2014年度

線型代数学演習A

No. 10 要約

2014年6月30日実施

1 階段行列.

m, n を正整数とするとき, 体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m,n) **階段行列**とは, 以下のものである.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k_1} & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2k_2} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rk_r} & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

ここで, $0 \le r \le m$, $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_r \le n$, $a_{jk_j} \neq 0\,(1 \le j \le r)$, $a_{jk} = 0\,($「$1 \le j \le r$, $1 \le k \le k_j - 1$」, または「$r+1 \le j \le m$, $1 \le k \le n$」$)$ である. この行列にさらに行基本変形を施すことにより, 以下の形, 即ち, $a_{jk_j} = 1\,(1 \le j \le r)$, $a_{lk_j} = 0\,(2 \le j \le r$, $1 \le l \le j-1)$ なる形の階段行列に変形できる. このような階段行列を**簡約行列**と呼ぶことがある.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

特に, $m = n$ かつ階数が n であるとき, 簡約行列は n 次単位行列 E_n である.

2 転置行列.

m, n を正整数とし, $A = (a_{jk})$ を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m,n) 行列とする. このとき, a_{kj} を (j,k) 成分とする $\underline{(n,m)\text{ 行列}}$ を A の**転置行列**と呼び, ${}^tA$ と表す.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ に対して,} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

転置行列には次の性質がある.

(1) ${}^t({}^tA) = A$.

(2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, $\quad {}^t(\alpha A) = \alpha\,{}^tA$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

(3) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

一般に $\underline{{}^t(AB) \neq {}^tA{}^tB}$ である．A が正則行列であれば ${}^tA$ も正則であり，その逆行列は $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である．よって，これらを区別せず ${}^tA^{-1}$ と書く．

3 正則行列.

n を正整数とし，A を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ零行列でない n 次正方行列とする．A は行基本変形により簡約行列に変形できる．その簡約行列が E_n ならば $\mathrm{rank}\, A = n$ である．逆に，$\mathrm{rank}\, A = n$ のときは行基本変形により E_n に変形することができる．二つの n 次正則行列の積はまた n 次正則行列だから，A を行基本変形により E_n に変形することができるならば，ある n 次正方行列 B が存在して，$BA = E_n$ が成り立つ．

一般に，k, l, m, n を正整数とし，A, B, C をそれぞれ体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m, n) 行列，(l, m) 行列，(n, k) 行列とするとき，次のことが成り立つ．

(i) $\mathrm{rank}\, BAC \leq \mathrm{rank}\, A$.

(ii) 特に，$l = m$, $n = k$ かつ B, C がともに正則ならば，$\mathrm{rank}\, BAC = \mathrm{rank}\, A$.

これより，n 次正方行列 A, B について，$\mathrm{rank}\, BA \leq \mathrm{rank}\, A$ より，$BA = E_n$ ならば $\mathrm{rank}\, A = n$ が成り立つ．以上により，n 次正方行列 A について，以下の性質はすべて同値になる．

(1) $\mathrm{rank}\, A = n$.

(2) 行に関する基本変形により，A は段数が n の階段行列に変形できる．

(3) ある n 次正方行列 B が存在して，$BA = E_n$ が成り立つ．

一般に，階数 r の階段行列の第 1 行，$\ldots$，第 r 行たちは一次独立である．よって，一般の行列 A について，$\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, {}^tA$ である．また，基本行列 $P(j, k; c)$, $Q(j, k)$, $R(j; c)$ について，それらの転置行列は ${}^tP(j, k; c) = P(k, j; c)$, ${}^tQ(j, k) = Q(k, j)(= Q(j, k))$, ${}^tR(j; c) = R(j; c)$ となり，基本行列である．そして，上の同値条件に現れる行列の転置行列を考えることにより，n 次正方行列 A について，上の条件に加えて以下の条件もすべて同値になる．

(4) $\mathrm{rank}\, {}^tA = n$.

(5) ある n 次正方行列 C が存在して，$AC = E_n$ が成り立つ．

n 次正方行列 A について，$\mathrm{rank}\, A = n$ は，A が定義する線型写像 $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ が全単射であることと同値である．このことより，次のことが成り立つことがわかる．

定理 1 *n を正整数とし，A を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ n 次正方行列とする．このとき，以下の条件は同値である．*

(1) ある n 次正方行列 B が存在して，$BA = E_n$ が成り立つ．

(2) ある n 次正方行列 C が存在して，$AC = E_n$ が成り立つ．

(3) ある n 次正方行列 X が存在して，$XA = AX = E_n$ が成り立つ．

さらに，これらの B, C, X はすべて一致し，A は正則行列である．