2014 年度

線型代数学演習 A

No. 8 要約

2014 年 6 月 16 日実施

1 部分ベクトル空間.

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. V の <u>空でない</u> 部分集合 U が**部分ベクトル空間**, あるいは単に**部分空間**であるとは, 次の二つの条件をみたすことである.

(1) $x, y \in U$ ならば $x + y \in U$.

(2) $x \in U$, $\alpha \in \mathbb{K}$ ならば $\alpha x \in U$.

即ち, <u>加法とスカラー倍の演算に閉じた部分集合</u> を部分ベクトル空間と呼ぶ. V における和とスカラー倍をもって U における和とスカラー倍とすれば, U もベクトル空間になる.

任意のベクトル空間 V について, V 自身と $\{0\} \subset V$ は V の部分ベクトル空間である. これらを V の**自明な**部分ベクトル空間と呼ぶ.

部分ベクトル空間の次元を考える上で次のことは重要である.

補題 1 V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし, S を「任意の相異なる有限個の元たちが一次独立」となる部分集合とする. このとき, S を含む V の部分集合 $S' \supset S$ で, V の基底となるものが存在する.

これにより, U を V の部分ベクトル空間とするとき $\dim U \leq \dim V$ であり, さらに V が <u>有限次元</u> かつ $\dim U = \dim V$ ならば $U = V$ である. なお, V の部分ベクトル空間 U について, $\dim U = m \leq n = \dim V$ とするとき, 一般には V の <u>与えられた</u> 基底 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ から m 個のベクトルを選んで U の基底とすることが <u>できない</u>.

U_1, U_2 をベクトル空間 V の部分ベクトル空間とする. すると, 共通部分 $U_1 \cap U_2$ も部分ベクトル空間である. しかし, 一般に和集合 $U_1 \cup U_2$ は部分ベクトル空間ではない.

ベクトル空間 V の部分集合 S に対して, 次の部分集合 $\langle S \rangle \subset V$ を考える.

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_l x_l \in V\,;\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}, x_1, x_2, \ldots, x_l \in S\} \subset V.$$

即ち, $\langle S \rangle$ とは, S の有限個の元の一次結合で表される V の元全体のなす V の部分集合である. ただし, S が空集合のときは $\langle S \rangle = \{0\}$ とする. すると, $\langle S \rangle$ は V の部分ベクトル空間になることが容易に確かめられる. この $\langle S \rangle$ を S によって**生成された**部分ベクトル空間, あるいは S によって**張られる**部分ベクトル空間と呼ぶ. 作り方から, $\langle S \rangle$ は S を含む V の <u>最小の</u> 部分ベクトル空間である.

U_1, U_2 をベクトル空間 V の部分ベクトル空間とし, 次の部分集合を考える.

$$U_1 + U_2 = \{x_1 + x_2 \,|\, x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}.$$

これは, U_1, U_2 を含む V の最小の部分ベクトル空間である. この $U_1 + U_2$ を U_1, U_2 の**和空間**あるいは**和**と呼ぶ. U_1, U_2 およびその和空間 $U_1 + U_2$ の次元には, 次のような関係がある.

- $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

ベクトル空間 V の部分ベクトル空間 U_1, U_2 について, $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ であるとき, V は U_1, U_2 の**直和**であるといい, $V = U_1 \oplus U_2$ と表す. 特に, V が有限次元ベクトル空間であるとき, V が U_1, U_2 の直和であることは, $V = U_1 + U_2$ かつ $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$ であることとと同値である. $V = U_1 \oplus U_2$ であるとき, V の任意の元 x は U_1 の元 x_1 および U_2 の元 x_2 により $x = x_1 + x_2$ と <u>一意的に</u> 表される. 逆に, V の任意の元 x が U_1 の元と U_2 の元の和として <u>一意的に</u> 表されるとき, $V = U_1 \oplus U_2$ となる.

2　線型写像と部分ベクトル空間.

U, V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし, $f : U \longrightarrow V$ を線型写像とする. U の部分ベクトル空間 U' について, U' の f による**像** $f(U') = \{v \in V\,;\, \exists u \in U',\ v = f(u)\} \subset V$ は V の部分ベクトル空間である. 特に, $U' = U$ のとき U の f による像 $f(U) = \mathrm{Im} f$ は V の部分ベクトル空間になる. この $\mathrm{Im} f$ を f の**像**と呼ぶ. また, V の部分ベクトル空間 V' について, 次で与えられる U の部分集合 $f^{-1}(V') \subset U$ を V' の f による**逆像**と呼ぶ.

$$f^{-1}(V') = \{u \in U\,;\, f(u) \in V'\} \subset U.$$

$f^{-1}(V')$ は U の部分ベクトル空間である. 特に, $V' = \{0\}$ のとき $\{0\}$ の f による逆像 $f^{-1}(\{0\}) = \{u \in U\,;\, f(u) = 0\} \subset U$ は U の部分ベクトル空間である. この $f^{-1}(\{0\})$ を f の**核**と呼び, $\mathrm{Ker} f$ と表す. f の核には, 次の性質がある.

補題 2 線型写像 $f : U \longrightarrow V$ が単射であるためには, $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ であることが必要十分である.

よって, 線型写像 f が単射であるかどうか調べるには, f の核 $\mathrm{Ker} f$ が 0 以外の元をもつかどうか調べればよい.

U, V をベクトル空間, $f : U \longrightarrow V$ を線型写像とするとき, 次の式が成り立つ.

- $\dim U = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f)$　(**次元公式**).

線型写像 $f : U \longrightarrow V$ について, $\mathrm{Im} f$ の次元 $\dim(\mathrm{Im} f)$ を f の**階数**と呼び, $\mathrm{rank} f$ と表す. このとき, 次のことが成り立つ.

(1) f が単射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank} f = \dim U$.

(2) f が全射 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank} f = \dim V$.