

# 2013年度 解析 I

## 定期試験

- 注意：計算過程も記述せよ。途中の計算が著しく省かれている場合減点の対象になることがあるので注意すること。

1 以下の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - \cos 2x}{\log(1+3x) - \tan^{-1} 3x}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(\log(3x+4))}{\log(3 \cosh x + 4)}.$$

2 次の整級数の収束半径を求めよ。

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!!} x^n, \quad \text{ただし, } (2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1.$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \tanh\left(\frac{4^{3n+2}}{3^{4n+3}}\right) x^n.$$

3 次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sinh x} dx.$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{5x-6}{x^3+2x^2+4x+8} dx.$$

4 任意の実数  $\alpha$ , および非負整数  $n$  について,  $\binom{\alpha}{n}$  で 2 項係数を表すとする。即ち,

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & n \geq 1, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

すると,  $|x| < 1$  なる任意の実数  $x$  について,  $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$  が成り立つ (このことは証明しなくてもよい)。これを用いて,  $0 < \alpha < 1$  なる任意の実数  $\alpha$  について, 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{n} \right|$  が収束することを示せ。そして, その和を求めよ。なお, 証明の際に  $\varepsilon - \delta$  論法を用いなくてもよい。