2014 年度

線型代数学演習 A

No. 6 要約

2014 年 6 月 2 日実施

1 線型写像の行列表示.

m, n を正整数とし, A を体 $\mathbb{K}$ 上の (m,n) 行列とする. すると, 線型写像 $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n)$ が定義される. 一般に, U, V をそれぞれ体 $\mathbb{K}$ 上の n 次元, m 次元ベクトル空間, $f : U \longrightarrow V$ を線型写像とするとき, f に (m,n) 行列を対応させることができることを以下において説明する. いま, U, V の基底 $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ を固定する. 各 u_k $(1 \leq k \leq n)$ について $f(u_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} v_j$ $(a_{jk} \in \mathbb{K}, 1 \leq j \leq m)$ と表されたとする. これを, 行ベクトルと列ベクトルの積のように, 次のように表すことにする.

$$f(u_k) = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \dots, & v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}.$$

これらを横に並べることにより, 次の表示を得る.

$$\begin{pmatrix} f(u_1), & f(u_2), & \dots, & f(u_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \dots, & v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

この右辺に現れる (m,n) 行列を A_f と表すとき, A_f を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する f の**行列表示**と呼ぶ. f に**対応する行列**, f の**表現行列**と呼ぶこともある. 特に, U, V ともに数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ であり, 基底として標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \dots, \boldsymbol{e}'_m\}$ をとるとき, 行列表示 A_f の各 k 列は $f(\boldsymbol{e}_k) \in \mathbb{K}^m$ そのものである. 即ち, $A_f = \big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \dots, f(\boldsymbol{e}_n)\big)$ となる. U の任意の元 u は $u = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$ と表され, V の元 $f(u)$ は $f(u) = \sum_{j=1}^{m} y_j v_j$ と表されるが, これらを次のように表しなおす.

$$u = \begin{pmatrix} u_1, & u_2, & \dots, u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \dots, & v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

すると, f が線型写像であることより次のような式が得られる.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

この数ベクトル同士の対応は, A_f が定義する $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への線型写像 $\boldsymbol{x} \mapsto A_f\boldsymbol{x}$ に他ならない. 特に, (m,n) 行列 A から得られる線型写像 $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ の標準基底に関する行列表示は $A_{f_A} = A$ である.

U, V, W をそれぞれ体 $\mathbb{K}$ 上の n 次, m 次, l 次ベクトル空間, $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$ をともに線型写像, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $\{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ をそれぞれ U, V, W の基底とし, A_f, A_g をそれぞれこれらの基底に関する f, g の行列表示とする. いま, $A_f = (a_{jk})$, $A_g = (b_{jk})$ とすると, 任意の $u_k\,(1 \leq k \leq n)$ について, 次のことがわかる.

$$(g \circ f)(u_k) = g(f(u_k)) = g\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} v_j\right) = \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}\right) w_i.$$

これは, 合成写像 $g \circ f$ の行列表示 $A_{g\circ f}$ が $A_g A_f$ と一致していることを意味している. 即ち, <u>線型写像の合成写像の行列表示はそれぞれの行列表示の積で表わされる</u>.

$U = V$ であり, かつ基底として同じ $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ をとるとき, その行列表示を $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ に関する f の**行列表示**, あるいは f に**対応する行列**, f の**表現行列**と呼ぶ.

U の二つの基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ が与えられたとする. すると, 各 $u'_k\,(1 \leq k \leq n)$ は $u'_k = \sum_{j=1}^{n} p_{jk} u_j$ と表される. これらは, 次のように表示される.

$$\begin{pmatrix} u'_1, & u'_2, & \dots, & u'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1, & u_2, & \dots, & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

右辺に現れる n 次正方行列を P とおく. この P を**基底** $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ **から** $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ **への変換行列**と呼ぶ. このとき, P は正則であり, 逆行列 P^{-1} は基底 $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ から $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ への変換行列になる. V についても, 二つの基底 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ が与えられたとし, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ から $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ への変換行列を Q とする.

$$\begin{pmatrix} v'_1, & v'_2, & \dots, & v'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \dots, & v_m \end{pmatrix} Q.$$

すると, 次のことがわかる.

- $f : U \longrightarrow V$ を線型写像とし, A を基底 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ に関する f の行列表示とする. このとき, 基底 $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$, $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$ に関する f の行列表示は $Q^{-1}AP$ である.