滋賀医科大学医学科第1学年

2016年度 解析 I
定期試験

◯ 注意: 計算過程も記述せよ. 途中の計算が著しく省かれている場合減点の対象になることがあるので注意すること.

$\boxed{1}$ 以下の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cosh 4x}{\mathrm{Tan}^{-1}2x-\log(1+2x)}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\cosh(\log(x^2+2))}{\log(\cosh(x^2)+2)}$.

$\boxed{2}$ 次の整級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n+1}}{(2n+1)!}x^n$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tanh\frac{11^{2n+1}}{5^{3n+2}}\right)x^n$.

$\boxed{3}$ 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{3}{5\sinh x+4\cosh x}\,dx$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{-3x+7}{x^3-x^2+2}\,dx$.

$\boxed{4}$ (1) $I\subset\mathbb{R}$ を空でない開区間とし, $f\,:\,I\longrightarrow\mathbb{R}$ を I 上 弱い意味で 下に凸な関数とする. 即ち, 任意の I の元 $a,\,b\in I$, および $0\le t\le 1$ である任意の実数 t について, $f((1-t)a+tb)\le(1-t)f(a)+tf(b)$ が成り立つとする. このとき, 任意の正整数 n, 任意の n 個の I の元 $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n\in I$, および $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$ である任意の正実数 $t_1,\,t_2,\,\ldots,\,t_n>0$ について, $f\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}t_jx_j\right)\le\displaystyle\sum_{j=1}^{n}t_jf(x_j)$ が成り立つことを示せ.

(2) n を正整数とし, $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n>0$ を n 個の正実数, $p_1,\,p_2,\,\ldots,\,p_n>0$ を $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\cdots+\dfrac{1}{p_n}=1$ となる n 個の正実数とする. このとき, 次の不等式が成り立つことを示せ. なお, 小問 (1) の主張は (たとえ解答できなくても) 用いてよい.

$$\frac{x_1^{p_1}}{p_1}+\frac{x_2^{p_2}}{p_2}+\cdots+\frac{x_n^{p_n}}{p_n}\ge x_1x_2\cdots x_n.$$