2014年度

線型代数学演習A

No. 13 要約

2014年7月17日実施

1　行列式の展開.

n を $n \geq 2$ なる整数とし, $A = (a_{j,k})$ を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ n 次正方行列とする. $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ なる整数 j, k に対して, A から第 j 行, 第 k 列を除いた $n-1$ 次正方行列の行列式を $\underline{(-1)^{j+k} \text{倍}}$ したものを A の (j, k) **余因子**と呼ぶ.

$$\widetilde{a}_{j,k} = (-1)^{j+k} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,k-1} & a_{j-1,k+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,k-1} & a_{j+1,k+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

余因子ともとの行列の行列式には, 次の関係がある.

定理 1 n を $n \geq 2$ なる整数, $A = (a_{j,k})$ を体 $\mathbb{K}$ を成分にもつ n 次正方行列とし, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ なる整数 j, k に対して, (j, k) 余因子を $\widetilde{a}_{j,k}$ で表すとする. このとき, $1 \leq l, m \leq n$ なる整数 l, m について, 以下のことが成り立つ.

(1) $a_{l,1}\widetilde{a}_{m,1} + a_{l,2}\widetilde{a}_{m,2} + \cdots + a_{l,n}\widetilde{a}_{m,n} = \begin{cases} \det A & (l = m), \\ 0 & (l \neq m). \end{cases}$

(2) $a_{1,l}\widetilde{a}_{1,m} + a_{2,l}\widetilde{a}_{2,m} + \cdots + a_{n,l}\widetilde{a}_{n,m} = \begin{cases} \det A & (l = m), \\ 0 & (l \neq m). \end{cases}$

定理1の (1), (2) における $l = m$ のときの性質をそれぞれ行列式 $\det A$ の**第 l 行に沿った展開**, **第 l 列に沿った展開**という.

n を $n \geq 2$ なる整数とし, A を n 次正方行列とする. このとき, A の $\underline{\underline{(k, j) \text{ 余因子}}}$($(j, k)$ 余因子ではない!) $\widetilde{a}_{k,j}$ を $\underline{\underline{(j, k) \text{ 成分}}}$ にもつ n 次正方行列 $(\widetilde{a}_{k,j})$ を A の**余因子行列**と呼ぶ. A の余因子行列は $\widetilde{A}$ と表されることがある. 定理1より次のことがわかる.

定理 2 n を $n \geq 2$ なる整数, A を体 $\mathbb{K}$ を成分にもつ n 次正方行列とし, $\widetilde{A}$ を A の余因子行列とする. このとき, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)E_n$ が成り立つ.

定理2より次のことがわかる.

系 3 $\det A \neq 0$ ならば, A は正則行列であり, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\widetilde{A}$ が成り立つ.

逆に, n 次正方行列 A が正則ならば, $1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$ が成り立つから, $\det A \neq 0$ である. 従って, 次が得られる.

定理 4 n 次正方行列 A について, A が正則 $\iff \det A \neq 0$.

なお, 1 次正方行列 $A = (a_{1,1})$ に対しては, $(1,1)$ 余因子を $\widetilde{a}_{1,1} = 1$ と定めれば, 余因子行列は $\widetilde{A} = (1)$ であり, 定理 1, 2 および系が成り立つ.

一般の正方行列の行列式の計算は, 行列の基本変形と行列式の展開を用いることにより, 大きさが小さく, かつ計算しやすい行列の行列式の計算に帰着できる. 具体的な方法は以下の通りである.

(1) ある行またはある列に共通因子があれば, それをくくり出す.

(2) ある行に他の行の何倍かを加える, またはある列に他の列の何倍かを加えることを繰り返すことにより, 0 の多い列または行を作る.

(3) (2) で作った 0 の多い行または列に沿って行列式を展開する.

(4) 展開して現れた大きさの小さい行列の行列式について, (1)〜(3) の操作を繰り返す.

このようにして得られる, 大きさが小さく, かつ計算しやすい行列の行列式を計算して, もとの行列の行列式を求めることができる.

2 小行列式.

m, n を正整数とし, $A = (a_{j,k})$ を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m,n) 行列とする. r を $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$ なる整数とし, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq m$, $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$ なる整数の列が与えられたとする. このとき, a_{i_p,j_q} を (p,q) 成分にもつ r 次正方行列の行列式を考える.

$$\det \begin{pmatrix} a_{j_1,k_1} & a_{j_1,k_2} & \cdots & a_{j_1,k_r} \\ a_{j_2,k_1} & a_{j_2,k_2} & \cdots & a_{j_2,k_r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j_r,k_1} & a_{j_r,k_2} & \cdots & a_{j_r,k_r} \end{pmatrix}.$$

このような行列式を総称して r 次の**小行列式**と呼ぶ. $n \geq 2$ なる整数 n について, n 次正方行列 A の余因子は A の $n-1$ 次の小行列式の $\underline{1 \text{倍または} -1 \text{倍}}$ である. 小行列式は行列の階数と次のような関係がある.

定理 5 m, n を正整数とし, A を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m,n) 行列とし, $\operatorname{rank} A = r \geq 1$ とする.

(1) A の r 次の小行列式で 0 でないものが存在する.

(2) A の s 次小行列式で 0 でないものが存在すれば, $s \leq r$ が成り立つ.