滋賀医科大学医学科第 1 学年

2011 年度 解析 I
再試験

◯ 注意: 計算過程も記述せよ. 途中の計算が著しく省かれている場合減点の対象になることがあるので注意すること.

$\boxed{1}$ 以下の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cosh 2x-\exp(x^2)}{2x^2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\log(3e^x+1)}{3e^{\log(x+1)}}$.

$\boxed{2}$ 次の整級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(n+1)!(n+2)!}{(3n+3)!}x^n$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sinh(5n))x^n$.

$\boxed{3}$ 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{5x}{x^3+2x^2+x+2}dx$.

$\boxed{4}$ $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を C^3 級函数とする. すると, テイラーの定理より, 任意の実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して, $0<\theta<1$ なる実数 θ が存在して, 次が成り立つ.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2.$$

もし, f の 3 次の微分係数 $f'''(0)$ が 0 でないならば, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{3}$ となることを示せ.
(ヒント: 2 次の導関数 f'' に平均値の定理を適用することができる. また, f は C^3 級であるから, もう 1 次高い次数までテイラーの定理を適用できる. $x\to 0$ とするとき, これらの各係数がどうなるか考えよ.)