2014年度

線型代数学演習A

No. 9 要約

2014年6月23日実施

1　行列の階数.

m, n を正整数とし, A を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m, n) 行列とする. すると, 線型写像 $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ が定まるが, この線型写像 f_A の階数 $\operatorname{rank} f_A$ を A の**階数**と呼び, $\operatorname{rank} A$ で表す.

A の第 j 列のなす m 次列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ と表す. すると, 次のことが成り立つ.

- $\operatorname{rank} A = \dim\langle\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}\rangle$.

よって, それは $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ の一次独立な部分である組で極大のもの, 即ち, それを真部分として含む一次独立な組が存在しない組の元の個数に等しい.

(m, n) 行列 A について次のことが成り立つ.

- P, Q をそれぞれ m 次, n 次正則行列とするとき, $\operatorname{rank} PAQ = \operatorname{rank} A$.

このことにより, 一般に A の階数を求めるには, まず適当な正則行列を左右から掛け, 階数を計算しやすい行列に変形するのが基本的な手法である.

2　行列の基本変形.

n を正整数とする. このとき, 次の三種類の n 次正方行列を**基本行列**と呼ぶ.

(1)　$P(j, k; c) = E + cE_{jk}$, $1 \leq j, k \leq n$, $j \neq k$, (対角成分がすべて 1, (j, k) 成分が c, 他の成分が 0).

(2)　$Q(j, k) = (E - E_{jj} - E_{kk}) + (E_{jk} + E_{kj})$, $1 \leq j < k \leq n$, ((j, j), (k, k) 成分を除く対角成分および (j, k), (k, j) 成分が 1, 他の成分が 0).

(3)　$R(j; c) = (E - E_{jj}) + cE_{jj}, c \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, ((j, j) 成分を除く対角成分が 1, (j, j) 成分が $c \neq 0$, 他の成分が 0).

(m, n) 行列 A に左から m 次基本行列を掛けることは, A の以下の変形に対応する.

(1)　$P(j, k; c)$ を左から掛ける $\iff$ A の第 j 行に第 k 行の c 倍を加える.

(2)　$Q(j, k)$ を左から掛ける $\iff$ A の第 j 行と第 k 行を入れ替える.

(3)　$R(j; c)$ を左から掛ける $\iff$ A の第 j 行を c 倍する.

これらの操作を総称して**行に関する基本変形**, あるいは**行基本変形**と呼ぶ.

同様に, (m, n) 行列 A に右から n 次基本行列を掛けることは, A の以下の変形に対応する.

(1)　$P(j,k;c)$ を右から掛ける $\iff$ A の第 k 列に第 j 列の c 倍を加える.
(2)　$Q(j,k)$ を右から掛ける $\iff$ A の第 j 列と第 k 列を入れ替える.
(3)　$R(j;c)$ を右から掛ける $\iff$ A の第 j 列を c 倍する.
これらの操作を総称して**列に関する基本変形**, あるいは**列基本変形**と呼ぶ.

基本行列はすべて正則行列であり, それぞれの逆行列は以下のとおりである.

$$P(j,k;c)^{-1} = P(j,k;-c), \quad Q(j,k)^{-1} = Q(j,k), \quad R(j;c)^{-1} = R(j;c^{-1}).$$

基本行列の逆行列も基本行列であり, それらによる変形はもとの変形の逆の操作である.

(m,n) 行列 A の (j,k) 成分が 0 でないとする. すると, 行に関する基本変形により, 第 k 列の (j,k) 成分以外の成分を 0 にすることができる. この操作を (j,k) 成分を要として第 k 列を**掃き出す**という. また, 列に関する基本変形により, 第 j 行の (j,k) 成分以外の成分を 0 にすることができる. この操作を (j,k) 成分を要として第 j 行を**掃き出す**という. 第 j 行, 第 k 列を掃き出したあと, さらに行, 列に関する基本変形を行うことにより, A を $(1,1)$ 成分が 1, 第 1 行および第 1 列の $(1,1)$ 成分を除く成分がすべて 0 である行列に変形することができる. この操作を繰り返すことにより, 次の定理を得る.

定理 1 (m,n) 行列 A に基本変形を繰り返し施すことにより, A は次の形に変形される.

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

さらに, $r = \operatorname{rank} A$ である.

特に, A が n 次正方行列のとき, 正則であることと $\operatorname{rank} A = n$ であることは同値である.

与えられた行列の階数を求めるだけであれば, 行基本変形のみで十分である. 実際, 零行列でない (m,n) 行列 A は次のように変形される.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k_1} & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2k_2} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rk_r} & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

即ち, $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_r \le n$, $a_{jk_j} \ne 0$, $a_{jk} = 0\,(1 \le j \le r,\ 1 \le k \le k_j - 1)$, $a_{jk} = 0\,(r+1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n)$. このような行列を**階段行列**と呼ぶ. 行列 A が上のような階段行列に変形されるとき, $\operatorname{rank} A = r$ である. (零行列 O も階段行列に含めることもあるが, 無論 $\operatorname{rank} O = 0$ である.) 一般に, 行列 A に行基本変形を施すことにより得られる階段行列はただ一つではないが, 得られる階段行列の <u>段数 (0 でない成分が現れる行の個数) は変わらない</u>. なぜならば, A の階数は基本変形により変わらないからである.