滋賀医科大学医学科第 1 学年

2015 年度 解析 I 定期試験

○ 注意: 計算過程も記述せよ. 途中の計算が著しく省かれている場合減点の対象になることがあるので注意すること.

$\boxed{1}$ 以下の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cosh 2x-\sqrt{1+x^2}}{\mathrm{Sin}^{-1}3x-\log(1+3x)}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(3\sinh(x^2+5))}{\sinh(\log(3x^2+5))}$.

$\boxed{2}$ 次の整級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n n!}{(2n)!}x^n$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{Tan}^{-1}\frac{4^{3n+4}}{3^{4n+3}}\right)x^n$.

$\boxed{3}$ 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\cosh x+\sinh x}\,dx$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x-1}{x^3+3x^2+4x+2}\,dx$.

$\boxed{4}$ α を $1<\alpha<2$ なる実数, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を, $a_0=\alpha$, かつ $a_n\le a_{n+1}\le a_n+1\ (n\ge 0)$ なる性質をみたす実数列とし, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を次の漸化式で与えられる数列とする.

$$b_0=1,\ b_1=\alpha,\ b_2=\alpha^2-\alpha,\ b_{n+1}=\frac{n-a_{n-2}}{n}b_n\ (n\ge 2).$$

(1) すべての非負整数 n について, $b_n>0$ であることを示せ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ は収束することを示せ. なお, 証明の際に $\varepsilon-\delta$ 論法を用いなくてよい. また, 任意の実数 α について, $(1-x)^{\alpha}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}x^n$ (ただし, $\binom{\alpha}{n}$ は 2 項係数を表す) が $\underline{|x|<1\text{ なる任意の実数 }x}$ について成り立つことは証明なしで用いてよい.