滋賀医科大学医学科第 1 学年

2014 年度 解析 I
定期試験

○ 注意: 計算過程も記述せよ. 途中の計算が著しく省かれている場合減点の対象になることがあるので注意すること.

$\boxed{1}$ 以下の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{\log(1+3x)-\mathrm{Sin}^{-1}3x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\sinh(\log(3x+2))}{\log(3\sinh x+2)}$.

$\boxed{2}$ 次の整級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n)!}{n^{3n}}x^n$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\log\frac{3^n+4^n}{4^n}\right)x^n$.

$\boxed{3}$ 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{e^x-4e^{-x}}\,dx$.

(2) $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{11x+9}{x^3-x^2+9x-9}\,dx$.

$\boxed{4}$ $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $p_1>1,\ 0<p_n\leq np_1\ (n\geq 1)$, かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=+\infty$ なる単調増加な実数列とする. そして, 正実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を以下のものとする.

$$a_0=1,\quad a_n=\prod_{j=1}^{n}\frac{p_j-1}{p_j}=\frac{p_1-1}{p_1}\cdot\frac{p_2-1}{p_2}\cdots\frac{p_n-1}{p_n}\ (n\geq 1).$$

このとき, 任意の正整数 m について, 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{mn+1}$ は収束することを示せ. なお, 証明の際に $\varepsilon-\delta$ 論法を用いなくてよい. また, 任意の実数 α および非負整数 n について, $(1-x)^{\alpha}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}x^n$ (ただし, $\binom{\alpha}{n}$ は 2 項係数を表す) が $\underline{|x|<1\text{ なる任意の実数 }x}$ について成り立つことは証明なしで用いてもよい.