2014年度

線型代数学演習A

No. 12 要約

2014年7月14日実施

1　行列式.

n を正整数とし, $A = (a_{jk})$ を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ n 次正方行列とする. このとき, 次で表される値を A の**行列式**と呼ぶ.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

ここで, S_n は n 次対称群を表す. 行列 A が n 次正方行列であることから, $\det A$ を **n 次の行列式**ということがある. 行列式は以下のように表されることもある.

$$|A|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

ただし, $1 \leq k \leq n$ なる k について $\boldsymbol{a}_k$ は A の第 k 列のなす n 次元数ベクトルとする.

行列式を多項式で具体的に表すと $n!$ 項の多項式になる. よって, n が大きいとき, 行列式を定義通り計算するのは必ずしも効率がよいとはいえない. しかし, 0 でない元が現れる成分の配置によっては, 行列式の定義より容易に計算できる場合がある. n 次正方行列 $A = (a_{jk})$ について, $j > k$ ならば $a_{jk} = 0$ であるとき, A は**上半三角行列**, $j < k$ ならば $a_{jk} = 0$ であるとき, A は**下半三角行列**であるといい, これらを総称して**三角行列**と呼ぶ. 三角行列について, 定義より次のことが得られる.

- $A = (a_{jk})$ を n 次三角行列とすると, $\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ が成り立つ.

行列式の定義に現れる置換 σ は n 次対称群 S_n の元すべてにわたるが, n 次の置換の逆置換全体 $\{\sigma^{-1}; \sigma \in S_n\}$ も S_n と一致する. これを用いると, 次のことが得られる.

- n 次正方行列 A について, $\det {}^t\!A = \det A$.

n 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に対して行列式 $\det A$ を対応させる操作は, $\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の n 個の直積集合から $\mathbb{K}$ への写像とみなすことができる.

$$\begin{aligned} \det \,:\, \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \qquad \mathbb{K}, \\ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \quad &\mapsto \quad \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n). \end{aligned}$$

行列式をこのような写像と考えたとき, 以下の性質をみたすことがわかる.

(1) $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}'_j, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}'_j, \dots, \boldsymbol{a}_n)$.

(2) $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, c\boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n) = c\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n), \quad c \in \mathbb{K}$.

(3) $\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_k \ (j < k)$ のとき, $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0$.

(3)(および (1)) より次のこともわかる.

(3)' 任意の $\sigma \in S_n$ について, $\det(\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{a}_{\sigma(2)}, \dots, \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$.

特に, 二つの列を入れ替えると, 行列式は -1 倍される. (1), (2) を行列式の**列についての多重線型性**, (3) を**列についての交代性**と呼ぶ. A の転置行列 ${}^tA$ の行列式 $\det{}^tA$ を考えることにより, 行列式の**行についての多重線型性**, **行についての交代性**も成り立つ. 逆に, 多重線型性および交代性から, 以下のことが得られる.

定理 1 *n を正整数とし, 体 $\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の n 個の直積集合から $\mathbb{K}$ への写像 $F : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ が多重線型性と交代性をもつとする. このとき, 任意の n 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ に対して, 以下のことが成り立つ.*

$$F(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n).$$

ただし, $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{K}^n \ (1 \leq j \leq n)$ は第 j 成分が 1 である基本ベクトルとする.

A を n 次正方行列とし, 定理 1 の F として $F(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n) = \det(A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \dots, A\boldsymbol{b}_n)$ をとることにより, 次のことが得られる.

- n 次正方行列 A, B について, $\det AB = \det A \det B$.

2 行列式と基本変形.

$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ を n 次正方行列とする. すると, 行列式の列についての多重線型性, 交代性により, 列基本変形と行列式の関係がわかる.

(1) A の第 k 列に第 j 列の c 倍 $(c \in \mathbb{K})$ を加える $\Longrightarrow$ 行列式は変わらない.

(2) A の第 j 列と第 k 列を入れ替える $\Longrightarrow$ 行列式は -1 倍される.

(3) A の第 j 列を c 倍 $(c \in \mathbb{K})$ する $\Longrightarrow$ 行列式は c 倍される.

これらは, 各基本行列の行列式が $\det P(j,k;c) = 1$, $\det Q(j,k) = -1$, $\det R(j;c) = c$ となることから, $\det AP(j,k;c)$, $\det AQ(j,k)$, $\det AR(j;c)$ を計算することによっても得られる.

行基本変形についても全く同様に行列式との関係がわかる.

(1) A の第 j 行に第 k 行の c 倍 $(c \in \mathbb{K})$ を加える $\Longrightarrow$ 行列式は変わらない.

(2) A の第 j 行と第 k 行を入れ替える $\Longrightarrow$ 行列式は -1 倍される.

(3) A の第 j 行を c 倍 $(c \in \mathbb{K})$ する $\Longrightarrow$ 行列式は c 倍される.

一般の n 次正方行列の行列式は, 基本変形を繰り返すことにより, 計算しやすい行列 (三角行列など) に変形することにより求めやすくなることがある.