s)ds\right).$$

どちらの解法でも同じ関数を得るが, 変数分離型として解くときは, 1 階線形常微分方程式として解くときに比べて, 次のような問題点がある.

(1) 1 階線形常微分方程式として解くときは, 解 $y = f(x)$ は φ の定義域 I 上の関数であることが保証されるが, 変数分離型として解くときは, その解法そのものとしては, 初期値 (a,b) に対して, 解 $y = f(x)$ は $a \in U \subset I$ なる, ある近傍 U 上で定義できることしか保証できない.

(2) 初期値 (a,b) について, $b = 0$ であれば, そもそも変数分離型としては解の存在を保証できない.

変数分離型の微分方程式の解法はとても実用的であるが, 厳密な議論をするときには, 必ずしも優れた解法とは言えないのである.

ここからは, 1 階線形常微分方程式に帰着できる微分方程式の例について述べる.

定理 1.18 $I \subset \mathbb{R}$ を開区間, α を $0, 1$ でない実数とし, $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. いま, $a \in I$ とし, $b > 0$ を任意の正実数とする. このとき, $a \in U \subset I$ なる開区間 U が存在して, 次の微分方程式の $f(a) = b$ なる解 $y = f(x)$ が U 上ただ 1 つ存在する (**ベルヌーイの微分方程式**).

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)y + \psi(x)y^\alpha. \tag{1.46}$$

さらに, α が偶数であれば, 0 でない任意の実数 b について, $f(a) = b$ なる微分方程式の解が, $a \in U \subset I$ なる, ある開区間 U 上ただ 1 つ存在する.

証明. $b > 0$ より, 正実数 $c = b^{1-\alpha} > 0$ が存在する. そこで, $u = y^{1-\alpha}$ とおく. すると, $\dfrac{du}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\dfrac{dy}{dx}$ となり, 次が得られる.

$$\frac{du}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}(\varphi(x)y + \psi(x)y^\alpha) = (1-\alpha)(\varphi(x)y^{1-\alpha} + \psi(x)).$$

よって, u は次の微分方程式をみたす.

$$\frac{du}{dx} = (1-\alpha)(\varphi(x)u + \psi(x)). \tag{1.47}$$

これは, 1 階線形常微分方程式であるから, 定理 1.15 より, I 上で $g(a) = c$ なる微分方程式 (1.47) の解が I 上ただ 1 つ存在する. g は連続であり, $c > 0$ であるから, $a \in U \subset I$ なる開区間 U が存在して, $u = g(x) > 0\,(x \in U)$ となる. そこで, $f(x) = g(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ とおくと, $y = f(x)$ は $f(a) = b$ をみたす微分方程式 (1.46) の解である.

さらに, α が偶数であるときは, $1-\alpha$ は奇数であるから, 0 でない実数 b に対して, 実数 $c = b^{1-\alpha}$ が存在する. このとき, b と c の符号は一致する. $b > 0$ のときは既に解の存在が述べられている. そこで, $b < 0$ とする. すると, $c < 0$ である. いま, $u = y^{1-\alpha}$ とすると, $g(a) = c$ なる微分方程式 (1.47) の解が I 上ただ 1 つ存在する. g は連続であり, $c < 0$ であるから, $a \in U \subset I$ なる開区間 U が存在して, $u = g(x) < 0\,(x \in U)$ が成り立つ. よって, $f(x)^{1-\alpha} = g(x)$ をみたす実数 $f(x)$ が存在するから, U 上の関数 $f(x) = g(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ を定義することができ, $y = f(x)$ は $f(a) = b$ をみたす微分方程式 (1.46) の解である. ■

例 1.19 $I = \mathbb{R}$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = y - xy^2. \tag{1.48}$$

いま, b を 0 でない実数とし, $f(0) = b$ なる上のび分方程式の解を求める. $c = b^{1-2} = b^{-1}$ とし, $u = y^{1-2} = y^{-1}$ とすると, u は次の微分方程式をみたす.

$$\frac{du}{dx} = (1-2)(u-x) = -u + x. \tag{1.49}$$

これは, 1 階線形常微分方程式であり, $g(0) = c = b^{-1}$ なる微分方程式 (1.49) の解 $u = g(x)$ は以下のようになる.

$$\begin{aligned} g(x) &= c\exp\left(\int_0^x (-1)dt\right) + \int_0^x \exp\left(\int_t^x (-1)ds\right)tdt \\ &= \frac{1}{b}e^{-x} + \int_0^x te^{(-x+t)}dt = \frac{1}{b}e^{-x} + e^{-x}\left([te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt\right) \\ &= \frac{1}{b}e^{-x} + e^{-x}(xe^x - (e^x - 1)) = \frac{b+1}{b}e^{-x} + x - 1. \end{aligned}$$

ここで, $h(x) = (b+1)e^{-x} + b(x-1)\ \ (x \in I = \mathbb{R})$ とする. すると, $h(0) = (b+1)e^0 + b\cdot(-1) = (b+1) - b = 1 > 0$ である. また, $h'(x) = -(b+1)e^{-x} + b$ であるから, $b = -1$ のときは, $h'(x) = b = -1$ となり, $b \neq -1$ のとき, $h'(x) = 0$ とすると, $e^{-x} = \dfrac{b}{b+1}$ となる. よって, $-1 < b < 0$ のとき, $h'(x) = 0$ となる実数 x は存在せず, $h'(0) = -(b+1)e^0 + b = -1 < 0$ であり, h' は連続であるから, 任意の実数について $h'(x) < 0$ である. $b < -1$, あるいは $b > 0$

なるときは, $\dfrac{b}{b+1} > 0$ であるから, $x_0 = \log\dfrac{b+1}{b}$ とすると $h'(x_0) = -(b+1)e^{-x_0} + b = 0$ となる．よって, $(b+1)e^{-x_0} = b$ であるから, $h(x_0) = b + b(x_0 - 1) = bx_0$ である．さらに, $h''(x) = (b+1)e^{-x}$ であるから, $b > 0$ のときは, h' は狭義単調増加であり, $x < x_0$ のとき $h'(x) < 0$ であり, $x > x_0$ のとき $h'(x) > 0$ となるが, $h'(0) = -1 < 0$ より $x_0 > 0$ となる．そして, $x = x_0$ で h は極小になり, 極小値は $bx_0 > 0$ となる．ゆえに, 任意の実数 x について $h(x) > 0$ である．$b < -1$ のときは, h' は狭義単調減少となり, $x < x_0$ のとき $h'(x) > 0$ であり, $x > x_0$ のとき $h'(x) < 0$ となるが, $h'(0) = -1 < 0$ より $x_0 < 0$ である．さらに, $x = x_0$ で h は極大になり, 極大値は $bx_0 > 0$ となる．ところで, $\lim_{x\to+\infty} h(x)$, $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ を求めると, 次のようになる (下で問とする).

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \begin{cases} +\infty, & b > 0, \\ -\infty, & b < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \begin{cases} +\infty, & b > 0 \text{ または } -1 \leq b < 0, \\ -\infty, & b < -1. \end{cases}$$

$h(0) = 1 > 0$ であるから, $-1 \leq b < 0$ のとき, $h(\beta) = 0$ なる正実数 $\beta > 0$ がただ 1 つ存在する．また, $b < -1$ のときは, $x_0 < 0$ より, $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ をみたす $\alpha < x_0 < 0$ なる実数 α および正実数 $\beta > 0$ がそれぞれ 1 つずつ存在する．そこで, 開区間 $U \subset I = \mathbb{R}$ を以下のようにとる．

$$U = \begin{cases} I = \mathbb{R}, & b > 0, \\ (-\infty, \beta), & -1 \leq b < 0, \\ (\alpha, \beta), & b < -1. \end{cases}$$

すると, $x \in U$ のとき $h(x) > 0$ であり, $g(x) \neq 0$ となる．従って, $f(x) = g(x)^{-1}$ が存在して, $y = f(x)$ は $f(0) = b$ なる微分方程式 (1.48) の U 上の解である．

問 1.20 b を 0 でない実数とする．このとき, $\mathbb{R}$ 上の関数 $h(x) = (b+1)e^{-x} + b(x-1)$ について, $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ および $\lim_{x\to-\infty} h(x)$ を求めよ．

問 1.21 $y = f(x) = \dfrac{b}{(b+1)e^{-x} + b(x-1)}$ が微分方程式 (1.48) の $f(0) = b$ なる解であることを, 直接計算することにより確認せよ．

なお, ベルヌーイの微分方程式において, $\alpha = 0$ のときは, 微分方程式は 1 階線形常微分方程式になり, $\alpha = 1$ のときは, 斉次 1 階線形常微分方程式になる．

次の微分方程式は, 一般に初等的に解くことができるわけではないが, 解が 1 つ見つかると, 他の解を求めることができるというものである．

定理 1.22 $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間, $\varphi, \psi, \rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とし, ρ は恒等的には 0 でないとする. いま, $a \in I$ とし, 次の微分方程式を考える (**リッカチ型**).

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \rho(x). \tag{1.50}$$

ここで, $a \in I_1 \subset I$ なる開区間 I_1 と, 上の微分方程式の I_1 上の解 $y = f_1(x)$ が与えられているとする. このとき, $b \neq f_1(a)$ なる任意の実数 b に対して, $a \in U \subset I_1$ なる, ある開区間 U において, 上の微分方程式の $f(a) = b$ なる U 上の解がただ 1 つ存在する.

証明. $y = f_1(x)$ は微分方程式 (1.50) の解であるから, 次が成り立つ.

$$\frac{df_1}{dx}(x) = \varphi(x)f_1(x)^2 + \psi(x)f_1(x) + \rho(x), \quad x \in I_1.$$

ここで, $u = y - f_1$ とおく. すると, u について次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx}(y - f_1(x)) \\ &= (\varphi(x)y^2 + \psi(x)y + \rho(x)) - (\varphi(x)f_1(x)^2 + \psi(x)f_1(x) + \rho(x)) \\ &= \varphi(x)(y^2 - f_1(x)^2) + \psi(x)(y - f_1(x)) \\ &= \varphi(x)(y - f_1(x))(y + f_1(x)) + \psi(x)(y - f_1(x)) \\ &= \varphi(x)u(u + 2f_1(x)) + \psi(x)u.\end{aligned}$$

よって, u について, 次の微分方程式が得られる.

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x)u^2 + (2\varphi(x)f_1(x) + \psi(x))u. \tag{1.51}$$

これはベルヌーイの微分方程式である. $\alpha = 2$ は偶数であり, $b - f_1(a) \neq 0$ であるから, $a \in U \subset I_1$ なる, ある開区間 U において, $g(a) = b - f_1(a)$ なる微分方程式 (1.51) の u 上の解がただ 1 つ存在する. 従って, $f(x) = g(x) + f_1(x)$ とすれば, $y = f(x)$ は $f(a) = b$ なる微分方程式 (1.50) の U 上の解である. ■

例 1.23 $I = \mathbb{R}$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 2y - 3. \tag{1.52}$$

この微分方程式は変数分離型であるが, ここではリッカチ型と考えて解く. まず, $f_1(x) = 1$ (定数関数) を考える. すると, 次が成り立つ.

$$\frac{df_1}{dx}(x) = 0 = 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = f_1(x)^2 + 2f_1(x) - 3.$$

ゆえに, $y = f_1(x) = 1$ は微分方程式 (1.52) の解である．そこで, $u = y - f_1$ とおく．すると, u は次の微分方程式をみたす.

$$\frac{du}{dx} = u^2 + (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2)u = u^2 + 4u. \tag{1.53}$$

これは (変数分離型でもあるが) ベルヌーイの微分方程式であり, $\alpha = 2$ は偶数である．いま, b を $b \neq 1 = f_1(0)$ なる実数とする．すると, $b_1 = b - 1 = b - f_1(0) \neq 0$ である．そこで, $v = u^{1-2} = u^{-1}$ とする．すると, v は次の微分方程式をみたす.

$$\frac{dv}{dx} = (1 - 2)(4v + 1) = -4v - 1. \tag{1.54}$$

ここで, $c = \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{1}{b-1}$ とおく．このとき, $h(0) = c = \dfrac{1}{b-1}$ なる微分方程式 (1.54) の解 $v = h(x)$ は以下のものである.

$$\begin{aligned}
h(x) &= c \exp\left(\int_0^x (-4)dt\right) + \int_0^x \exp\left(\int_t^x (-4)ds\right) \cdot (-1)dt \\
&= \frac{1}{b-1} e^{-4x} - \int_0^x e^{-4(x-t)} dt = \frac{1}{b-1} e^{-4x} - e^{-4x} \int_0^x e^{4t} dt \\
&= \frac{1}{b-1} e^{-4x} - e^{-4x} \left[\frac{1}{4} e^{4t}\right]_0^x = \frac{1}{b-1} e^{-4x} - \frac{1}{4} e^{-4x}(e^{4x} - 1) \\
&= \frac{b+3}{4(b-1)} e^{-4x} - \frac{1}{4} = \frac{(b+3)e^{-4x} - (b-1)}{4(b-1)}.
\end{aligned}$$

ここで, $k(x) = (b+3)e^{-4x} - (b-1)\ \ (x \in I = \mathbb{R})$ とおく．すると, $k(0) = (b+3)e^0 - (b-1) = 4 > 0$ である．また, $b = -3$ のとき, $k(x) = ((-3) + 3)e^{-4x} - ((-3) - 1) = 4 > 0$ である. $b \neq 1, -3$ とすると, $k(x) = 0$ のとき, $e^{-4x} = \dfrac{b-1}{b+3}$ となる．よって, $-3 < b < 1$ のとき, $k(x) = 0$ となる実数 x は存在しない．さらに, $k(0) = 4 > 0$ であり, k は連続であるから, 任意の実数 x について $k(x) > 0$ である. $b < -3$, あるいは $b > 1$ のとき, $x_0 = \dfrac{1}{4} \log \dfrac{b+3}{b-1}$ とすると, $k(x_0) = 0$ となる. $b > 1$ のとき, $b + 3 > b - 1 > 0$ より $\dfrac{b+3}{b-1} > 1$ となるから, $x_0 > 0$ である. $b < -3$ のときは, $b - 1 < b + 3 < 0$ であるから, $\dfrac{b+3}{b-1} < 1$ となり, $x_0 < 0$ となる．ところで,

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = -(b-1), \quad \lim_{x \to -\infty} k(x) = \begin{cases} +\infty, & b > 1 \text{ または } -3 < b < 1, \\ -\infty, & b < -3. \end{cases}$$

$b \neq 1, -3$ のとき, k は I 上狭義単調な関数であるから, $k(x) = 0$ となる実数 x は存在してもただ 1 つである．そこで, 開区間 $U \subset I = \mathbb{R}$ を次のようにとる.

$$U = \begin{cases} (-\infty, x_0), & b > 1, \\ I = \mathbb{R}, & -3 \leq b < 1, \\ (x_0, +\infty), & b < -3. \end{cases}$$

すると, $x \in U \subset I$ なる任意の実数 x について $k(x) > 0$ となることがわかる. ゆえに, $h(x) = \dfrac{1}{4(b-1)}k(x) = \dfrac{(b+3)e^{-4x} - (b-1)}{4(b-1)} \neq 0$ が成り立つ. このことにより, U 上の関数 $u = g(x) = h(x)^{-1} = \dfrac{4(b-1)}{(b+3)e^{-4x} - (b-1)}$ が $g(0) = b - 1 = b_1$ なる微分方程式 (1.53) の U 上の解であることがわかる. 従って, $f(0) = b$ なる微分方程式 (1.52) の U 上の解は次のように表される.

$$
\begin{aligned}
y = f(x) = g(x) + f_1(x) &= \frac{4(b-1)}{(b+3)e^{-4x} - (b-1)} + 1 \\
&= \frac{4(b-1) + ((b+3)e^{-4x} - (b-1))}{(b+3)e^{-4x} - (b-1)} = \frac{(b+3)e^{-4x} + 3(b-1)}{(b+3)e^{-4x} - (b-1)}.
\end{aligned}
$$

特に, $b = -3$ のとき, $f(x) = \dfrac{3((-3)-1)}{-((-3)-1)} = -3 = b$ (定数関数) である.

問 1.24 上の微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 2y - 3$ を考える.
(1) $y = -3$ (定数関数) がこの微分方程式の解であることを用いて, リッカチ型の微分方程式の解法により, $b \neq -3$ なる実数 b に対して, $f(0) = b$ なる微分方程式の解 $y = f(x)$ を求めよ.
(2) 変数分離型の微分方程式の解法により, $b \neq 1, -3$ なる実数 b に対して, $f(0) = b$ なる解 $y = f(x)$ を求めよ.

最後に, 非正規型の微分方程式で初等的に解くことができるものの例を挙げる.

定理 1.25 $J \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする. いま, 次の微分方程式を考える (**クレーロー型**).

$$
y = x\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{1.55}
$$

この微分方程式には, 任意の $c \in J$ について, 次の形の解が存在する.

$$
y = cx + \varphi(c), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.56}
$$

この形の解を**一般解**と呼ぶ. さらに, φ が C^2 級で, $\varphi''(c) \neq 0\ \ (c \in J)$ とする. $c \in J$ をパラメーターとし, $y = cx + \varphi(c)$ と, この両辺を c で偏微分した $0 = x + \varphi'(c)$ を連立させて, x, y の連立方程式と考えて得られる解を $(x(c), y(c))$ と表すとする. この $x(c), y(c)$ はともに c について C^1 級であり, c を消去して関数 $y = f(x)$ が得られるとき, これも微分方程式の解である. この形の解を**特異解**と呼ぶ.

<u>証明</u>. まず, 一般解について考える. $c \in J$ とし, $y = f(x) = cx + \varphi(c) \quad (x \in \mathbb{R})$ とすると, $\dfrac{dy}{dx} = c$ であるから, 次のことが成り立つ.

$$y = cx + \varphi(c) = x\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

ゆえに, $y = f(x) = cx + \varphi(c)$ は確かに微分方程式 (1.55) の解である.

次に, φ が C^2 級で, $\varphi''(c) \neq 0 \quad (c \in J)$ のとき, ある空でない開区間 $\subset \mathbb{R}$ 上で微分方程式 (1.55) の特異解が得られることを示す. そのために, $c \in J$ として, x, y の次の連立方程式の解を考える.

$$\begin{cases} y &= cx + \varphi(c), \\ 0 &= x + \varphi'(c). \end{cases}$$

この連立方程式の解を $(x(c), y(c))$ と表すことにする. すると, $(x(c), y(c))$ は直線 $y = cx + \varphi(c)$ 上の点であり, その直線の傾きは c である. また, $0 = x(c) + \varphi'(c)$ より, $\dfrac{dx}{dc} = -\varphi''(c)$ である. さらに, $y(c) = cx(c) + \varphi(c)$ より, 次が得られる.

$$\frac{dy}{dc} = x(c) + c\frac{dx}{dc} + \varphi'(c), \quad c \in J.$$

ここで, $0 = x(c) + \varphi'(c)$ であるから, $\dfrac{dy}{dc} = c\dfrac{dx}{dc}$ が得られる. 特に, $x(c), y(c)$ は C^1 級である. また, J は開区間であるから, $x'(c)$ の符号は一定であり, $I = \{x(c) \in \mathbb{R}\,;\, c \in J\}$ とすると, $I \subset \mathbb{R}$ は空でない開区間となり, c は I 上の C^1 級関数と見做される. よって, y は x に関する I 上の関数となり, 導関数は次のようになる.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dc} \cdot \frac{dc}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dc}}{\dfrac{dx}{dc}} = c.$$

ゆえに, 以下のことが得られる.

$$y(c) = cx(c) + \varphi(c) = x(c)\frac{dy}{dx} + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

従って, $c \in J$ をパラメーターとする曲線 $\{(x(c), y(c))\,;\, c \in J\}$ は微分方程式 (1.55) の解を表す曲線である. ■

上の議論により, 特異解 $y = f(x)$ 上の点 $(x(c), y(c))$ における接線は, 傾き c の直線, 即ち, 直線 $y = cx + \varphi(c)$ に他ならないことが分かる. これは, 特異解を表す曲線が, 一般解を表す曲線の**包絡線**であることを意味している. なお, 一般解と特異解を, その接点でつないだ曲線も, 微分方程式の解を表している.

例 1.26 $J=\mathbb{R}$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$y = x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \tag{1.57}$$

関数 $\varphi(t)=-t^2$ は C^2 級であり, $\varphi''(t)=-2\neq 0$ である. まず, 一般解を考える. 任意の $c\in J=\mathbb{R}$ について, $y=cx-c^2$ は微分方程式 (1.57) の解である. 次に, 特異解を求める. $y=cx-c^2$ の両辺を c で偏微分すると, $0=x-2c$. よって, x,y に関する次の連立方程式が得られる.

$$\begin{cases} y &= cx-c^2, \\ 0 &= x-2c. \end{cases}$$

第 2 式より $c=\dfrac{x}{2}$. これを第 1 式に代入すると, 次のようになる.

$$y=\frac{x}{2}\cdot x-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4}.$$

ゆえに, $y=f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ が微分方程式 (1.57) の特異解である.

問 1.27 上の微分方程式 $y=x\dfrac{dy}{dx}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ を考える.

(1) $y=f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ が上の微分方程式の解であることを直接計算することにより確認せよ.

(2) 放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上の点 $(2c,c^2)$ $(c\in\mathbb{R})$ における接線の方程式 $y=f^{(c)}(x)$ を求め, それが上の微分方程式の解となっていることを示せ.

1.4 初等解法その 3 - 完全微分型 - .

ここでは, 今までとは表され方が違う微分方程式を扱う.

$D \subset \mathbb{R}^2$ を空でない開集合とし, $\varphi, \psi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を恒等的には 0 でない連続関数とする. このとき, 次の形の微分方程式を考える.

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = 0. \tag{1.58}$$

これは, 次のような 2 通りの考え方により微分方程式と見做される. まず, D 内の点 $(x_0, y_0) \in D$ が与えられているとする. いま, $\psi(x_0, y_0) \neq 0$ とする. このとき, 1 つの考え方は, "形式的に" $\psi(x,y)dx$ で "わる" ことにより, 次の微分方程式を表していると考えるというものである.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}. \tag{1.59}$$

もう 1 つの考え方は, 正実数 $\delta > 0$ および $(-\delta, \delta)$ 上の C^1 級写像 $c = \begin{pmatrix} c^{(x)} \\ c^{(y)} \end{pmatrix} : (-\delta, \delta) \longrightarrow D$ で, $c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\dfrac{dc}{dt}(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in (-\delta, \delta))$ かつ次をみたすものを考えるというものである.

$$\varphi(c^{(x)}(t), c^{(y)}(t))\frac{dc^{(x)}}{dt}(t) + \psi(c^{(x)}(t), c^{(y)}(t))\frac{dc^{(y)}}{dt}(t) = 0, \quad t \in (-\delta, \delta). \tag{1.60}$$

このとき, $\dfrac{dc^{(x)}}{dt}(0) = 0$ とすると, $\psi(x_0, y_0)\dfrac{dc^{(y)}}{dt}(0) = 0$ となり, $\dfrac{dc^{(y)}}{dt}(0) = 0$ が成り立つが, これは $\dfrac{dc}{dt}(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に反する. よって, $\dfrac{dc^{(x)}}{dt}(0) \neq 0$ となる. ゆえに, t は x_0 の近傍で定義される関数 τ により $t = \tau(x)$ と表され, $c^{(y)}$ と合成することにより, x_0 の近傍で y は x の関数 $y = f(c) = c^{(y)}(\tau(x))$ と表される. この f を求めることが, 微分方程式 (1.58) を解くということと理解される. このとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を求めると, 次のようになる.

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy}{dt}(t) \cdot \frac{dt}{dx}(x) = \frac{\dfrac{dy}{dt}(t)}{\dfrac{dx}{dt}(t)} = -\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}.$$

よって, (1.59) を考えることと (1.60) を考えることは本質的に同じことである. 従って, 微分方程式 (1.58) に対する 2 つの考え方に大きな差はない. 状況に応じて, 理解しやすい考え方で微分方程式を捉えればよいのである. なお, $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ のときは, x を y の関数で表すと理解すればよい.

微分方程式 (1.58) は, 任意の φ, ψ に対して, 初等的に解くことができるわけではない. 初等的に解くことができるものの中で最も典型的なものは**完全微分型**と呼ばれるものである. 話を簡単にするために, $D=\mathbb{R}^2$ とする.

定義 1.28 $\varphi,\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. いま, $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数 $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y)=\varphi(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y)=\psi(x,y)$ が成り立つとする. このとき, 次の微分方程式を**完全微分型**, あるいは**全微分型**と呼ばれる.

$$\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy=0. \tag{1.61}$$

いま, $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ を $\psi(x_0,y_0)\neq 0$ なる点とする. ここで 正実数 $\delta>0$ および $(-\delta,\delta)$ 上の写像 $c=\begin{pmatrix} c^{(x)} \\ c^{(y)} \end{pmatrix}$ で, $c(0)=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, かつ次の微分方程式をみたすものとする.

$$\varphi(c^{(x)}(t),c^{(y)}(t))\frac{dc^{(x)}}{dt}(t)+\psi(c^{(y)}(t),c^{(y)}(t))\frac{dc^{(y)}}{dt}(t)=0, \quad t\in(-\delta,\delta). \tag{1.62}$$

いま, $\varphi(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y)$, $\psi(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y)$ であるから, この微分方程式 (1.62) は次のようになる.

$$\frac{\partial U}{\partial x}(c^{(x)}(t),c^{(y)}(t))\frac{dc^{(x)}}{dt}(t)+\frac{\partial U}{\partial y}(c^{(x)}(t),c^{(y)}(t))\frac{dc^{(y)}}{dt}(t)=0.$$

よって, 次のことが得られる.

$$\frac{d}{dt}U(c^{(x)}(t),c^{(y)}(t))=0.$$

ゆえに, c が表す曲線 $\{(c^{(x)}(t),c^{(y)}(t))\in\mathbb{R}^2\,;\,t\in(-\delta,\delta)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の次の部分集合 C に含まれる.

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,U(x,y)=U(x_0,y_0)\}. \tag{1.63}$$

逆に, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 C が (x_0,y_0) の近傍で微分方程式 (1.62) の解を表す曲線になっていることを確認する. $\mathbb{R}^2$ 上の関数 F を $F(x,y)=U(x,y)-U(x_0,y_0)\ \ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$ とすると, $C\subset\mathbb{R}^2$ は次のように表される.

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,F(x,y)=0\}.$$

$F(x_0,y_0)=U(x_0,y_0)-U(x_0,y_0)=0$ であり, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial U}{\partial y}(x_0,y_0)=\psi(x_0,y_0)\neq 0$ であるから, 陰関数定理 (補足資料 1.1, 定理 1.2) より $x_0\subset V_x$, $y_0\in V_y$ なる開区間 $V_x,V_y\subset\mathbb{R}$ および V_x 上の C^1 級関数 $f : V_x\longrightarrow\mathbb{R}$ が存在して, $f(x)\in V_y\,(x\in V_x)$, $f(x_0)=y_0$, およ

び $(x,y) \in V_x \times V_y$ であるとき, $y = f(x)$ であることと $F(x,y) = 0$ であることは同値であり, さらに, 次のことが成り立つ.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{U_x(x,f(x))}{U_y(x,f(x))} = -\frac{\varphi(x,f(x))}{\psi(x,f(x))}. \tag{1.64}$$

これは, $y = f(x)$ が微分方程式 (1.61) の $f(x_0) = y_0$ なる解であることを示している. 以上により, $f(x_0) = y_0$ なる微分方程式 (1.61) の解は, $F(x,y) = 0$ により (x_0, y_0) の近傍で定義される陰関数である. なお, $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$ のときは, (x_0, y_0) の近傍で $F(x,y) = 0$ により $g(y_0) = x_0$ なる微分方程式 (1.61) の解 $x = g(y)$ が得られる.

では, φ, ψ がどのような関数であるとき, 完全微分型の微分方程式が得られるであろうか.

定理 1.29 $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を恒等的には 0 でない C^1 級関数とする. このとき, 以下の 2 つの条件は同値である.

(i) 次の微分方程式は完全微分型である.

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = 0. \tag{1.65}$$

(ii) 次の関係式が成り立つ.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y). \tag{1.66}$$

<u>証明</u>. ((i) $\Rightarrow$ (ii)). $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \varphi(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \psi(x,y)$ なる関数とする. このとき, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y)$ であり, φ, ψ ともに C^1 級であるから, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y)$ ともに連続である. よって, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y)$ となる. ゆえに, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)$ が成り立つ.

((ii) $\Rightarrow$ (i)). $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を任意にとる. ここで, $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} \varphi(s, y_0) ds + \int_{y_0}^{y} \psi(x,t) dt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.67}$$

すると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) &= \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \varphi(s,y_0)ds + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} \psi(x,t)dt = \varphi(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)dt \\
&= \varphi(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,t)dt \\
&= \varphi(x,y_0) + (\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)) = \varphi(x,y), \\
\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} \psi(x,t)dt = \psi(x,y).
\end{aligned}$$

■

注意 1.30 (ii) $\Rightarrow$ (i) の証明において，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ における U の値を求めるために，まず，x 軸に平行な直線上で φ を積分し，続いて，y 軸に平行な直線上で ψ を積分した．この順序は本質的ではなく，同じ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ から出発して，先に y 軸に平行な直線上で ψ を積分し，続いて，x 軸に平行な直線上で φ を積分しても同じ値が得られる．このことは，ベクトル解析を用いると明快に説明できる．定理 1.29 の (i), (ii) はそれぞれ次のように表される．

(i)’ $\operatorname{grad} U = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ となる C^2 級関数 $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在する．

(ii)’ $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0$.

(i)’ と (ii)’ が同値であることは，**ポアンカレの補題**と呼ばれる．さらに，これらは次の条件とも同値である．

(iii) $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(1) = (x, y)$ なる区分的に C^1 級な曲線とする．このとき，次の値を考える．

$$U(x, y) = \int_\gamma \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy = \int_0^1 \left(\varphi(\gamma(t))\frac{dx}{dt} + \psi(\gamma(t))\frac{dy}{dt} \right) dt. \tag{1.68}$$

このとき $U(x, y)$ は γ のとり方に依らない．

(ii) $\Rightarrow$ (i) の証明に現れた積分は，(x_0, y_0) と (x, y) を結ぶ区分的に C^1 級な曲線の 1 つをとり，その曲線上で積分することにより U を得ている．要は，区分的に C^1 級という条件を守れば，どのような曲線で積分しても値は変わらないのである．

なお，ポアンカレの補題は $\mathbb{R}^2$ に限らず，「単連結」な連結開集合 D 上で成り立つ．例えば，D として (中心が必ずしも原点とは限らない) 開円板や，(原点を通るとは限らない) 直線で分けられた開半平面等をとっても成り立つ．

例 1.31 次の微分方程式を考える．

$$(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0. \tag{1.69}$$

いま，$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ なる点とする．ここで，$\varphi(x, y) = 2x + y$, $\psi(x, y) = x + 2y$ とすると，$\varphi(x_0, y_0)$, $\psi(x_0, y_0)$ のうち少なくとも 1 つは 0 でない．ところで，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = 1.$$

よって，微分方程式 (1.69) は完全微分型である．そこで，$U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のものとする．

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x \varphi(s, 0)ds + \int_0^y \psi(x, t)dt = \int_0^x 2sds + \int_0^y (x + 2t)dt \\ &= [s^2]_0^x + [xt + t^2]_0^y = x^2 + xy + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

よって, 微分方程式 (1.69) の解を表す曲線 C で, 点 (x_0, y_0) を通るものは, 次のものである.

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + xy + y^2 = x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2\}. \tag{1.70}$$

これは, 原点を中心とする楕円である.

問 1.32 (1) $x^2 + xy + y^2 = \dfrac{1}{2}(x \;\; y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であることを用いて, C を適当に回転させることにより, C が楕円であることを確認し, 長軸, 短軸の長さを求めよ.
(2) $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + xy + y^2 = 0\}$ は原点のみからなる $\mathbb{R}^2$ の部分集合であることを示せ.

ここで, $\mathbb{R}^2$ で定義される変数分離型の微分方程式を再び考える. $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数で, $\psi(y) \neq 0 \;\; (y \in \mathbb{R})$ なるものとする. このとき, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y). \tag{1.71}$$

この微分方程式は, 次の微分方程式と本質的に同じものと考えられる.

$$\varphi(x)dx - \frac{1}{\psi(y)}dy = 0. \tag{1.72}$$

すると, $\dfrac{\partial}{\partial y}\varphi(x) = 0,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{\psi(y)}\right) = 0.$ そこで, $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\widetilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)$, $\widetilde{\psi}(x, y) = -\dfrac{1}{\psi(y)} \;\; ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ とし, 任意の $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で与える.

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} \widetilde{\varphi}(s, y_0)ds + \int_{y_0}^{y} \widetilde{\psi}(x, t)dt = \int_{x_0}^{x} \varphi(s)ds - \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\psi(t)}. \tag{1.73}$$

すると, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{1}{\psi(y)}$ であり, 微分方程式 (1.72) は完全微分型である. このとき, $F(x, y) = 0$ から (x_0, y_0) の近傍において得られる関数 $y = f(x)$ が $f(x_0) = y_0$ なる微分方程式 (1.71) の解なのである.

完全微分型でなくても, 微分方程式にある関数をかけることにより, 完全微分型になることがある.

定義 1.33 $D \subset \mathbb{R}^2$ を空でない開集合, $\varphi, \psi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. いま, 次の微分方程式を考える.

$$\varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy = 0. \tag{1.74}$$

この微分方程式に対して, D 上の関数 $\mu : D \longrightarrow \mathbb{R}$ で, 次の微分方程式が完全微分型になるようなものが存在するとき, μ を**積分因子**と呼ぶ.

$$\mu(x, y)\varphi(x, y)dx + \mu(x, y)\psi(x, y)dy = 0. \tag{1.75}$$

定理 1.29 より, μ が積分因子となるためには, 次が成り立たなければならない.

$$\frac{\partial(\mu\varphi)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial(\mu\psi)}{\partial x}(x,y).$$

よって, μ は次の微分方程式をみたさなければならない.

$$\psi(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y) - \varphi(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)\mu(x,y) = 0. \tag{1.76}$$

これは, 偏微分方程式であり, 一般に (1.74) より複雑になる. しかし, μ として, x のみの関数をとることができる場合がある. もし, μ として x のみの関数 $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ をとることができるとすると, (1.76) より次の微分方程式が得られる.

$$\psi(x,y)\frac{d\mu}{dx}(x) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)\mu(x) = 0.$$

ここで, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \psi(x,y) \neq 0\}$, $D_x = \{x \in \mathbb{R} ; \exists y \in \mathbb{R}, (x,y) \in D\}$ とし, $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} ; \mu(x) \neq 0\}$ とする. このとき, $x_1 \in D_x \cap D_\mu$ とすると, $(x_1, y_1) \in D$ なる y_1 および $x_1 \in V_x \subset D_x \cap D_\mu$, $y_1 \in V_y$, $V_x \times V_y \subset D$ なる開区間 $V_x, V_y \subset \mathbb{R}$ が存在して, $(x,y) \in V_x \times V_y$ のとき $\psi(x,y) \neq 0$, $\mu(x) \neq 0$ となり, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{\psi(x,y)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx}(x). \tag{1.77}$$

この右辺は x のみの関数であるから, 左辺は y に依らない. 逆に, $V_x \times V_y \subset D$ なる開区間 $V_x, V_y \subset \mathbb{R}$ で, $V_x \times V_y$ 上 $\psi(x,y) \neq 0$ であり, (1.77) の左辺が $y \in V_y$ に依らないものが存在するとする. すると, $(x_1, y_1) \in V_x \times V_y$ に対して, $\mu(x_1) = 1$ なる微分方程式 (1.77) の解が V_x 上存在し, 次のように表される.

$$\mu(x) = \exp\left(\int_{x_1}^{x} \frac{1}{\psi(t,y)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,y) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(t,y)\right)dt\right), \quad x \in V_x,\, y \in V_y. \tag{1.78}$$

特に, V_x 上 μ は 0 にはならない. 従って, (x_1, y_1) の近傍において, 微分方程式 (1.75) の解 $y = f(x)$ で, $f(x_1) = y_1$ なるものが存在することがわかる. この関数 $y = f(x)$ は, 微分方程式 (1.74) の解でもある. 全く同様にして, $V_x \times V_y$ 上 $\varphi(x,y) \neq 0$ であり, $\dfrac{1}{\varphi(x,y)}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) - \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,y)\right)$ が y のみの関数であるとき, $g(y_1) = x_1$ なる微分方程式 (1.74) の解 $x = g(y)$ が存在することがわかる.

例 1.34 次の微分方程式を考える.

$$(x^2 + 2xy)dx + (2x^2 + xy)dy = 0. \tag{1.79}$$

$\varphi(x,y) = x^2 + 2xy$, $\psi(x,y) = 2x^2 + xy$ とする. すると, 次が成り立つ.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = 2x - (4x + y) = -2x - y.$$

よって, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \psi(x,y) = 2x^2 + xy \neq 0\}$ とすると, D 上で次が成り立つ.

$$\frac{1}{\psi(x,y)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{-2x-y}{2x^2+xy} = -\frac{1}{x}.$$

これは, x のみの関数である. いま, $(x_1, y_1) = (1,1)$ とする. すると, $\psi(x_1,y_1) = \psi(1,1) = 2\cdot 1^2 + 1\cdot 1 = 3 \neq 0$ である. そこで, $\mu(x)$ を次で与える.

$$\mu(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{-1}{t}dt\right) = \exp(-[\log t]_1^x) = \exp(-\log x) = \frac{1}{x}.$$

この $\mu(x)$ を微分方程式 (1.79) の両辺にかけると, 次が得られる.

$$(x+2y)dx + (2x+y)dy = 0. \tag{1.80}$$

ここで, $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で与える.

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_1^x (s+2\cdot 1)ds + \int_1^y (2x+t)dt = \left[\frac{s^2}{2} + 2s\right]_1^x + \left[2xt + \frac{t^2}{2}\right]_1^y \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2}\right) + \left(2xy + \frac{y^2}{2} - 2x - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 3. \end{aligned}$$

$U(x_1,y_1) = U(1,1) = 0$ であるから, $(x_1,y_1) = (1,1)$ の近傍で $U(x,y) = 0$ から得られる陰関数 $y = f(x)$ が $f(x_1) = f(1) = 1 = y_1$ なる微分方程式 (1.79) の解である.

問 1.35 $\dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{1}{2}(x\ \ y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ であることを用いて, 次で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $C \subset \mathbb{R}^2$ が双曲線となることを示し, 漸近線を求めよ.

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 3 = 0\right\}.$$

ここで, 1 階線形常微分方程式を, 積分因子を用いて解くことができることを示す. $\varphi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を恒等的には 0 でない連続関数とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)y + \psi(x). \tag{1.81}$$

これは, 次のように書き直すことができる.

$$(\varphi(x)y + \psi(x))dx - dy = 0.$$

ここで, $\widetilde{\varphi}(x,y) = \varphi(x)y + \psi(x)$, $\widetilde{\psi}(x,y) = -1$ とすると, 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ について, $\widetilde{\psi}(x,y) = -1 \neq 0$ であり, $\dfrac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial y}(x,y) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x}(x,y) = 0$ であるから, 次が得られる.

$$\frac{1}{\widetilde{\psi}(x,y)}\left(\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{-1}(\varphi(x) - 0) = -\varphi(x).$$

これは, x の関数である. そこで, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ を任意の実数とし, $\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で与えられるものとする.

$$\mu(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

すると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $\mu(x) \neq 0$ であり, 微分方程式 (1.81) は次の微分方程式と同一視される.

$$\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt\right)(\varphi(x)y + \psi(x))dx - \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt\right)dy = 0.$$

そこで, 任意の実数 $y_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int_{x_0}^{x} \exp\left(-\int_{x_0}^{t} \varphi(s)ds\right)(\varphi(t)y_0 + \psi(t))dt - \int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \varphi(s)ds\right)dt \\
&= -y_0\left[\exp\left(-\int_{x_0}^{t}\varphi(s)ds\right)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{t}\varphi(s)ds\right)\psi(t)dt - (y-y_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\right) \\
&= -y_0\left(\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\right) - 1\right) + \int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{t}\varphi(s)ds\right)\psi(t)dt \\
&\qquad - (y-y_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\right) \\
&= -y\exp\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\right) + y_0 + \int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{t}\varphi(s)ds\right)\psi(t)dt.
\end{aligned}$$

$U(x_0, y_0) = 0$ であるから, 微分方程式 (1.81) の解 $y = f(x)$ は $U(x,y) = 0$ をみたす. ゆえに, 次が成り立つ.

$$y\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\right) = y_0 + \int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{t}\varphi(s)ds\right)\psi(t)dt.$$

これを整理することにより, 微分方程式 (1.81) の $f(x_0) = y_0$ なる解 $y = f(x)$ が次のように求められる.

$$\begin{aligned}
f(x) &= y_0\exp\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt\right) + \exp\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds\right)\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\int_{x_0}^{t}\varphi(s)ds)\right)\psi(t)dt \\
&= y_0\exp\left(\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt\right) + \int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{t}^{x}\varphi(s)ds\right)\psi(t)dt.
\end{aligned}$$

2　基礎定理.

微分方程式は, 必ずしも初等的に解くことができるわけではない. しかし, 解くことができなくても, 与えられた初期条件に対する解が存在するかどうか, 存在するとき, その解がただ1つであるかどうかはその微分方程式にとって重要な問題である. ここでは, 正規型の常微分方程式について, 解の存在と一意性, 2つの微分方程式の解の大小関係, 解の延長可能性, そして, parameter や初期値に関する解の連続性と微分可能性について, 個々の微分方程式に対してではなく, 一般的な立場で論じる.

2.1　解の存在と一意性.

正規型の微分方程式で, 初期値に対する解の存在と一意性が保証される例として, リプシッツ条件をみたすものがある. これを定式化するために, 関数のリプシッツ連続性の定義を与える.

定義 2.1 m を正整数とする. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に対して, $\|\boldsymbol{x}\| \in \mathbb{R}$ を $\boldsymbol{x}$ の**ユークリッドノルム**とする.

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}. \tag{2.1}$$

ユークリッドノルムは, 以下の性質をみたす.

(1) すべての $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ について, $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ であり, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ であることと, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ は同値である.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}$ について, $\|a\boldsymbol{x}\| = |a|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ.

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ について, $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ (**三角不等式**).

一般に, 実ベクトル空間 V 上の関数 $\|\cdot\| : V \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ が上の (1)〜(3) をみたすとき, $\|\cdot\|$ を V 上の**ノルム**という.

問 2.2 m を正整数とする.

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に対して, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の標準内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \mathbb{R}$ を次で与える.

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m. \tag{2.2}$$

この内積と, $\mathbb{R}^m$ 上のユークリッドノルムには, $\|\boldsymbol{x}\|^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m)$ なる関係がある. このとき, 次のことが成り立つことを示せ.

(i) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ について, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ が成り立ち, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ であることと, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であることが同値である.

(ii) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle, \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle, \\
\langle a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &= \langle \boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y} \rangle = a\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.
\end{aligned}$$

(iii) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ について, $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$ が成り立つ.

(iv) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ について, $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ が成り立つ (**シュワルツの不等式**).

(2) (1) を用いて, $\mathbb{R}^m$ のユークリッドノルムが, ノルムの性質をみたしていることを示せ.

定義 2.3 l, m を正整数とし, $D \subset \mathbb{R}^m$ を空でない部分集合とする. D 上の関数 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が**リプシッツ連続**であるとは, 正実数 $L > 0$ が存在して, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ に対して, 次が成り立つことである.

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|. \tag{2.3}$$

例 2.4 m を正整数, $R > 0$ を正実数とし, $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m ; \|\boldsymbol{x}\| \leq R\}$ とする. いま, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする. すると, f はリプシッツ連続である. 実際, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in D$ について, $0 < \theta < 1$ なる実数 θ が存在して, 次が成り立つ.

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))(x_j - y_j). \tag{2.4}$$

よって, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| &= \left| \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}))(x_j - y_j) \right| \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})) \right)^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})) \right)^2} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.
\end{aligned}$$

ここで, $M \geq \max\left\{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})\right| ; \boldsymbol{z} \in D, 1 \leq j \leq m\right\}$ なる正実数 M をとると, 次が成り立つ.

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} M^2} \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{m}M\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|. \tag{2.5}$$

ゆえに, $L = \sqrt{m}M$ とすれば, $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ となり, f が D 上リプシッツ連続であることがわかる.

ここで, 微分方程式に現れる関数のリプシッツ条件を定義する.

定義 2.5 l, m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ を空でない部分集合とし, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を連続関数とする. この関数 f が**リプシッツ条件**をみたすとは, 正実数 $L > 0$ が存在して, $(x, \boldsymbol{y}), (x, \boldsymbol{y}') \in D$ なる $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^m$ について, 次が成り立つことである.

$$\|f(x, \boldsymbol{y}) - f(x, \boldsymbol{y}')\| \leq L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|. \tag{2.6}$$

また, $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ を空でない開集合とするとき, D 上の連続関数 f が**局所リプシッツ条件**をみたすとは, 任意の $(x, \boldsymbol{y}) \in D$ に対して, $(x, \boldsymbol{y}) \in U \subset D$ なる開集合 U が存在して, f が U 上でリプシッツ条件をみたすことである.

ここで, リプシッツ条件の下で, 初期値に対して局所的に解が存在することを示す.

定理 2.6 m を正整数, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha, \delta > 0$ を正実数とし, $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ を次で与えられる $\mathbb{R}^{m+1}$ の部分集合とする.

$$D = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m ; |x - a| \leq \delta, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha\}. \tag{2.7}$$

いま, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を D 上でリプシッツ条件をみたす連続関数, 即ち, 正実数 $L > 0$ が存在して, $|x - a| \leq \delta$, $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|, \|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha$ なる $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^m$ に対して, 以下のことが成り立つとする.

$$\|F(x, \boldsymbol{y}) - F(x, \boldsymbol{y}')\| \leq L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|. \tag{2.8}$$

そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.9}$$

ここで, $M \geq \max\{\|F(x, \boldsymbol{y})\| ; (x, \boldsymbol{y}) \in D\}$ なる正実数 M をとり, $\delta_0 = \min\left\{\delta, \dfrac{\alpha}{M}\right\}$ とする. このとき, $I = [a - \delta_0, a + \delta_0]$ で $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.9) の解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ がただ1つ存在する.

証明. $\boldsymbol{y} = f(x)$ が微分方程式 (2.9) の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる I 上の解であることと, 次が成り立つことは同値である.

$$f(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f(t))dt, \quad x \in I. \tag{2.10}$$

そこで, I 上 (2.10) をみたす関数 f を求める. まず, $I_+ = [a, a+\delta_0]$ 上で f を構成する. $f_0 : I_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を $f_0(x) = \boldsymbol{b}\,(x \in I_+)$ とする. そして, $f_1 : I_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を次で定義する.

$$f_1(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f_0(t))dt = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, \boldsymbol{b})dt, \quad x \in I_+. \tag{2.11}$$

すると, $x \in I_+$ のとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|f_1(x) - \boldsymbol{b}\| &= \left\|\int_a^x F(t, f_0(t))dt\right\| = \left\|\int_a^x F(t, \boldsymbol{b})dt\right\| \\ &\leq \int_a^x \|F(t, \boldsymbol{b})\|dt \leq M(x-a) \leq M\delta_0 \leq \alpha.\end{aligned}$$

よって, $(x, f_1(x)) \in D\,(x \in I_+)$ であり, 次が成り立つ.

$$\|f_1(x) - \boldsymbol{b}\| \leq M(x-a), \quad x \in I_+. \tag{2.12}$$

そこで, $f_2 : I_+ \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を次で定義する.

$$f_2(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f_1(t))dt, \quad x \in I_+. \tag{2.13}$$

すると, $x \in I_+$ について, 次が成り立つ.

$$\|f_2(x) - \boldsymbol{b}\| = \left\|\int_a^x F(t, f_1(t))dt\right\| \leq \int_a^x \|F(t, f_1(t))\|dt \leq M(x-a) \leq M\delta_0 < \alpha.$$

よって, $(x, f_2(x)) \in D$ である. さらに, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|f_2(x) - f_1(x)\| &= \left\|\int_a^x F(t, f_1(t))dt - \int_a^x F(t, f_0(t))dt\right\| \\ &\leq \int_a^x \|F(t, f_1(t)) - F(t, f_0(t))\|dt \\ &\leq \int_a^x L\|f_1(t) - f_0(t)\|dt \leq \int_a^x LM(t-a)dt \\ &= \left[\frac{LM(t-a)^2}{2}\right]_a^x = \frac{LM(x-a)^2}{2}, \quad x \in I_+.\end{aligned}$$

ゆえに, 次が得られる.

$$\|f_2(x) - f_1(x)\| \leq \frac{LM(x-a)^2}{2}, \quad x \in I_+. \tag{2.14}$$

この操作を繰り返すことにより, 次のような I_+ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が得られることを n に関する帰納法により示す.

$$f_0(x) = \boldsymbol{b}, \quad f_n(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f_{n-1}(t))dt, \quad x \in I_+, \, n \geq 1. \tag{2.15}$$

さらに, 次の性質も成り立つことも同時に示す.

$$\|f_n(x) - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha, \quad x \in I_+, \, n \geq 0, \tag{2.16}$$

$$\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \leq \frac{L^{n-1}M(x-a)^n}{n!}, \quad x \in I_+, \, n \geq 1. \tag{2.17}$$

$n = 0$ のときは, f_0 は定義により与えられており, (2.16) は明らかに成り立つ. また, $n = 1$ のときは, f_1 を定義できること, および (2.16), (2.17) が成り立つことを既に示している. そこで, $n > 1$ とし, $n-1$ まで主張が成り立つと仮定する. すると, (2.16) より $t \in I_+$ のとき $(t, f_{n-1}(t)) \in D$ である. よって, (2.15) の右辺は意味をもつ. さらに, $x \in I_+$ のとき,

$$\|f_n(x) - \boldsymbol{b}\| = \left\| \int_a^x F(t, f_{n-1}(t))dt \right\| \leq \int_a^x \|F(t, f_{n-1}(t))\|dt \leq M(x-a) \leq M\delta_0 < \alpha.$$

ゆえに, (2.16) が成り立つ. さらに, $n \geq 2$ より $n-1 \geq 1$ であるから, 帰納法の仮定を用いると, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
\|f_n(x) - f_{n-1}\| &= \left\| \int_a^x F(t, f_{n-1}(t))dt - \int_a^x F(t, f_{n-2}(t))dt \right\| \\
&\leq \int_a^x \|F(t, f_{n-1}(t)) - F(t, f_{n-2}(t))\|dt \\
&\leq \int_a^x L\|f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t)\|dt \leq \int_a^x L \cdot \frac{L^{n-2}M(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}dt \\
&= \left[\frac{L^{n-1}M(t-a)^n}{n!} \right]_a^x = \frac{L^{n-1}M(x-a)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

よって, (2.17) が成り立つ.

ここで, 正整数 n に対して, $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \, (x \in I_+)$ とする. すると, 次が成り立つ.

$$\|g_n(x)\| \leq \frac{L^{n-1}M(x-a)^n}{n!} \leq \frac{L^{n-1}M\delta_0^n}{n!}, \quad x \in I_+. \tag{2.18}$$

そこで, 正整数 n に対して, $M_n = \dfrac{L^{n-1}M\delta_0^n}{n!}$ とおくと, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ の優級数になる. ここで, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L\delta_0)^n}{n!} = \frac{M}{L}(\exp(L\delta_0) - 1) < +\infty$ であるから, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ は I_+ 上一様に絶対収束する (補足資料 1.2, 定理 1.34). ところで, 任意

の正整数 n について, $f_n = f_0 + \sum_{j=1}^{n}(f_j - f_{j-1}) = f_0 + \sum_{j=1}^{n} g_j$ であるから, 関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は I_+ 上ある連続関数 f に一様収束する. この f が I_+ 上の微分方程式 (2.9) の解であることを示す. そのためには, f が (2.10) をみたすことを示せばよい.

$\varepsilon > 0$ を任意の正実数とする. すると, F は D 上連続であるから, 一様連続である. 即ち, 正実数 $\delta_1 > 0$ が存在して, $(x, \boldsymbol{y}), (x', \boldsymbol{y}') \in D$ かつ $|x - x'| < \delta_1$, $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\| < \delta_1$ ならば, 次が成り立つ.

$$\|F(x, \boldsymbol{y}) - F(x', \boldsymbol{y}')\| < \frac{\varepsilon}{2\delta_0}. \tag{2.19}$$

関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は I_+ 上 f に一様収束するから, 正整数 n_1 が存在して, $n \geq n_1 - 1$ なる正整数 n および任意の $x \in I_+$ に対して, 次が成り立つ.

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta_1\right\}. \tag{2.20}$$

これと (2.15) より, $n \geq n_1$ なる正整数 n をとると, 任意の $x \in I_+$ について, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
\left\|f(x) - \left(\boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f(t))dt\right)\right\| &= \left\|(f(x) - f_n(x)) + \left(\int_a^x F(t, f_{n-1}(t))dt - \int_a^x F(t, f(t))dt\right)\right\| \\
&\leq \|f(t) - f_n(t)\| + \left\|\int_a^x F(t, f_{n-1}(t))dt - \int_a^x F(t, f(t))dt\right\| \\
&\leq \|f(t) - f_n(t)\| + \int_a^x \|F(t, f_{n-1}(t)) - F(t, f(t))\|dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^x \frac{\varepsilon}{2\delta_0}dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \delta_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2\delta_0} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

正実数 $\varepsilon > 0$ は任意であったから, 任意の I_+ の元 $x \in I+$ について次が成り立つことがわかる.

$$f(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f(t))dt.$$

$I_- = [a - \delta_0, a]$ 上でも同様に微分方程式 (2.9) の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる解を構成することができる.

ここからは, I 上で $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.9) の解がただ 1 つのみ存在することを示す. そのために, 次の補題を用意する.

補題 2.7 (**グロンウォールの補題**). $J \subset \mathbb{R}$ を区間, $a \in J$ とし, $\varphi, \psi, \rho : J \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\varphi(x), \psi(x), \rho(x) \geq 0$ $(x \in J)$ なる連続関数で, 次の不等式が成り立つものとする.

$$\varphi(x) \leq \psi(x) + \int_a^x \varphi(t)\rho(t)dt, \quad x \in J, x \geq a. \tag{2.21}$$

このとき, $x \in J$, $x \geq a$ なる任意の x について, 次の不等式が成り立つ.

$$0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x) + \int_a^x \psi(t)\rho(t)\exp\left(\int_t^x \rho(s)ds\right)dt. \tag{2.22}$$

<u>証明</u>. (2.21) の両辺に ρ をかけると, 次が得られる.

$$\varphi(x)\rho(x) \le \psi(x)\rho(x) + \rho(x)\int_a^x \varphi(t)\rho(t)dt, \quad x \in J,\, x \ge a.$$

この右辺の第 2 項を移項して, 両辺に $\exp\left(-\int_a^x \rho(t)dt\right)$ をかけると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\exp\left(-\int_a^x \rho(t)dt\right)\int_a^x \varphi(t)\rho(t)dt\right) \\
&\qquad = \varphi(x)\rho(x)\exp\left(-\int_a^x \rho(t)dt\right) - \rho(x)\exp\left(-\int_a^x \rho(t)dt\right)\int_a^x \varphi(t)\rho(t)dt \\
&\qquad \le \psi(x)\rho(x)\exp\left(-\int_a^x \rho(t)dt\right), \quad x \in J,\, x \ge a.
\end{aligned}$$

これを, a から x $(x \in J,\, x \ge a)$ まで積分すると, 次が得られる.

$$\exp\left(-\int_a^x \rho(t)dt\right)\int_a^x \varphi(t)\rho(t)dt \le \int_a^x \psi(t)\rho(t)\exp\left(-\int_a^t \rho(s)dx\right)dt.$$

ゆえに, 次が分かる.

$$\begin{aligned}
\int_a^x \varphi(t)\rho(t)dt &\le \exp\left(\int_a^x \rho(s)ds\right)\int_a^x \psi(t)\rho(t)\exp\left(-\int_a^t \rho(s)ds\right)dt \\
&= \int_a^x \psi(t)\rho(t)\exp\left(\int_t^x \rho(s)ds\right)dt, \quad x \in J,\, x \ge a.
\end{aligned}$$

これと (2.21) により, 次が得られる.

$$0 \le \varphi(x) \le \psi(x) \ + \int_a^x \psi(t)\rho(t)\exp\left(\int_t^x \rho(s)ds\right)dt, \quad x \in J,\, x \ge a.$$

■

<u>定理 2.6 の証明の続き</u>. $\boldsymbol{y} = f(x)$ および, $\boldsymbol{y} = g(x)$ がともに $\|f(x) - \boldsymbol{b}\|, \|g(x) - \boldsymbol{b}\| \le \alpha$ $(x \in I)$ かつ $f(a) = \boldsymbol{b}$, $g(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.9) の I 上の解であるとする. このとき, $f(x) = g(x)$ $(x \in I_+)$ であることを示す.

まず, $x \in I_+$ なる x について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f(t))dt, \\
g(x) &= \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f(t))dt.
\end{aligned}$$

$\|f(x) - \boldsymbol{b}\|, \|g(x) - \boldsymbol{b}\| \le \alpha$ $(x \in I_+)$ であるから, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
\|f(x) - g(x)\| &= \left\|\int_a^x F(t, f(t))dt - \int_a^x F(t, g(t))dt\right\| \\
&\le \int_a^x \|F(t, f(t)) - F(t, g(t))\|dt \\
&\le \int_a^x L\|f(t) - g(t)\|dt, \quad x \in I_+.
\end{aligned}$$

ここで, グロンウォールの補題において, $J = I_+$, $\varphi(x) = \|f(x)-g(x)\|$, $\psi(x) = 0$, $\rho(x) = L$ $(x \in I_+)$ ととることにより, 次が成り立つ.

$$0 \le \|f(x) - g(x)\| \le 0 + \int_a^x 0 \cdot L \cdot \exp\left(\int_t^x L ds\right) dt = 0, \quad x \in I_+.$$

従って, 任意の $x \in I_+$ について, $f(x) = g(x)$ が成り立つことが分かる.

I_- 上においても同様に $f(x) = g(x)$ $(x \in I_-)$ が成り立つ. ■

問 2.8 $I_- = [a - \delta_0, a]$ において, 関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次のように構成する.

$$f_0(x) = \boldsymbol{b}, \quad f_n(x) = \boldsymbol{b} - \int_x^a F(t, f_{n-1}(t))dt, \quad x \in I_-, \, n \ge 1.$$

(1) 任意の非負整数 n について, 次が成り立つことを示せ.

$$\|f_n(x) - \boldsymbol{b}\| \le \alpha, \quad x \in I_-, \, n \ge 0,$$
$$\|f_n(x) - f_{n-1}(x)\| \le \frac{L^{n-1}M(a-x)^n}{n!}, \quad x \in I_-, \, n \ge 1.$$

(2) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I_- 上一様収束することを示せ. さらに, その極限関数を f とするとき, $\boldsymbol{y} = f(x)$ は I_- の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.9) の解であることを示せ.

問 2.9 $J \subset \mathbb{R}$ を区間, $a \in J$ とし, $\varphi, \psi, \rho : J \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\varphi(x), \psi(x), \rho(x) \ge 0$ $(x \in J)$ なる連続関数で, 次の不等式が成り立つものとする.

$$\varphi(x) \le \psi(x) + \int_x^a \varphi(t)\rho(t)dt, \quad x \in J, \, x \le a.$$

このとき, $x \in J$, $x \le a$ なる任意の x について, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$0 \le \varphi(x) \le \psi(x) + \int_x^a \psi(t)\rho(t) \exp\left(\int_x^t \rho(s)ds\right) dt.$$

これを用いて, I_- における $f(a) = \boldsymbol{b}$ をみたす微分方程式 (2.9) の解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ がただ 1 つしか存在しないことを示せ.

定理 2.6 の証明で用いられる, 一様収束する関数列を構成して微分方程式の解を得る方法は, **ピカールの逐次近似法**と呼ばれる.

与えられた区間でリプシッツ条件をみたす関数は, 区間によっては特別なものであるが, 局所リプシッツ条件をみたす関数は豊富に存在する.

定理 2.10 m を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ を空でない開集合とし, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を $(a, \boldsymbol{b}) \in D$ なるものとする. いま, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を $\mathbb{R}^m$ に値をとる C^1 級関数とする. そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.23}$$

このとき，正実数 $\delta_0 > 0$ が存在して，$I_0 = [a-\delta_0, a+\delta_0]$ において，$f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.23) の解がただ 1 つ存在する．

証明．正実数 $\delta_1, \alpha > 0$ で，$D_1 = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \,;\, |x-a| \leq \delta_1,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha\} \subset D$ なるものが存在する．ここで，$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}$ とする．すると，$1 \leq j \leq m$ なるすべての整数 j について，$F_j : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級関数であるから，正実数 $L_0 > 0$ が存在して，$1 \leq k \leq m$ なる任意の整数 k について，$\left|\dfrac{\partial F_j}{\partial y_k}(x, \boldsymbol{y})\right| \leq L_0 \ \ ((x, \boldsymbol{y}) \in D_1)$ が成り立つ．よって，例 2.4 と同様にして，$|x-a| \leq \delta_1$，$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\|$，$\|\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{b}\| \leq \alpha$ なる $x \in \mathbb{R}$，$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^m$ について，次が成り立つ．

$$|F_j(x, \boldsymbol{y}) - F_j(x, \boldsymbol{y}')| \leq \sqrt{m} L_0 \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|, \quad 1 \leq j \leq m.$$

従って，次が得られる．

$$\|F(x, \boldsymbol{y}) - F(x, \boldsymbol{y}')\| \leq \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} L_0 \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\| = m L_0 \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|.$$

特に，F が局所リプシッツ条件をみたすことがわかる．また，F は C^1 級であるから，連続である．よって，正実数 $M > 0$ が存在して，任意の $(x, \boldsymbol{y}) \in D_1$ について，$\|F(x, \boldsymbol{y})\| \leq M$ が成り立つ．そこで，$\delta_0 = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\alpha}{M}\right\}$ とすると，定理 2.6 より，$I_0 = [a-\delta_0, a+\delta_0]$ 上で $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.23) の解がただ 1 つ存在する．■

例 2.11 $D = \mathbb{R}^2$ とし，$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を $F(x, y) = y \ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ とする．すると，F は C^1 級である．そこで，D において次の微分方程式を考える．

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = y. \tag{2.24}$$

いま，$a = 0$ とし，$b \in \mathbb{R}$ を任意にとり，$\delta_1 = 1$，$\alpha = \max\{|b|, 1\} > 0$ とする．そして，$D \subset \mathbb{R}^2$ を次のものとする．

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x| \leq 1,\ |y - b| \leq \alpha\}.$$

このとき，$M = \max\{|F(x, y)| \,;\, (x, y) \in D_1\}$ とすると，$M = \max\{2|b|, |b|+1\} > 0$ となる．そこで，$\delta_0 = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\alpha}{M}\right\} > 0$ とし，$I_0 = [-\delta_0, \delta_0]$ 上で次のように関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に定義する．

$$f_0(x) = b, \quad f_{n+1}(x) = b + \int_0^x f_n(t)dt, \quad x \in I_0,\ n \geq 0. \tag{2.25}$$

すると, $x \in I_0$ のとき, $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は以下のようになる.

$$f_1(x) = b + \int_0^x b\,dt = b + bx,$$

$$f_2(x) = b + \int_0^x (b + bt)dt = b + \left[bt + \frac{bt^2}{2}\right]_0^x = b + bx + \frac{bx^2}{2},$$

$$f_3(x) = b + \int_0^x \left(b + bt + \frac{bt^2}{2}\right) dt = b + \left[bt + \frac{bt^2}{2} + \frac{bt^3}{6}\right]_0^x = b + bx + \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{6}.$$

そこで, 任意の非負整数 n について, 次が成り立つことを, n に関する帰納法により示す.

$$f_n(x) = b\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}, \quad x \in I_0. \tag{2.26}$$

$n = 0$ のときは, 定義より成り立つ. そこで, $n > 0$ とし, $n - 1$ まで主張が成り立つと仮定する. すると, $x \in I_0$ のとき, 次が得られる.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= b + \int_0^x f_{n-1}(t)dt = b + \int_0^x b\sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!}dt = b + \left[b\sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^{j+1}}{(j+1)!}\right]_0^x \\ &= b + b\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} = b + b\sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j!} = b\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}. \end{aligned}$$

従って, 任意の非負整数 n について, (2.26) が成り立つ. ここで, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{bx^n}{n!}$ を考える. $x \in I_0$ とするとき, 任意の非負整数 n について, $\displaystyle\left|\frac{bx^n}{n!}\right| = \frac{|b||x|^n}{n!} \leq \frac{|b|\delta_0^n}{n!}$ が成り立つ. よって, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b|\delta_0^n}{n!}$ は関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{bx^n}{n!}$ の I_0 における優級数である. ところで, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b|\delta_0^n}{n!} = |b|e^{\delta_0}$ は収束するから, 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{bx^n}{n!}$ は一様収束する (補足資料 1.2, 定理 1.20). これは, 関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が I_0 上関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{bx^n}{n!} = be^x$ に一様収束することを意味する. 従って, $y = f(x) = be^x$ は I_0 上 $f(0) = b$ なる微分方程式 (2.24) のただ 1 つの解である.

問 2.12 b を 0 でない実数とする. このとき, 0 の近傍において, 微分方程式 (2.24) の $f(0) = b$ なる解 $y = f(x)$ を, 変数分離型として, また, 1 階線形常微分方程式として, その解法に従って解くことにより, $f(0) = b$ なるただ 1 つの解として $y = f(x) = be^x$ が得られることを確認せよ.

ここまでは, 方程式にリプシッツ条件, あるいは, 局所リプシッツ条件をみたす関数が現れる正規型の微分方程式について述べた. 一般に, 現れる関数がリプシッツ条件をみたさない場合は, 微分方程式の解が存在しても, その解の一意性は保証されない.

例 2.13 例 1.9 で扱われた微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}. \tag{2.27}$$

この右辺に現れる関数 $F(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ が, 任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ について, $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ の近傍で局所リプシッツ条件をみたさないことを示す. ここで, 記述を簡単にするために, $\varPhi(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ $(y \in \mathbb{R})$ とする. すると, $y \neq 0$ のとき, $\dfrac{d\varPhi}{dy}(y) = 3 \cdot \dfrac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} = 2y^{-\frac{1}{3}}$ となる. よって, $y \neq 0$ のとき, $0 < \theta < 1$ なる実数 θ が存在して, 次が成り立つ.

$$\frac{\varPhi(y) - \varPhi(0)}{y} = 2(\theta y)^{-\frac{1}{3}}.$$

従って, 次が得られる.

$$\lim_{y \to 0} \frac{|\varPhi(y) - \varPhi(0)|}{|y|} = \lim_{y \to 0} |2(\theta y)^{-\frac{1}{3}}| = +\infty.$$

よって, $F(x, y) = \varPhi(y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ は $(a, 0)$ の近傍において, 局所リプシッツ条件をみたさない. なお, $a = 0$ のとき, $y = f_1(x) = x^3$, $y = f_2(x) = 0$ (定数函数) はともに微分方程式 (2.27) の $f_1(0) = f_2(0) = 0$ なる解であり, $(0, 0)$ のどのような近傍でも一致しない.

なお, リプシッツ条件をみたす関数が現れる正規型の微分方程式に対しては, 初期値に対する解の存在の証明にもリプシッツ条件が用いられた. しかし, 現れる関数が連続でありさえすれば, 解の一意性は保証されないが, 解の存在は証明することができる.

定理 2.14 m を正整数, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha, \delta > 0$ を正実数とし, $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ を次で与えられる $\mathbb{R}^{m+1}$ の部分集合とする.

$$D = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \,;\, |x - a| \leq \delta, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha\}. \tag{2.28}$$

いま, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を D 上の連続関数とする. そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.29}$$

ここで, $M \geq \max\{\|F(x, \boldsymbol{y})\| \,;\, (x, \boldsymbol{y}) \in D\}$ なる正実数 M をとり, $\delta_0 = \min\left\{\delta, \dfrac{\alpha}{M}\right\}$ とする. このとき, $I = [a - \delta_0, a + \delta_0]$ で $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.9) の解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ が (ただ 1 つとは限らないが) 存在する.

この定理の証明は, 本講義の内容を超えるため行わないが, その証明に用いられる定理を述べておく. そのために, 関数列の同程度連続性について述べる.

定義 2.15 $S \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を S 上の実数値関数列とする. いま, $a \in S$ とする. このとき, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a において**同程度連続**であるとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, 任意の正整数 n および $|x - a| < \delta$ なる S の元 x について, 次が成り立つことである.

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon.$$

また, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が S 上**同程度連続**であるとは, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が任意の $a \in S$ において同程度連続であることである.

次に述べる定理は, 正規型の微分方程式の解の存在を保証する定理であるだけでなく, 解析学において, とても重要なものである.

定理 2.16 $I \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を I 上の関数列で, 以下の性質が成り立つものとする.
(i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I 上同程度連続である.
(ii) 任意の $x \in I$ において, 数列 $\{f_n(x)\}_{n1}^{\infty}$ は有界である.
このとき, 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, I 上ある実数値連続関数 $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ に一様収束する (**アスコリ-アルツェラの定理**).

この定理の証明には, 通常「対角線論法」と呼ばれる手法が用いられる.

2.2 解の比較.

ここでは, 解の値の評価に必要である, 解の比較について述べる.

定理 2.17 n を正整数, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とし, $\alpha, \delta > 0$ とする. いま, $D = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\,;\, 0 \leq x - a \leq \delta, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $D_0 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x - a \leq \delta, |z - \|\boldsymbol{b}\|| \leq \alpha\} \subset \mathbb{R}^2$ とし, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $G : D_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ に値をとる連続関数で, 次をみたすとする.

$$G(x, z) > 0, \qquad (x, z) \in D_0, \tag{2.30}$$

$$\|F(x, \boldsymbol{y})\| < G(x, \|\boldsymbol{y}\|), \quad (x, \boldsymbol{y}) \in D. \tag{2.31}$$

さらに正実数 $M > 0$ が存在して, $M \geq \max\{|G(x, z)|\,;\, (x, z) \in D_0\}$ であり, かつ, $\delta_0 = \min\left\{\delta, \dfrac{\alpha}{M}\right\}$ としたとき, 次で与えられる微分方程式の $I_0 = [a, a + \delta_0]$ における $\boldsymbol{b} = f(a)$, $\|\boldsymbol{b}\| = g(a)$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$, $z = g(x)$ がただ 1 つ存在するとする.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}), \tag{2.32}$$

$$\frac{dz}{dx} = G(x, z). \tag{2.33}$$

このとき, 任意の $x \in I_0$ について, $\|f(x)\| \leq g(x)$ が成り立つ.

この定理を示すために, まず次の補題を用意する.

補題 2.18 n を正整数, $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $I = [a, a + \delta]$, $I' = [a, a + \delta)$ とし, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる C^1 級関数とする. このとき, I 上の関数 $x \mapsto \|f(x)\| \in \mathbb{R}$ は任意の $x \in I'$ において右微分可能であり, その右導関数は右連続である.

<u>証明</u>. $f(x) = \begin{pmatrix} f^{(1)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \ (x \in I)$ とする. すると, $1 \leq j \leq n$ なる任意の整数 j について $f^{(j)}$ は I 上 C^1 級であり, $\|f(x)\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (f^{(j)}(x))^2}$ $(x \in I)$ である. ここで, $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\varphi(\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y}\|$ $(\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$ とすると, φ は $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ で微分可能であり, $1 \leq j \leq n$ なる任意の整数 j および任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y_j = \frac{y_j}{\varphi(\boldsymbol{y})}. \tag{2.34}$$

ここで, I 上の関数 $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\psi(x) = \|f(x)\| \ (x \in I)$ とする. すると, $c \in I'$ について, $f(c) \neq \mathbf{0}$ ならば, 関数 ψ は $x = c$ で微分可能で, 次が成り立つ.

$$\frac{d\psi}{dx}(c) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(c)}{\|f(c)\|} \cdot \frac{df^{(j)}}{dx}(c). \tag{2.35}$$

特に, ψ' は $x = c$ で連続である.

次に, $c \in I'$ を $f(c) = \mathbf{0}$ なる実数とする. すると, $f^{(j)}(c) = 0 \ (1 \leq j \leq n)$ であるが, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, $0 < \delta_1 \leq a + \delta - c$ なる実数 δ が存在して, $0 < h < \delta_1$ なる任意の実数 h および $1 \leq j \leq n$ なる任意の整数 j について, 次が成り立つ.

$$f^{(j)}(c+h) = \frac{df^{(j)}}{dx}(c)h + r^{(j)}(h), \quad \frac{|r^{(j)}(h)|}{h} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

よって, 次が得られる.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\|f(c+h)\| - \|f(c)\|}{h} - \left\| \frac{df}{dx}(c) \right\| \right| = \left| \frac{\|f(c+h)\|}{h} - \left\| \frac{df}{dx}(c) \right\| \right| \\ &\leq \left\| \frac{f(c+h)}{h} - \frac{df}{dx}(c) \right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{r^{(j)}(h)}{h} \right)^2} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに, $f(c) = \mathbf{0}$ であるときは, 関数 ψ は $x = c$ で右微分可能で, ψ の $x = c$ における右微分係数を $D_+\psi(c)$ と表すとすると, $D_+\psi(c) = \left\| \dfrac{df}{dx}(c) \right\|$ となる.

ここで, $f(c) = \mathbf{0}$ であるとき, $D_+\psi(c) = \lim_{x \to c+0} D_+\psi(x)$ が成り立つことを示す. $\dfrac{df}{dx}(c) \neq \mathbf{0}$ のときは, $\left\| \dfrac{df}{dx}(c) \right\| > 0$ であり, 上の議論で $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \left\| \dfrac{df}{dx}(c) \right\|$ ととれば, $0 < h < \delta_1$ なる実数 h について, 次が成り立つ.

$$\frac{\|f(c+h)\|}{h} > \left\| \frac{df}{dx}(c) \right\| - \frac{1}{2} \left\| \frac{df}{dx}(c) \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{df}{dx}(c) \right\| > 0.$$

ゆえに, $\|f(c+h)\| > 0$ であり, (2.35) より次が得られる.

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0+0} \frac{d\psi}{dx}(c+h) &= \lim_{h \to 0+0} \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(c+h)}{\|f(c+h)\|} \cdot \frac{df^{(j)}}{dx}(c+h) \\ &= \lim_{h \to 0+0} \frac{h}{\|f(c+h)\|} \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(c+h)}{h} \cdot \frac{df^{(j)}}{dx}(c+h) \\ &= \left(\left\| \frac{df}{dx}(c) \right\| \right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{df^{(j)}}{dx}(c) \cdot \frac{df^{(j)}}{dx}(c) \\ &= \left\| \frac{df}{dx}(c) \right\| = D_+\psi(c). \end{aligned}$$

$\dfrac{df}{dx}(c) = \mathbf{0}$ のときは, $0 < h < a+\delta-c$ なる実数 h について, $f(c+h) \neq \mathbf{0}$ ならば, (2.35) およびシュワルツの不等式より次が成り立つ.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{d\psi}{dx}(c+h)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(c+h)}{\|f(c+h)\|} \cdot \frac{df^{(j)}}{dx}(c+h)\right| \\ &\leq \frac{1}{\|f(c+h)\|}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(f^{(j)}(c+h))^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{df^{(j)}}{dx}(c+h)\right)^2} = \left\|\frac{df}{dx}(c+h)\right\|. \end{aligned}$$

また, $f(c+h) = \mathbf{0}$ ならば $D_+\psi(c+h) = \left\|\dfrac{df}{dx}(c+h)\right\|$ であるから, $0 < h < a+\delta-c$ なる任意の実数 h について次が成り立つ.

$$0 \leq |D_+\psi(c+h)| \leq \left\|\frac{df}{dx}(c+h)\right\|.$$

f は C^1 級であるから, $\displaystyle\lim_{x\to c+0}\frac{df}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(c) = \mathbf{0}$ となる. 従って, 次が得られる.

$$\lim_{h\to 0+0} D_+\psi(c+h) = 0 = D_+\psi(c).$$

以上により, 関数 ψ の右導関数 $D_+\psi$ は I' 上右連続であるこが分かる. ■

この補題を用いて, 定理 2.17 を示す.

定理 2.17 の証明. $c \in I_0$ かつ $\|f(c)\| > g(c)$ なる実数 c が存在すると仮定する. ここで, 次の実数 m を考える.

$$m = \inf\{x \in I_0\,;\, \|f(x)\| > g(x)\}. \tag{2.36}$$

$m = a$ ならば, $\|f(a)\| = \|\boldsymbol{b}\| = g(a)$ より $\|f(m)\| = g(m)$ である. $m > a$ ならば, $a \leq x < m$ のとき $\|f(x)\| \leq g(x)$ であるから $\|f(m)\| \leq g(m)$ となる. また, m の定義より, 任意の正整数 l に対して $m \leq x_l < m + \dfrac{1}{l}$ かつ $\|f(x_l)\| > g(x_l)$ なる実数 x_l が存在する. よって, $\|f(m)\| = \displaystyle\lim_{l\to\infty}\|f(x_l)\| \geq \lim_{l\to\infty} g(x_l) = g(m)$. 従って, いずれの場合も $\|f(m)\| = g(m)$ が成り立つ. もし, $m = a+\delta_0$ ならば任意の実数 $x \in I$ について $\|f(x)\| \leq g(x)$ となるから, 仮定に反する. よって, $a \leq m < a+\delta_0$ である.

ところで, I_0 上の関数 $\psi : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\psi(x) = \|f(x)\|$ $(x \in I_0)$ とすると, 補題 2.18 より ψ は $I_0' = [a, a+\delta_0)$ 上右微分可能であるから, $x = m$ でも右微分可能である. ψ の右導関数を $D_+\psi$ と表すとする.

ここで, $D_+\psi(m) < \dfrac{dg}{dx}(m)$ が成り立つことを示す. $f(m) \neq \mathbf{0}$ とすると, (2.35) およびシュワルツの不等式より次が得られる.

$$|D_+\psi(m)| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(m)}{\|f(m)\|}\frac{df^{(j)}}{dx}(m)\right| \leq \left\|\frac{df}{dx}(c)\right\|.$$

$f(m)=\mathbf{0}$ のときは, $D_+\psi(m)=\left\|\dfrac{df}{dx}(m)\right\|$ が成り立つ. ゆえに, いずれの場合も次が得られる.

$$D_+\psi(m) \le \left\|\frac{df}{dx}(m)\right\| = \|F(m,f(m))\|.$$

また, $\dfrac{dg}{dx}(m)=G(m,g(m))$ が成り立つ. ここで, $\|f(m)\|=g(m)$ であるから, (2.31) より $\|F(m,f(m))\|<G(m,\|f(m)\|)=G(m,g(m))$ が成り立つ. 従って,

$$D_+\psi(m) \le \|F(m,f(m))\| < G(m,g(m)) = \frac{dg}{dx}(m).$$

$m<a+\delta_0$ であるから, 右微分係数の定義より, $0<\delta_1<a+\delta_0-m$ なる実数 δ_1 が存在して, $m<x<m+\delta_1$ ならば, 次が成り立つ.

$$\left|\frac{\|f(x)\|-\|f(m)\|}{x-m}-D_+\psi(m)\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{dx}(m)-D_+\psi(m)\right),$$
$$\left|\frac{g(x)-g(m)}{x-m}-\frac{dg}{dx}(m)\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{dx}(m)-D_+\psi(m)\right).$$

ゆえに, 次が得られる.

$$\frac{\|f(x)\|-\|f(m)\|}{x-m} < \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{dx}(m)+D_+\psi(m)\right) < \frac{g(x)-g(m)}{x-m}.$$

よって, $\|f(x)\|-\|f(m)\|<g(x)-g(m)$ となり, $\|f(m)\|=g(m)$ であるから, $m<x<m+\delta_1$ であるとき, $\|f(x)\|<g(x)$ が成り立つ. ところが, m の定義より, $l>\dfrac{1}{\delta_1}$ なる整数 l をとると, $m\le x_l<m+\dfrac{1}{l}$ かつ $\|f(x_l)\|>g(x_l)$ なる実数 x_l が存在する. これは矛盾である. 従って, 任意の $x\in I_0$ について $\|f(x)\|\le g(x)$ が成り立つ. ■

定理 2.17 は区間の左端における初期条件に関する主張であるが, 区間の右端についても同様な主張が得られる.

定理 2.19 n を正整数, $a\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ とし, $\alpha,\delta>0$ とする. いま, $D=\{(x,\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\,;\,-\delta\le x-a\le 0,\,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\|\le\alpha\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $D_0=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\,;\,-\delta\le x-a\le 0,\,|z-\|\boldsymbol{b}\||\le\alpha\}\subset\mathbb{R}^2$ とし, $F:D\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $G:D_0\longrightarrow\mathbb{R}$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ に値をとる連続関数で, 次をみたすとする.

$$G(x,z)>0, \qquad (x,z)\in D_0, \tag{2.37}$$
$$\|F(x,\boldsymbol{y})\|<G(x,\|\boldsymbol{y}\|), \quad (x,\boldsymbol{y})\in D. \tag{2.38}$$

さらに正実数 $M>0$ が存在して, $M\ge\max\{|G(x,z)|\,;\,(x,z)\in D_0\}$ であり, かつ, $\delta_0=\min\left\{\delta,\dfrac{\alpha}{M}\right\}$ としたとき, 次で与えられる微分方程式の $I_0=[a-\delta_0,a]$ における

$\boldsymbol{b} = f(a)$, $\|\boldsymbol{b}\| = g(a)$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$, $z = g(x)$ がただ 1 つ存在するとする.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}), \tag{2.39}$$

$$\frac{dz}{dx} = -G(x, z). \tag{2.40}$$

このとき, 任意の $x \in I_0$ について, $\|f(x)\| \leq g(x)$ が成り立つ.

問 2.20 (1) n を正整数, $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $I = [a - \delta, a]$, $I' = (a - \delta, a]$ とし, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる C^1 級関数とし, $\psi(x) = \|f(x)\|$ $(x \in I)$ とする. このとき, 任意の実数 $x \in I'$ において, ψ は左微分可能であることを示せ. ここで, $x = c \in I'$ における ψ の左微分係数を $D_-\psi(c)$ と表すことにする. このとき, より詳しく, $f(c) \neq \mathbf{0}$ ならば ψ は $x = c$ で微分可能であり, $f(c) = \mathbf{0}$ のときは, $D_-\psi(c) = -\left\|\dfrac{df}{dx}(c)\right\|$ が成り立つことを示せ. さらに, ψ の左導関数 $D_-\psi$ は左連続であることを示せ.

(2) (1) を用いて, 定理 2.19 を示せ.

(余 白)

2.3　解の延長.

微分方程式の初期値に対する解の存在や一意性は, 初期値の近くでのみ保証されるものである. ここでは, 局所的に得られた解がどこまで延長できるか考える.

定理 2.21 n を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を空でない開集合とし, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる連続関数, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \delta > 0$ で, $D_0 = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,;\, a \leq x < a+\delta,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| < \alpha\} \subset D$ とする. いま, $I = [a, a+\delta)$ 上で次の微分方程式の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ が存在するとする.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.41}$$

もし, $\lim_{x \to a+\delta} f(x) = \boldsymbol{b}'$ が存在し, $(a+\delta, \boldsymbol{b}') \in D$ であれば, $f(a+\delta) = \boldsymbol{b}'$ とすれば, $\boldsymbol{y} = f(x)$ は微分方程式 (2.41) の $[a, a+\delta]$ 上の解である.

証明. $a' = a + \delta$ と表すことにする. $[a, a')$ において, 微分方程式 (2.41) の解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ は次をみたしている.

$$f(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f(t))dt, \quad x \in [a, a').$$

$(a', \boldsymbol{b}') \in D$ であるから, 正実数 $\alpha_1, \delta_1 > 0$ が存在して, $D_1 = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,;\, |x - a'| < \delta_1,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}'\| < \alpha_1\} \subset D$ となる. よって, 特に F は $D_0 \cup D_1$ 上の連続函数である. さらに, $\boldsymbol{b}' = \lim_{x \to a'} f(x)$ であるから, $F(a', \boldsymbol{b}') = \lim_{x \to a'} F(x, f(x))$ が成り立つ. ゆえに, 有界閉区間 $[a, a']$ 上の関数 $x \mapsto F(x, f(x))$ は連続となり, $[a, a']$ 上の関数 $x \mapsto \int_a^x F(t, f(t))dt$ は微分可能であり, 次が成り立つ.

$$\frac{df}{dx}(x) = F(x, f(x)), \quad x \in [a, a'].$$

従って, $\boldsymbol{y} = f(x)$ は微分方程式 (2.41) の $[a, a']$ 上の解である. ■

さらに, $(a', \boldsymbol{b}')$ の近傍で微分方程式 (2.41) の $g(a') = \boldsymbol{b}'$ なる解 $\boldsymbol{y} = g(x)$ が存在すれば, 解を繋ぎ合わせることができる.

定理 2.22 n を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を空でない開集合とし, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる連続関数とする. また, $a, a' \in \mathbb{R}$ を $a < a'$ なる実数, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in \mathbb{R}^n$ とし, $(a, \boldsymbol{b}), (a', \boldsymbol{b}') \in D$ とする. いま, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.42}$$

さらに, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, 微分方程式 (2.42) の $[a, a')$, $[a', a' + \delta)$ 上の $f(a) = \boldsymbol{b}$, $g(a') = \boldsymbol{b}'$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$, $\boldsymbol{y} = g(x)$ が存在し, $\lim_{x \to a'} f(x) = \boldsymbol{b}'$ が成り立つとする. ここで, $[a, a' + \delta)$ 上の関数 h を次で定義する.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, a'), \\ g(x), & x \in [a', a' + \delta). \end{cases}$$

このとき, $y = h(x)$ は微分方程式 (2.42) の $h(a) = \boldsymbol{b}$ なる $[a, a' + \delta)$ 上の解である.

<u>証明</u>. 定理 2.21 より, $\boldsymbol{y} = h(x)$ は微分方程式 (2.42) の $[a, a']$ 上の解であり, 次が成り立つ.

$$h(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, h(t))dt, \quad x \in [a, a'].$$

特に, h は $x = a'$ において左微分可能である. また, g について, 次が成り立つ.

$$g(x) = \boldsymbol{b}' + \int_{a'}^x F(t, g(t))dt = \boldsymbol{b}' + \int_{a'}^x F(t, h(t))dt, \quad x \in [a', a' + \delta).$$

ゆえに, $x \in [a', a' + \delta)$ について, 次が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} h(x) = g(x) &= \left(\boldsymbol{b} + \int_a^{a'} F(t, h(t))dt \right) + \int_{a'}^x F(t, h(t))dt \\ &= \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, h(t))dt. \end{aligned}$$

従って, $\boldsymbol{y} = h(x)$ は微分方程式 (2.42) の $[a, a'+\delta)$ 上の $h(a) = \boldsymbol{b}$ なる解であり, 特に, $x = a'$ で微分可能である. ■

定理 2.21, 2.22 では, 解が得られている区間から右側へ延長できるかどうかを論じるものである. 同様にして, 区間の左側へも延長できるかどうかも考えることができる.

定理 2.23 n を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を空でない開集合とし, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる連続函数, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \delta > 0$ で, $D_0 = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,;\, a - \delta < x \leq a,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| < \alpha\} \subset D$ とする. いま, $I = (a - \delta, a]$ 上で次の微分方程式の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ が存在するとする.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.43}$$

もし, $\lim_{x \to a - \delta} f(x) = \boldsymbol{b}'$ が存在し, $(a - \delta, \boldsymbol{b}') \in D$ であれば, $f(a - \delta) = \boldsymbol{b}'$ とすれば, $\boldsymbol{y} = f(x)$ は微分方程式 (2.43) の $[a - \delta, a]$ 上の解である.

定理 2.24 n を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を空でない開集合とし, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる連続関数とする. また, $a, a' \in \mathbb{R}$ を $a > a'$ なる実数, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in \mathbb{R}^n$ とし, $(a, \boldsymbol{b}), (a', \boldsymbol{b}') \in D$ とする. いま, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.44}$$

さらに, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, 微分方程式 (2.44) の $(a', a]$, $(a' - \delta, a']$ 上の $f(a) = \boldsymbol{b}$, $g(a') = \boldsymbol{b}'$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$, $\boldsymbol{y} = g(x)$ が存在し, $\lim_{x \to a'} f(x) = \boldsymbol{b}'$ が成り立つとする. ここで, $(a' - \delta, a]$ 上の関数 h を次で定義する.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a', a], \\ g(x), & x \in (a' - \delta, a']. \end{cases}$$

このとき, $y = h(x)$ は微分方程式 (2.44) の $h(a) = \boldsymbol{b}$ なる $(a' - \delta, a]$ 上の解である.

証明は定理 2.21, 2.22 と同様である.

問 2.25 定理 2.21, 2.22 の証明に倣って, 定理 2.23, 2.24 を証明せよ.

定義 2.26 n を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を空でない開集合とし, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる連続関数とする. また, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とし, $(a, \boldsymbol{b}) \in D$ とする. ここで, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.45}$$

いま, $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ を $a \in I_1 \subset I_2$ なる区間とし, $\boldsymbol{y} = f(x)$, $\boldsymbol{y} = g(x)$ をそれぞれ微分方程式 (2.45) の $f(a) = \boldsymbol{b}$, $g(a) = \boldsymbol{b}$ なる I_1, I_2 上の解で, $x \in I_1$ のとき, $g(x) = f(x)$ が成り立つとする. このとき, $\boldsymbol{y} = g(x)$ を $\boldsymbol{y} = f(x)$ の I_2 上への**延長**と呼ぶ.

いま, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を $a_1 < a_2$ なる実数とし, $\boldsymbol{y} = f(x)$ を微分方程式 (2.45) の $I_1 = (a_1, a_2]$ 上の解とする. このとき, $\boldsymbol{b}_2 = f(a_2)$ とすると, $(a_2, \boldsymbol{b}_2) \in D$ であるから, 定理 2.14 より, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, $[a_2, a_2 + \delta)$ 上の $g(a) = \boldsymbol{b}_2$ なる微分方程式 (2.45) の $[a_2, a_2 + \delta)$ 上の解が存在する. そこで, $(a_1, a_2 + \delta)$ 上の関数 h を次で定義する.

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a_1, a_2), \\ g(x), & x \in [a_2, a_2 + \delta). \end{cases}$$

すると, $\boldsymbol{y} = h(x)$ は微分方程式 (2.45) の解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ の $I_2 = (a_1, a_2 + \delta)$ 上への延長である. 即ち, 微分方程式 (2.45) の左半開区間 $I_1 = (a_1, a_2]$ 上の解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ は I_1 を含むある開区間 $I_2 \supset I_1$ 上の解に延長することができる. 同様にして, I_1 が右半開区間 $[a_1, a_2)$, 閉区間 $[a_1, a_2]$ であるときも, I_1 を含むある開区間 $I_2 \supset I_1$ 上の解に延長することができる.

では, 解が存在する区間の中で, 特別なものがないのだろうか.

定義 2.27 n を正整数, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を空でない開集合とし, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ に値をとる連続関数とする. ここで, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}). \tag{2.46}$$

この微分方程式について, 任意の $(a, \boldsymbol{b}) \in D$ に対して, $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ が局所的に一意的に存在するとする. いま, $(a, \boldsymbol{b}) \in D$ とし, $a \in I$ なる開区間 I と微分方程式 (2.46) の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる I 上の解の組 (I, f) すべてを考える.

$$\mathcal{F} = \{(I, f)\,;\, a \in I \text{ は開区間}, \boldsymbol{y} = f(x) \text{ は (2.46) の } f(a) = \boldsymbol{b} \text{なる } I \text{ 上の解}\}. \tag{2.47}$$

いま, $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ を次で得られる開区間とする.

$$\widetilde{I} = \bigcup_{\substack{\exists f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (I,f) \in \mathcal{F}}} I. \tag{2.48}$$

さらに, $\widetilde{f} : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を次のように定義する.

$$\widetilde{f}(x) = f(x), \quad x \in I,\ (I, f) \in \mathcal{F}. \tag{2.49}$$

このとき, $\boldsymbol{y} = \widetilde{f}(x)$ を $\widetilde{f}(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.46) の**最大延長解**, $\widetilde{I}$ を微分方程式 (2.46) の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる解の**最大存在区間**と呼ぶ.

この関数 $\boldsymbol{y} = \widetilde{I}(x)$ が本当に微分方程式 (2.46) の $\widetilde{I}$ 上の解であるかは, 幾つか確認しなければならないことがある.

定理 2.28 定義 2.27 の記号と仮定をそのまま用いるものとする.
(1) 任意の $x \in \widetilde{I}$ について, $\widetilde{f}(x)$ は $x \in I$, $(I, f) \in \mathcal{F}$ なる (I, f) のとり方に依らずに定義することができる. このことより, $\boldsymbol{y} = \widetilde{f}(x)$ は $\widetilde{f}(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.46) の $\widetilde{I}$ 上の解であることが分かる.
(2) 開区間 $J \subset \mathbb{R}$ を $\widetilde{I} \subset J$ かつ $\widetilde{I} \neq J$ なるものとする. このとき, $\boldsymbol{y} = \widetilde{f}(x)$ の J 上への延長は存在しない.

証明. (1) $x \in I_1, I_2$ かつ $(I_1, f_1), (I_2, f_2) \in \mathcal{F}$ とする. このとき, $f_1(x) = f_2(x)$ であることを示せばよい. いま, 正実数 $\delta_0 > 0$ が存在して, 微分方程式 (2.46) の $f_0(a) = \boldsymbol{b}$ なる $I_0 = [a - \delta_0, a + \delta_0]$ 上の解 $\boldsymbol{y} = f_0(x)$ がただ 1 つ存在する. $x \in I_0$ であれば, 解の一意性より, $f_1(x) = f_2(x) = f_0(x)$ である.

ここで, $x > a + \delta_0$ とする. すると, $[a, x] \subset I_1, I_2$ である. このとき, 次のものを考える.

$$M = \sup\{c \geq a\,;\, f_1(t) = f_2(t)\ \forall t \in [a, c]\}. \tag{2.50}$$

ただし, $M = +\infty$ の場合も認める. このとき, f_0 の性質より $M \geq a + \delta_0$ である. もし, $M \leq x$ とすると, $a \leq c < M$ なる任意の実数 c について $t \in [a, c]$ ならば $f_1(t) = f_2(t)$ である. 特に, $f_1(c) = f_2(c)$ であるから, $f_1(M) = f_2(M)$ が成り立つ. ここで, $\boldsymbol{b}' = f_1(M) = f_2(M)$ とすると, $M \leq x$ であるから $(M, \boldsymbol{b}') \in D$ である. よって, 正実数 δ_1 が存在して, $[M, M+\delta_1] \subset I_1, I_2$ かつ $g(M) = \boldsymbol{b}'$ なる微分方程式 (2.46) の $[M, M+\delta_1]$ 上の解がただ 1 つ存在する. よって, $t \in [M, M+\delta_1]$ なる実数 t について, $f_1(t) = f_2(t)$ が成り立つ. これは M のとり方に反する. よって, $M > x$ であり, $f_1(x) = f_2(x)$ である. $x < a - \delta_0$ の場合も同様である.

このことにより, $x \in \widetilde{I}$ について, $x \in I$, $(I, f) \in \mathfrak{F}$ なる (I, f) をとれば, I は開区間であるから, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, $(x-\delta, x+\delta) \subset I$ となる. ゆえに, $t \in (x-\delta, x+\delta)$ なる任意の実数 t について $\widetilde{f}(t) = f(t)$ ととることができる. $\boldsymbol{y} = f(x)$ は I 上の微分方程式 (2.46) の解であるから, $\boldsymbol{y} = \widetilde{f}(x)$ は $(x-\delta, x+\delta)$ において, 微分方程式 (2.46) をみたす. このことが任意の $x \in \widetilde{I}$ について成り立つから, $\boldsymbol{y} = \widetilde{f}(x)$ は微分方程式 (2.46) の $\widetilde{I}$ 上の $\widetilde{f}(a) = \boldsymbol{b}$ なる解である.

(2) もし, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ で, $\boldsymbol{y} = g(x)$ が J 上の $g(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.46) の解であるとすると, $(J, g) \in \mathfrak{F}$ となる. よって, $J \subset \widetilde{I}$ となり, $\widetilde{I} \subset J$ より $J = \widetilde{I}$ が成り立つ. これは, J のとり方に反する. 従って, このような g は存在しない. ■

例 2.29 $D = \mathbb{R}^2$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx} = y^2. \tag{2.51}$$

D 上の関数 y^2 は C^1 級であるから, 定理 2.10 より, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について, $f(a) = b$ なる微分方程式 (2.51) の解が局所的に一意的に存在する. 実際 $y = f(x) = \dfrac{b}{b(a-x)+1}$ とすると, これは, (a, b) の近傍における微分方程式 (2.51) の $f(a) = b$ なる解である. この解はこの形のまま延長することができ, 最大存在区間 $\widetilde{I} \subset \mathbb{R}$ は次のようになる.

$$\widetilde{I} = \begin{cases} \left(-\infty, a + \dfrac{1}{b}\right), & b > 0, \\ (-\infty, +\infty), & b = 0, \\ \left(a + \dfrac{1}{b}, +\infty\right), & b < 0. \end{cases}$$

問 2.30 (1) $y = f(x) = \dfrac{b}{b(a-x)+1}$ が微分方程式 (2.51) の $f(a) = b$ なる解であることを確認せよ.

(2) $b > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x \to (a+\frac{1}{b})-0} f(x)$ を, $b < 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x \to (a+\frac{1}{b})+0} f(x)$ を求めよ.

このように, 一般には, 微分方程式の解の最大存在区間は, 未知関数およびその導関数たちの係数に現れる関数たちの定義域より真に小さくなることがあるが, 微分方程式が線形である場合は, 解の最大存在区間が係数に現れる関数たちが連続である区間と一致する.

定理 2.31 n を正整数, $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間で, $1 \leq j, k \leq n$ なる整数に対して, $\varphi_{j,k} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とし, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(x) & \cdots & \varphi_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1,n}(x) & \cdots & \varphi_{n,n}(x) \end{pmatrix}$, $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$ とする. ここで, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = \varphi(x)\boldsymbol{y} + \psi(x). \tag{2.52}$$

このとき, 任意の $a \in I$ および $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ について, 微分方程式 (2.52) の $f(a) = \boldsymbol{b}$ をみたす解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ は I 全体までただ 1 通りに延長することができる.

<u>証明</u>. $F(x, \boldsymbol{y}) = \varphi(x)\boldsymbol{y} + \psi(x)$ $(x \in I,\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $a' \in I$, $\boldsymbol{b}' \in \mathbb{R}^n$ なる $a', \boldsymbol{b}'$ について, $[a - \delta, a + \delta] \subset I$ なる正実数 $\delta > 0$ および正実数 $\varepsilon > 0$ をとり, $M \geq \max\{|\varphi_{j,k}(x)|\,;\, |x - a| \leq \delta,\ 1 \leq j, k, l \leq n\}$ なる正実数 $M > 0$ をとると, 任意の $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\|F(x, \boldsymbol{y}) - F(x, \boldsymbol{y}')\| &= \|(\varphi(x)\boldsymbol{y} + \psi(x)) - (\varphi(x)\boldsymbol{y}' + \psi(x))\|^2 \\
&= \|\varphi(x)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}')\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \varphi_{j,k}(x)(y_k - y_k') \right|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi_{j,k}(x)|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k - y_k'|^2 \right) \\
&\leq n^2 M^2 \sum_{k=1}^{n} |y_k - y_k'|^2 = n^2 M^2 \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|^2.
\end{aligned}$$

ゆえに, $L = nM > 0$ とすれば, $\|F(x, \boldsymbol{y}) - F(x, \boldsymbol{y}')\| \leq L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|$ となり, 微分方程式 (2.52) は局所リプシッツ条件をみたす. 従って, 解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ が I まで延長できれば, それはただ 1 通りしか存在しない.

そこで, $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.52) の解が, I 全体まで延長できることを示す. $I = (a_-, a_+)$ (ただし, $a_- = -\infty$, あるいは $a_+ = +\infty$ も許す) とし, $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ の最大存在区間を $J = (a_-', a_+')$ とする. 明らかに $a_-' \geq a_-$, $a_+' \leq a_+$ である. ここで, $a_+' < a_+$ と仮定する. なお, $a_+ = +\infty$ のときは, $a_+' \in \mathbb{R}$ と仮定することを意味する.

そこで, 次の性質をみたす正実数 $M_1, M_2 > 0$ をとる.

$$M_1 \geq \max\{|\varphi_{j,k}(x)|\,;\, x \in [a, a'_+],\, 1 \leq j, k \leq n\},$$
$$M_2 \geq \max\{|\psi_j(x)|\,;\, x \in [a, a'_+],\, 1 \leq j \leq n\}.$$

そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dz}{dx} = nM_1 z + \sqrt{n} M_2 + 1. \tag{2.53}$$

この微分方程式の $g(a) = \|\boldsymbol{b}\|$ なる解 $z = g(x)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} g(x) &= \|\boldsymbol{b}\| e^{nM_1(x-a)} + \int_a^x e^{nM_1(x-t)}(\sqrt{n}M_2 + 1)dt \\ &= \|\boldsymbol{b}\| e^{nM_1(x-a)} + \frac{\sqrt{n}M_2 + 1}{nM_1}(e^{nM_1(x-a)} - 1), \quad x \in I = (a_-, a_+). \end{aligned} \tag{2.54}$$

ここで, $G(x, z) = nM_1 z + \sqrt{n}M_2 + 1 \ \ (x \in I,\ z \in \mathbb{R})$ とすると, $x \in [a, a'_+]$ なる x および任意の $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \|F(x, \boldsymbol{y})\| &= \|\varphi(x)\boldsymbol{y} + \psi(x)\| \leq \|\varphi(x)\boldsymbol{y}\| + \|\psi(x)\| \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n \varphi_{j,k}(x) y_k\right|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |\psi_j(x)|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\varphi_{j,k}(x)|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n |y_k|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |\psi_j(x)|^2} \\ &\leq nM_1\|\boldsymbol{y}\| + \sqrt{n}M_2 < G(x, \|\boldsymbol{y}\|). \end{aligned}$$

ゆえに, 定理 2.17 より, $x \in [a, a'_+)$ について次のことが成り立つ.

$$\|f(x)\| \leq g(x) \leq g(a'_+) = \|\boldsymbol{b}\| e^{nM_1(a'_+ - a)} + \frac{\sqrt{n}M_2 + 1}{nM_1}(e^{nM_1(a'_+ - a)} - 1) < +\infty.$$

特に, f は $[a, a'_+)$ において有界である. さらに, g は $[a, a'_+)$ において単調増加であり, 上に有界であるから, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, $0 < \delta_1 < a'_+ - a$ なる実数 δ_1 が存在して, $a'_+ - \delta_1 < x_1 < x_2 < a'_+$ ならば, 次が成り立つ.

$$0 < g(x_2) - g(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} G(t, g(t))dt < \varepsilon.$$

よって, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|f(x_2) - f(x_1)\| &= \left\| \int_{x_1}^{x_2} F(t, f(t))dt \right\| \leq \int_{x_1}^{x_2} \|F(t, f(t))\| dt \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} G(t, \|f(t)\|)dt = \int_{x_1}^{x_2} (nM_1\|f(t)\| + \sqrt{n}M_2 + 1)dt \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} (nM_1 g(t) + \sqrt{n}M_2 + 1)dt = \int_{x_1}^{x_2} G(t, g(t))dt < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

ゆえに, $\boldsymbol{b}' = \lim_{x \to a'_+ - 0} f(x) \in \mathbb{R}^n$ が存在する. この $(a'_+, \boldsymbol{b}') \in I \times \mathbb{R}^n$ について, $0 < \delta' < a_+ - a'_+$ なる実数 δ' が存在して, $x \in [a'_+, a'_+ + \delta')$ 上で $f_1(a'_+) = \boldsymbol{b}'$ なる微分方程式 (2.52) の解 $\boldsymbol{y} = f_1(x)$ が存在する. これは, 微分方程式 (2.52) の $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ が $(a'_-, a'_+ + \delta')$ 上に延長されることを意味する. このことは, $J = (a'_-, a'_+)$ が $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.52) の最大存在区間であることに反する. 従って, $a'_+ = a_+$ となる. 同様にして, $a'_- = a_-$ であることも分かる. ■

問 2.32 定理 2.31 と同じ記号を用いる.

(1) いま, $a'_- > a_-$ と仮定する. ここで, 正実数 $N_1, N_2 > 0$ を次の性質が成り立つようにとる.

$$
\begin{aligned}
N_1 &\geq \max\{|\varphi_{j,k}(x)|\,;\, x \in [a'_-, a],\, 1 \leq j, k \leq n\}, \\
N_2 &\geq \max\{|\psi_j(x)|\,;\, x \in [a'_-, a],\, 1 \leq j \leq n\}.
\end{aligned}
$$

さらに, $H(x, z) = nN_1 z + \sqrt{n}N_2 + 1 \ \ (x \in [a'_-, a],\, z \in \mathbb{R})$ とし, 次の微分方程式を考える.

$$
\frac{dz}{dx} = -H(x, z). \tag{2.55}
$$

このとき, この微分方程式の $h(a) = \|\boldsymbol{b}\|$ なる解 $\boldsymbol{y} = h(x)$ を求めよ.

(2) (1) の h を用いて, $a'_- > a_-$ が成り立つとすると矛盾が起こることを示せ.

2.4 初期値に関する解の連続性.

ここでは, 微分方程式の解の初期値に関する連続性について述べる. そのために, まず, 微分方程式の解のパラメーターに関する連続性について述べることにする.

定理 2.33 l, m を正整数, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$, $\alpha, \beta, \delta > 0$ を正実数とし, $D \subset \mathbb{R}^{l+m+1}$ を次で与えられる $\mathbb{R}^{l+m+1}$ の部分集合とする.

$$D = \{(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l\,;\, |x - a| \leq \delta,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha,\ \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta\}. \tag{2.56}$$

いま, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を, D 上 $\boldsymbol{\mu}$ に関して一様にリプシッツ条件をみたす連続関数, 即ち, 正実数 $L > 0$ が存在して, $|x - a| \leq \delta$, $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|, \|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{b}\| \leq \alpha$, $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta$ なる $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^l$ に対して, 次のことが成り立つ連続関数とする.

$$\|F(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}) - F(x, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{\mu})\| \leq L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|. \tag{2.57}$$

そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}). \tag{2.58}$$

ここで, $M \geq \max\{\|F(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu})\|\,;\,(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\mu}) \in D\}$ なる正実数 $M > 0$ をとり, 正実数 $\delta_0 > 0$ を $\delta_0 = \min\left\{\delta, \dfrac{\alpha}{M}\right\}$ とする. このとき, $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta$ なる $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^l$ に対する $f(a, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.58) の $I = [a - \delta_0, a + \delta_0]$ 上の解 $\boldsymbol{y} = f(x, \boldsymbol{\mu})$ について, f は $I \times \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^l\,;\,\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta\}$ 上連続である.

<u>証明</u>. $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta$ なる $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^l$ をとる. このとき, 定理 2.6 より, I 上 $f(a, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.58) の解がただ 1 つ存在し, 次のことが成り立つ.

$$f(x, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{b} + \int_a^x F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})dt, \quad x \in I. \tag{2.59}$$

よって, $a \leq x \leq a + \delta_0$, $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\|, \|\boldsymbol{\mu}' - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta$ なる $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}' \in \mathbb{R}^l$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\|f(x, \boldsymbol{\mu}) - f(x, \boldsymbol{\mu}')\| &= \left\|\int_a^x F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})dt - \int_a^x F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}'), \boldsymbol{\mu}')dt\right\| \\
&\leq \left\|\int_a^x F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})dt - \int_a^x F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}')dt\right\| \\
&\quad + \left\|\int_a^x F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}')dt - \int_a^x F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}'), \boldsymbol{\mu}')dt\right\| \\
&\leq \int_a^x \|F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) - F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}')\|dt \\
&\quad + \int_a^x \|F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}') - F(t, f(t, \boldsymbol{\mu}'), \boldsymbol{\mu}')\|dt.
\end{aligned}$$

ここで, (2.57) より, 次が得られる.

$$\|F(t,f(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu}')-F(t,f(t,\boldsymbol{\mu}'),\boldsymbol{\mu}')\|\leq L\|f(t,\boldsymbol{\mu})-f(t,\boldsymbol{\mu}')\|,\quad a\leq t\leq a+\delta_0.$$

また, F は有界閉集合 D 上連続であるから, D 上一様連続である. ゆえに, 任意の正実数 $\varepsilon>0$ に対して, 正実数 $\delta_1>0$ が存在して, $(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu}),(x',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{\mu}')\in D$, $|x-x'|,\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'\|,\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}'\|<\delta_1$ ならば, 次が成り立つ.

$$\|F(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu})-F(x',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{\mu}')\|<\varepsilon.$$

よって, 特に, $\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}'\|<\delta_1$ ならば, $a\leq t\leq a+\delta_0$ なる任意の $t\in\mathbb{R}$ について, 次が成り立つ.

$$\|F(t,f(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})-F(t,f(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu}')\|<\varepsilon.$$

従って, $a\leq x\leq a+\delta_0$ なる $x\in\mathbb{R}$, および $\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}\|,\|\boldsymbol{\mu}'-\boldsymbol{\lambda}\|\leq\beta$, かつ $\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu}'\|<\varepsilon$ なる $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\mu}'\in\mathbb{R}^l$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|f(x,\boldsymbol{\mu})-f(x,\boldsymbol{\mu}')\|&\leq\int_a^x\varepsilon dt+\int_a^x L\|f(t,\boldsymbol{\mu})-f(t,\boldsymbol{\mu}')\|dt\\&=\varepsilon(x-a)+\int_a^x L\|f(t,\boldsymbol{\mu})-f(t,\boldsymbol{\mu}')\|dt.\end{aligned}$$

よって, グロンウォールの補題より, 次が得られる.

$$\begin{aligned}\|f(x,\boldsymbol{\mu})-f(x,\boldsymbol{\mu}')\|&\leq\varepsilon(x-a)+\int_a^x L\varepsilon(t-a)\exp\left(\int_t^x Lds\right)dt\\&=\varepsilon(x-a)+\varepsilon e^{Lx}\int_a^x L(t-a)e^{-Lt}dt\\&=\varepsilon(x-a)+\varepsilon e^{Lx}\left(\left[-(t-a)e^{-Lt}\right]_a^x+\int_a^x e^{-Lt}dt\right)\\&=\varepsilon(x-a)+\varepsilon e^{Lx}\left(-(x-a)e^{-Lx}+\left[-\frac{e^{-Lt}}{L}\right]_a^x\right)\\&=\frac{\varepsilon e^{Lx}}{L}(e^{-La}-e^{-Lx})=\frac{\varepsilon}{L}(e^{L(x-a)}-1)\leq\frac{\varepsilon}{L}(e^{L\delta_0}-1).\end{aligned}$$

これは, $a-\delta_0\leq x\leq a$ なる $x\in\mathbb{R}$ についても, 同様に成り立つ.

ところで, $x,x'\in I$, かつ $0\leq x-x'<\dfrac{\varepsilon}{M}$ のとき, $\|\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}\|\leq\beta$ なる任意の $\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{R}^l$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|f(x,\boldsymbol{\mu})-f(x',\boldsymbol{\mu})\|&=\left\|\int_{x'}^x F(t,f(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})dt\right\|\\&\leq\int_{x'}^x\|F(t,f(t,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})\|dt\\&\leq\int_{x'}^x Mdt=M(x-x')<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$-\dfrac{\varepsilon}{M} < x - x' \leq 0$ のときも $\|f(x,\boldsymbol{\mu}) - f(x',\boldsymbol{\mu})\| < \varepsilon$ が成り立つ. 従って, $x, x' \in I$, $|x - x'| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, かつ $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\|, \|\boldsymbol{\mu}' - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta$, $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}'\| < \delta_1$ のとき, 次が得られる.

$$\begin{aligned}\|f(x,\boldsymbol{\mu}) - f(x',\boldsymbol{\mu}')\| &\leq \|f(x,\boldsymbol{\mu}) - f(x',\boldsymbol{\mu})\| + \|f(x',\boldsymbol{\mu}) - f(x',\boldsymbol{\mu}')\| \\ &< \varepsilon + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L\delta_0} - 1) = \varepsilon\frac{e^{L\delta_0} + L - 1}{L}.\end{aligned}$$

これは, f が $I \times \{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^l\,;\, \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\lambda}\| \leq \beta\}$ 上で連続であることを示している. ■

この定理を用いることにより, 微分方程式の解の初期値に関する連続性が得られる.

定理 2.34 *m を正整数, $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{b}^{(0)} \in \mathbb{R}^m$, $\alpha, \delta > 0$ を正実数とし, $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ を次で与えられる $\mathbb{R}^{m+1}$ の部分集合であるとする.*

$$D = \{(x,\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m\,;\, |x - a| \leq \delta,\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}^{(0)}\| \leq \alpha\}. \tag{2.60}$$

いま, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を D 上リプシッツ条件をみたす連続関数, 即ち, 正実数 $L > 0$ が存在して, $|x - a| \leq \delta$, $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}^{(0)}\|, \|\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{b}^{(0)}\| \leq \alpha$ なる $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in \mathbb{R}^m$ について, 次が成り立つ連続関数とする.

$$\|F(x,\boldsymbol{y}) - F(x,\boldsymbol{y}')\| \leq L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\|. \tag{2.61}$$

そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = F(x,\boldsymbol{y}). \tag{2.62}$$

ここで, $M \geq \max\{\|F(x,\boldsymbol{y})\|\,;\,(x,\boldsymbol{y}) \in D\}$ なる正実数 $M > 0$ をとり, $\delta_0 = \min\left\{\delta, \dfrac{\alpha}{2M}\right\}$ とし, $I = [a - \delta_0, a + \delta_0]$, $J = \left\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m\,;\, \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^{(0)}\| \leq \dfrac{\alpha}{2}\right\}$ とする. このとき, 任意の $\boldsymbol{b} \in J$ に対して, $f(a,\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (2.62) の I 上の解 $\boldsymbol{y} = f(x,\boldsymbol{b})$ がただ 1 つ存在し, f を $I \times J$ 上の関数と考えるとき, f は $I \times J$ 上連続である.

証明. $J_0 = \left\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m\,;\, \|\boldsymbol{z}\| \leq \dfrac{\alpha}{2}\right\}$ とし, $D_1 \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ を以下のような部分集合とする.

$$D_1 = \{(x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m\,;\, |x - a| \leq \delta,\ \boldsymbol{z} \in J_0,\ \boldsymbol{b} \in J\}. \tag{2.63}$$

すると, $(x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) \in D_1$ であるとき, $\|(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}^{(0)}\| \leq \|\boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}^{(0)}\| \leq \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \alpha$ となり, $(x, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}) \in D$ である. ここで, $G : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を次で定義する.

$$G(x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) = F(x,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}), \quad (x,\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) \in D_1. \tag{2.64}$$

すると, $\max\{\|G(x, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{b})\| = \|F(x, \boldsymbol{z}+\boldsymbol{b})\|\,;\,(x, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{b}) \in D_1\} \leq M$ が成り立つ. さらに, $|x-a| \leq \delta$ なる任意の $x \in \mathbb{R}$, および任意の $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z}' \in J_0$, $\boldsymbol{b} \in J$ について, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\|G(x, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{b}) - G(x, \boldsymbol{z}', \boldsymbol{b})\| &= \|F(x, \boldsymbol{z}+\boldsymbol{b}) - F(x, \boldsymbol{z}+\boldsymbol{b})\| \\ &\leq L\|(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{z}'+\boldsymbol{b})\| = L\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'\|.\end{aligned}$$

よって, G は D_1 上 $\boldsymbol{b}$ に関して一様にリプシッツ条件をみたす. ここで, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = G(x, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{b}). \tag{2.65}$$

すると, 定理 2.33 より, 任意の $\boldsymbol{b} \in J$ に対して, $g(a, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ なる微分方程式 (2.65) の I 上の解 $\boldsymbol{z} = g(x, \boldsymbol{b})$ がただ 1 つ存在し, g を $I \times J$ 上の関数と考えたとき, g は $I \times J$ 上連続である.

ここで, $x \in I$, $\boldsymbol{b} \in J$ に対して, $f(x, \boldsymbol{b}) = g(x, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}$ とする. すると, f は $I \times J$ 上連続で, $f(a, \boldsymbol{b}) = g(a, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ である. さらに, $\boldsymbol{y} = f(x, \boldsymbol{b})$ は次をみたす.

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} &= \frac{d}{dx}f(x, \boldsymbol{b}) = \frac{d}{dx}(g(x, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}) = \frac{d}{dx}g(x, \boldsymbol{b}) \\ &= G(x, g(x, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{b}) = F(x, g(x, \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}) = F(x, f(x, \boldsymbol{b})).\end{aligned}$$

従って, $\boldsymbol{y} = f(x, \boldsymbol{b})$ は微分方程式 (2.62) の $f(a, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$ なる I 上の解であり, $I \times J$ 上の関数として連続である. ■

3　線形常微分方程式.

常微分方程式の中で, 最も性質を調べやすいのが線形常微分方程式である. 線形常微分方程式は, 解の性質についての一般論が展開できるだけではなく, その性質により具体的な解法も得ることができる.

3.1　斉次線形常微分方程式.

まず, 斉次の線形常微分方程式について述べる. 斉次線形常微分方程式の一般論を展開する際には, 解として複素数値関数をとるものを考えたほうが都合がよい. ここで, 高階線形常微分方程式を考える前に, 1 階連立線形常微分方程式について述べる. そのために, 次の記号を用意する. n を正整数, $\mathbb{K}$ を $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ とする. このとき, $\mathbb{K}$ の元を成分としてもつ n 次正方行列全体のなす集合を $M(n, \mathbb{K})$ と表すことにする.

$$M(n, \mathbb{K}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} ; a_{j,k} \in \mathbb{K},\ 1 \leq j, k \leq n \right\}. \tag{3.1}$$

定理 3.1 n を正整数, $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $A : I \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$ を $M(n, \mathbb{C})$ に値をとる連続関数とする. そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A(x)\boldsymbol{y}. \tag{3.2}$$

いま, $a \in I$ とする. このとき, 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $f(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (3.2) の I 上の解 $\boldsymbol{y} = f(x)$ がただ 1 つ存在する.

<u>証明</u>. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^R + i\boldsymbol{y}^I$ $(\boldsymbol{y}^R, \boldsymbol{y}^I \in \mathbb{R}^n)$, $A(x) = A^R(x) + iA^I(x)$ $(A^R(x), A^I(x) \in M(n, \mathbb{R}))$ とおく. そして, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{2n}$, $B(x) \in M(2n, \mathbb{R})$ を次のようにおく.

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^R \\ \boldsymbol{y}^I \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} A(x) & -B(x) \\ B(x) & A(x) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

すると, $B(x)$ の各成分は, I 上定義される実数値連続関数である. ところで, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dx} &= \frac{d\boldsymbol{y}^R}{dx} + i\frac{d\boldsymbol{y}^I}{dx}, \\ A(x)\boldsymbol{y} &= (A^R(x) + iA^I(x))(\boldsymbol{y}^R + i\boldsymbol{y}^I) \\ &= (A^R(x)\boldsymbol{y}^R - A^I(x)\boldsymbol{y}^I) + i(A^I(x)\boldsymbol{y}^R + A^R(x)\boldsymbol{y}^I). \end{aligned}$$

ゆえに, 次が得られる

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = B(x)\boldsymbol{z}. \tag{3.5}$$

ここで, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^R + i\boldsymbol{b}^I$ $(\boldsymbol{b}^R,\ \boldsymbol{b}^I \in \mathbb{R}^n)$ とおき, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}^R \\ \boldsymbol{b}^I \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{2n}$ である. そして, 定理 2.31 より, 任意の $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{2n}$ に対して, $g(a) = \boldsymbol{c}$ なる I 上の解 $\boldsymbol{z} = g(x)$ がただ 1 つ存在する. このとき, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}^{(1)} \\ \boldsymbol{z}^{(2)} \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{z}^{(1)},\ \boldsymbol{z}^{(2)} \in \mathbb{R}^n)$, $g(x) = \begin{pmatrix} g^{(1)}(x) \\ g^{(2)}(x) \end{pmatrix}$ $(g^{(1)}(x), g^{(2)}(x) \in \mathbb{R})$ とすると, 次が成り立つ.

$$\frac{d\boldsymbol{z}^{(1)}}{dx} = A^R(x)\boldsymbol{z}^{(1)} - A^I(x)\boldsymbol{z}^{(2)}, \quad \frac{d\boldsymbol{z}^{(2)}}{dx} = A^I(x)\boldsymbol{z}^{(1)} + A^R(x)\boldsymbol{z}^{(2)}.$$

そこで, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}^{(1)} + i\boldsymbol{z}^{(2)}$, $f(x) = g^{(1)}(x) + ig^{(2)}(x)$ とおくと, 次が成り立つことが分かる.

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{y}}{dx} &= \frac{d\boldsymbol{z}^{(1)}}{dx} + i\frac{d\boldsymbol{z}^{(2)}}{dx} \\ &= (A^R(x)\boldsymbol{z}^{(1)} - A^I(x)\boldsymbol{z}^{(2)}) + i(A^I\boldsymbol{z}^{(1)} + A^R\boldsymbol{z}^{(2)}) \\ &= (A^R(x) + iA^I(x))(\boldsymbol{z}^{(1)} + i\boldsymbol{z}^{(2)}) = A(x)\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

さらに, $g^{(1)}(a) = \boldsymbol{b}^R$, $g^{(2)}(a) = \boldsymbol{b}^I$ であるから, $f(a) = g^{(1)}(a) + ig^{(2)}(a) = \boldsymbol{b}^R + i\boldsymbol{b}^I = \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ となる. 従って, 定理の主張が示された. ■

線形方程式では, 各導関数の係数として現れる関数が実数値であっても, 解の関数としては複素数値関数をとるほうが便利なことがある.

定理 3.2 *n を正整数, $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $a \in I$ とする. いま, $A : I \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$ を I 上の $M(n, \mathbb{R})$ に値をとる連続関数とし, 次の微分方程式を考える.*

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A(x)\boldsymbol{y}. \tag{3.6}$$

(1) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が, いずれも $\boldsymbol{y} = f(x)$, $\boldsymbol{y} = g(x)$ が微分方程式 (3.6) の実数解であるものとする. このとき, $\boldsymbol{y} = f(x) + g(x)$, $\boldsymbol{y} = cf(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ も微分方程式 (3.6) の解である. そこで, 微分方程式 (3.6) の解である I 上の実数値関数全体のなす集合を $\mathcal{F}_R$ と表すことにする.

$$\mathcal{F}_R = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, \boldsymbol{y} = f(x) \text{ は (3.6)) をみたす}\}. \tag{3.7}$$

すると, $\mathcal{F}_R$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である.

(2) $a \in I$ とし, $\varPhi : \mathbb{R} \ni \boldsymbol{b} \mapsto f_{\boldsymbol{b}}(x) \in \mathcal{F}_R$ を, 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{y} = f_{\boldsymbol{b}}(x)$ が $f(a) = \boldsymbol{b}$ をみたす I 上の実数値関数であるものとする. このとき, $\varPhi$ は $\mathbb{R}$ 上の線形同型写像である. 特に, $\dim \mathcal{F}_R = n$ である.

証明. (1) 任意の $x \in I$ について, 次が成り立つ.

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dx}(x) = A(x)f(x) + A(x)g(x) = A(x)(f+g)(x),$$
$$\frac{d}{dx}(cf)(x) = c\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = c(A(x)f(x)) = A(x)(cf)(x).$$

ゆえに, $\boldsymbol{y} = (f+g)(x)$, $\boldsymbol{y} = (cf)(x)$ も微分方程式 (3.6) の解である. 従って, $\mathcal{F}_R$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる.

(2) $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in \mathbb{R} - n$, $c \in \mathbb{R}$ について, (1) より, $\boldsymbol{y} = f_{\boldsymbol{b}}(x) + f_{\boldsymbol{b}'}(x)$, $\boldsymbol{y} = c(f_{\boldsymbol{b}}(x))$ は微分方程式 (3.6) の解である. さらに, $f_{\boldsymbol{b}}(a) + f_{\boldsymbol{b}'}(a) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'$, $c(f_{\boldsymbol{b}}(a)) = c\boldsymbol{b}$ である. ここで, 定理 2.31 より, $f_{\boldsymbol{b}}(x) + f_{\boldsymbol{b}'}(x) = f_{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}'}(x)$, $c(f_{\boldsymbol{b}}(x)) = f_{c\boldsymbol{b}}(x)$ が成り立つ. ゆえに, Φ は線形写像である. そして, $0 = f_{\boldsymbol{b}}(x)$ とすると, $0 = f_{\boldsymbol{b}}(a) = \boldsymbol{b}$ となるから, Φ は単射である. さらに, 任意の $g(x) \in \mathcal{F}_R$ について, $\boldsymbol{b} = g(a)$ とすると, 定理 2.31 より $g(x) = f_{\boldsymbol{b}}(x)$ である. ゆえに, Φ は全射である. 従って, Φ は線形同型になり, $\dim \mathcal{F}_R = \dim \mathbb{R}^n = n$ であることが分かる. ■

この定理の主張について, $I \subset \mathbb{R}$ を除いて, 実数を複素数に替えたものも成り立つ.

定理 3.3 n を正整数, $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $a \in I$ とする. いま, $A : I \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$ を I 上の $M(n, \mathbb{C})$ に値をとる連続関数とし, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A(x)\boldsymbol{y}. \tag{3.8}$$

(1) $f : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $g : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$ が, いずれも $\boldsymbol{y} = f(x)$, $\boldsymbol{y} = g(x)$ が微分方程式 (3.6) の実数解であるものとする. このとき, $\boldsymbol{y} = f(x) + g(x)$, $\boldsymbol{y} = cf(x)$ $(c \in \mathbb{C})$ も微分方程式 (3.8) の解である. そこで, 微分方程式 (3.8) の解である I 上の複素数値関数全体のなす集合を $\mathcal{F}$ と表すことにする.

$$\mathcal{F} = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{C};\ \boldsymbol{y} = f(x) \text{ は } (3.6)) \text{ をみたす } \}. \tag{3.9}$$

すると, $\mathcal{F}$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間である.

(2) $a \in I$ とし, $\Phi : \mathbb{C} \ni \boldsymbol{b} \mapsto f_{\boldsymbol{b}}(x) \in \mathcal{F}$ を, 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\boldsymbol{y} = f_{\boldsymbol{b}}(x)$ が $f(a) = \boldsymbol{b}$ をみたす I 上の実数値関数であるものとする. このとき, Φ は $\mathbb{C}$ 上の線形同型写像である. 特に, $\dim \mathcal{F} = n$ である.

証明. 定理 2.31 の代わりに, 定理 3.1 を用いれば, あとは定理 3.2 と全く同様な議論である. ■

ここからは, 高階線形常微分方程式を扱う. これは, 1 つの従属変数に関する微分方程式の形をしているが, 従属変数を増やすこよにより, 1 階連立線形常微分方程式に書き直すことができる.

定理 3.4 n を正整数, $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $1 \leq j \leq n$ なる整数 j に対して, $a_j : I \longrightarrow \mathbb{C}$ を連続関数とする. ここで, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.10}$$

この微分方程式 (3.10) の I 上の複素数解 $y = f(x)$ に対して, $g : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$ を次のように定める.

$$g_0(x) = f(x), g_1(x) = \frac{df}{dx}(x), \ldots, g_{n-1}(x) = \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x). \tag{3.11}$$

いま, $A : I \longrightarrow M(n, \mathbb{C})$ を次で定義する.

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I. \tag{3.12}$$

そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = A(x)\boldsymbol{z}. \tag{3.13}$$

すると, 微分方程式 (3.10) の解 $y = f(x)$ に対して, (3.11) で与えられる $\mathbb{C}^n$ に値をもつ関数 $g(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ を構成すると, $\boldsymbol{z} = g(x)$ は微分方程式 (3.13) の解である. 逆に, $\boldsymbol{z} = g(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ が微分方程式 (3.13) の解であれば, $y = g_0(x)$ は微分方程式 (3.10) の解である.

証明. 微分方程式 (3.10) の解 $y = f(x)$ について, $g(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ を (3.11) で与えられる $\mathbb{C}^n$ に値をとる関数とすると, $0 \leq j \leq n-2$ なる整数 j について, 次が成り立つ.

$$\frac{dg_j}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^j f}{dx^j}(x)\right) = \frac{d^{j+1}f}{dx^{j+1}}(x) = g_{j+1}(x).$$

また, 次も得られる.

$$\begin{aligned}\frac{dg_{n-1}}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x)\right) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)\\ &= -a_1(x)\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x) - \cdots - a_{n-1}(x)\frac{df}{dx}(x) - a_n(x)f(x)\\ &= -a_n(x)g_0(x) - a_{n-1}(x)g_1(x) - \cdots - a_1(x)g_{n-1}(x).\end{aligned}$$

ゆえに, $\boldsymbol{z} = g(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ は微分方程式 (3.13) の解である. 逆に, 微分方程式 (3.13) の解 $\boldsymbol{z} = g(x) = \begin{pmatrix} g_0(x) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x) \end{pmatrix}$ に対して, $f(x) = g_0(x)$ とする. すると, $1 \leq j \leq n-1$ なる整数 j について, 次が成り立つ.

$$\frac{d^j f}{dx^j}(x) = g_j(x).$$

実際, $j = 1$ のときは, $\dfrac{df}{dx}(x) = \dfrac{dg_0}{dx}(x) = g_1(x)$ であるから, 主張が成り立つ. そこで, $1 < j \leq n-1$ とし, $j-1$ まで主張が成り立つと仮定する. すると, 次が成り立つ.

$$\frac{d^j f}{dx^j}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{j-1}f}{dx^{j-1}}(x)\right) = \frac{dg_{j-1}}{dx}(x) = g_j(x).$$

ゆえに, j でも主張が成り立つ. さらに, 次が得られる.

$$\begin{aligned}\frac{d^n f}{dx^n}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^n}(x)\right) = \frac{dg_{n-1}}{dx}\\ &= -a_n(x)g_0(x) - a_{n-1}(x)g_1(x) - \cdots - a_1(x)g_{n-1}(x)\\ &= -a_1(x)\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x) - \cdots - a_{n-1}(x)\frac{df}{dx}(x) - a_n(x)f(x).\end{aligned}$$

従って, $y = f(x)$ が微分方程式 (3.10) の解であることが分かる. さらに, その構成法から, $f(x)$ と $g(x)$ の対応は線形同型であることも容易に分かる. ■

この定理により, 高階斉次線形常微分方程式の初期値に対して, ただ 1 つの解をもつことが分かる.

系 3.5 n, $I \subset \mathbb{R}$, $a_j : I \longrightarrow \mathbb{C}$ $(1 \leq j \leq n)$ を定理 3.4 の通りとする. いま, $a \in I$ とし, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ とする. このとき, 微分方程式 (3.10) の I 上の解 $y = f(x)$ で, $0 \leq j \leq n-1$ なるすべての整数 j について, 以下のことが成り立つものがただ 1 つ存在する.

$$\frac{d^j f}{dx^j}(x) = b_j. \tag{3.14}$$

証明. $A(x)$ を 3.12 で与えられる行列とすると, $\boldsymbol{b}$ に対して, $g(a) = \boldsymbol{b}$ なる微分方程式 (3.13) の I 上の解がただ 1 つ存在する. この $g(x)$ について, $f(x) = g_0(x)$ とすると, $0 \leq j \leq n-1$ なる整数 j について, $g_j(a) = b_j$ であり, $\dfrac{d^j f}{dx^j}(a) = g_j(a)$ であるから, 定理 3.4 より, $y = f(x)$ は条件 (3.14) をみたす微分方程式 (3.10) のただ 1 つの解である. ■

高階斉次線形常微分方程式の初期値問題を扱う際には, $\mathbb{C}^n$, あるいは $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{b}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}^{(n)}\}$ を用意して, $\boldsymbol{b}^{(k)} = \begin{pmatrix} b_0^{(k)} \\ \vdots \\ b_{n-1}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ $(1 \leq k \leq n,\ \mathbb{K} = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R})$ として, 初期条件 $\dfrac{d^j f_k}{dx^j}(a) = b_j^k$ $(1 \leq k \leq n,\ 0 \leq j \leq n-1)$ なる解 $y = f_k(x)$ を求め, それらの線形結合として初期値問題の解を表すという方法がよく用いられる. このことを**重ね合せの原理**と呼ぶ. そのときに, $\boldsymbol{b}^{(k)}$ は扱いやすいが, 対応する関数 $f_k(x)$ が扱いにくい, あるいは, 逆に, 関数 $f_k(x)$ は扱いやすいが, 初期値は扱いにくいということがありうる. そこで, 微分方程式の解のなすベクトル空間の中のある関数の族が基底をなしているかどうかを判定する方法を考える.

定義 3.6 n を正整数, $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $1 \leq k \leq n$ なる整数 k について, $f_k : I \longrightarrow \mathbb{C}$ を C^{n-1} 級関数とする. このとき, 次の行列式を $f_1, \ldots, f_n$ の**ロンスキー行列式**, あるいは**ロンスキアン**と呼ぶ.

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ \frac{df_1}{dx}(x) & \frac{df_2}{dx}(x) & \cdots & \frac{df_n}{dx}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1}f_1}{dx^{n-1}}(x) & \frac{d^{n-1}f_2}{dx^{n-1}}(x) & \cdots & \frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}(x) \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

定理 3.7 n を正整数, $I \subset \mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $1 \leq k \leq n$ なる整数 k に対して, $a_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. そして, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0. \tag{3.16}$$

いま, $y = f_j(x)\,(1 \leq j \leq n)$ を微分方程式 (3.16) の n 個の実数解とする. そして, $W(x)$ を $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ のロンスキー行列式とする.

(1) ある $a_0 \in I$ で $W(a_n) \neq 0$ であれば, 任意の $a \in I$ について, $W(a) \neq 0$ が成り立つ.

(2) $\{f_1, \ldots, f_n\}$ が微分方程式 (3.16) の実数解全体のなすベクトル空間 $\mathcal{F}_R$ の基底であるためには, ある $a_0 \in I$ において, $W(a_0) \neq 0$ であることが必要十分である.

<u>証明</u>. (1) 行列式の定義より, $W(x)$ は f_k の高階導関数たちの多項式である. よって, 関数の積の導関数の公式より, 次が得られる.

$$\frac{dW}{dx}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \det \begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d^j f_1}{dx^j}(x)\right) & \cdots & \frac{d}{dx}\left(\frac{d^j f_1}{dx^j}(x)\right) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1} f_1}{dx^{n-1}}(x) & \cdots & \frac{d^{n-1} f_n}{dx^{n-1}}(x) \end{pmatrix}$$

ところが, $0 \leq j \leq n-2$ のとき, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^j f_k}{dx^j}(x)\right) = \frac{d^{j+1} f_k}{dx^{j+1}}(x)$ $(1 \leq k \leq n)$ であるから. 上の等式の右辺に現れる行列の第 $j+1$ 行と第 $j+2$ 行は一致する. ゆえに, その行列式は 0 となり, 次が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx}(x) &= \det \begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-2} f_1}{dx^{j-2}}(x) & \cdots & \frac{d^{n-2} f_n}{dx^{j-2}}(x) \\ \frac{d^n f_1}{dx^n}(x) & \cdots & \frac{d^n f_n}{dx^n}(x) \end{pmatrix} \\ &= -\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \det \begin{pmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-2} f_1}{dx^{n-2}}(x) & \cdots & \frac{d^{n-2} f_n}{dx^{n-2}}(x) \\ \frac{d^{n-j} f_1}{dx^{n-j}}(x) & \cdots & \frac{d^{n-j} f_n}{dx^{n-j}}(x) \end{pmatrix} = -a_1(x)W(x). \end{aligned}$$

これは, $y = W(x)$ が I 上の 1 階線形常微分方程式の解であることを表しており, $W(x)$ は次のように表される.

$$W(x) = W(a_0) \exp\left(\int_{a_0}^{x} (-a_1(t))dt\right), \quad x \in I. \tag{3.17}$$

ゆえに, $W(a_0) \neq 0$ であれば, 任意の $a \in I$ について, $W(a) \neq 0$ であることが分かる.

(2) $1 \leq k \leq n$ なる整数 k について, $g_k(x) = \begin{pmatrix} f_k(x) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} f_k}{dx^{n-1}}(x) \end{pmatrix}$ とする. もし, $f_1, \ldots, f_n$ が線形従属ならば, $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ なる実数 $c_1. \ldots, c_n$ が存在して, 次が成り立つ.

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0.$$

この両辺に対する微分を繰り返すことにより, $0 \leq j \leq n-1$ なる任意の整数 j について, 次が成り立つ.

$$c_1 \frac{d^j f_1}{dx^j}(x) + \cdots + c_n \frac{d^j f_n}{dx^j}(x) = 0.$$

従って, 次のことが得られる.

$$c_1 g_1(x) + \cdots + c_n g_n(x) = \mathbf{0}.$$

特に, 任意の $a \in I$ について $c_1 g_1(a) + \cdots + c_n g_n(a) = \{0\}$ が成り立つ. よって, $g_1(a), \ldots, g_n(a) \in \mathbb{R}^n$ は線形従属になり, $W(a) = \det(g_1(a), \ldots, g_n(a)) = 0$ が得られる.

逆に, ある $a_0 \in I$ において $W(a_0) = 0$ であるとする. すると, $g_1(a_0), \ldots, g_n(a_0)$ は線形従属である. よって, $(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0)$ なる実数 $c_1, \ldots, c_n$ が存在して, $c_1 g_1(a_0) + \cdots + c_n g_n(a_0) = \mathbf{0}$ となる. 特に, $0 \leq j \leq n-1$ なる整数 j について, この等式の第 $j+1$ 成分をとることにより, 次が得られる.

$$c_1 \frac{d^j f_1}{dx^j}(a_0) + \cdots + c_n \frac{d^j f_n}{dx^j}(a_0) = 0.$$

そこで, $h(x) = c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)$ とおく. すると, $y = h(x)$ は微分方程式 (3.16) の I 上の解であり, 次の初期条件をみたす.

$$\frac{d^j h}{dx^j}(a_0) = c_1 \frac{d^j f_1}{dx^j}(a_0) + \cdots + c_n \frac{d^j f_n}{dx^j}(a_0) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

よって, 系 3.5 より, I 上 $h(x) = 0$ (定数関数) であることが分かる. よって, $0 \leq j \leq n-1$ なる任意の整数 j および任意の $a \in I$ について, 次が成り立つ.

$$\frac{d^j h}{dx^j}(a) = c_1 \frac{d^j f_1}{dx^j}(a) + \cdots + c_n \frac{d^j f_n}{dx^j}(a) = 0.$$

これは, $c_1 g_1(a) + \cdots + c_n g_n(a) = \mathbf{0}$ を意味しており, このことより $g_1(a), \ldots, g_n(a) \in \mathbb{R}^n$ が線形従属であることが分かる. よって, $W(a) = \det(g_1(a), \ldots, g_n(a)) = 0$ が得られる. ■