2014 年度

線型代数学演習 A

No. 11 要約

2014 年 7 月 7 日実施

1　置換.

S を集合とするとき, S 上の全単射 $\sigma : S \longrightarrow S$ を S 上の**置換**という. 以下では, n を正整数とし, 集合 S として, 1 から n までの整数全体のなす集合 Ω_n を考えることにする.

$$\Omega_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ω_n 上の置換を **n 次の置換**と呼ぶことにする. σ を n 次の置換とすると, $1 \leq j \leq n$ なる整数 j は $\sigma(j)$ に写る. このことを, 以下のように表す.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

この表示の方法は $(2, n)$ 行列と同じ形をしているが, <u>全く別物である</u>ことに注意しておく. なお, この表示は j の下に $\sigma(j)$ があることが本質であるから, それを守る限り横の順序は変えてもよい.

σ, τ を n 次の置換とする. σ, τ はともに Ω_n 上の全単射だから, その合成写像 $\tau \circ \sigma$ も Ω_n 上の全単射である. この $\tau \circ \sigma$ を τ, σ の**積**と呼び, $\tau\sigma$ と表す. 即ち, $1 \leq j \leq n$ なる任意の整数 j について, $\tau\sigma(j) = \tau(\sigma(j))$ である. また, Ω_n 上の恒等写像は明らかに全単射であるから n 次の置換である. この置換を**恒等置換**と呼び, 単に 1_n と表すことにする.

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

さらに, n 次の置換 σ について, σ は Ω_n 上の全単射だから, その逆写像 σ^{-1} が存在し, σ^{-1} も Ω_n 上の全単射だから n 次の置換である. この σ^{-1} を σ の**逆置換**と呼ぶ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{に対して,}\ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

n 次の置換全体のなす集合を S_n と表し, S_n における乗法を置換の積で与えるとする. すると, S_n は以下の性質をみたす.

(1)　$(\rho\tau)\sigma = \rho(\tau\sigma)$.

(2)　$\sigma 1_n = 1_n \sigma = \sigma$.

(3)　$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1_n$.

このような性質をもつ集合を**群**と呼ぶ. S_n は **n 次対称群**と呼ばれる. n 次の置換 σ についい

て, 列 $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ は $1, 2, \ldots, n$ の順列になっている. 逆に, $1, 2, \ldots, n$ の順列は n 次の置換を与える. よって, S_n の濃度は $\sharp S_n = n!$ である.

Ω_n の相異なる元 $j_1, j_2, \ldots, j_r$ が存在し, $\sigma(j_1) = j_2, \sigma(j_2) = j_3, \ldots, \sigma(j_{r-1}) = j_r, \sigma(j_r) = j_1$, $\sigma(k) = k\,(k \neq j_1, j_2, \ldots, j_r)$ となる n 次の置換を**巡回置換**と呼び, r をその長さと呼ぶ. 長さ 1 の巡回置換は恒等置換である. 巡回置換はしばしば $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ と表される. $r \geq 2$ とし, σ を長さ r の巡回置換とすると, $\sigma^r = 1_n$, $\sigma^l \neq 1_n\,(1 \leq l \leq r-1)$ である. 恒等置換でない n 次の置換は, 実際に動かす元を共通にもたない巡回置換の積で表される.

長さ 2 の巡回置換は**互換**と呼ばれる. 実際に動かす元を a, b とすると, 互換は (a, b) と表される. 巡回置換と互換には次の関係がある.

- $2 \leq r \leq n$ とするとき, 長さ r の n 次の巡回置換 $\sigma = (j_1, j_2, \ldots, j_r)$ について, $(j_1, j_2, \ldots, j_r) = (j_1, j_r)(j_1, j_{r-1}) \cdots (j_1, j_2)$ が成り立つ.

恒等置換でない任意の n 次の置換が巡回置換の積で表されることと組み合わせると, 次のことが得られる.

- 任意の n 次の置換は高々$n-1$ 個の互換の積で表わされる. ただし, 恒等置換は互換の 0 個の積と考える.

2 符号函数.

n を $n \geq 2$ なる整数とし, n 個の変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を考える. 次で与えられる $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次多項式 D を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の**差積**と呼ぶ.

$$D = D(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (X_j - X_k).$$

$n = 1$ のときは $D = D(X_1) = 1$ とする. n 次の置換 σ について, 差積 D の各因子 $X_j - X_k$ の添え字 j, k をそれぞれ $\sigma(j), \sigma(k)$ に変えたものを σD と表す.

$$\sigma D = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(k)}).$$

すると, σD は D または $-D$ のいずれかになる. $\sigma D = D, -D$ なる置換 σ をそれぞれ**偶置換**, **奇置換**と呼ぶ. 任意の互換は奇置換である. また, S_n 上の函数 $\operatorname{sgn} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ を, σ が偶置換のとき 1, 奇置換のとき -1 と定義する. この sgn を**符号函数**と呼ぶ. このとき, 任意の n 次の置換 σ について $\operatorname{sgn} \sigma = \dfrac{\sigma D}{D}$ が成り立つ. sgn には次の性質がある.

- $\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = (\operatorname{sgn} \tau)(\operatorname{sgn} \sigma)$.

明らかに $\operatorname{sgn} 1_n = 1$ だから, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn} \sigma)^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma$ が成り立つ.

$n \geq 2$ のとき, n 次の偶置換全体のなす集合を A_n で表し, **n 次交代群**と呼ぶ. 二つの n 次の偶置換の積はまた偶置換であり, 偶置換の逆置換も偶置換になる. さらに, 恒等置換は偶置換である. よって, A_n も群になる. 偶置換と奇置換の積は奇置換であり, 奇置換と奇置換の積は偶置換である. 互換は奇置換であることから, A_n の濃度は $\sharp A_n = \dfrac{n!}{2}$ である.