2014年度

線型代数学演習A

No.5 要約

2014年5月26日実施

1　集合.

ここでは, 線型代数学を学ぶときに当面必要な内容のみを簡単にまとめておく.

集合とは, 数学的な意味で属するかどうかがはっきりする「『もの』の集まり」のこととし, 属する「もの」を**元**と呼ぶ. 高等学校では元は要素と呼ばれることが多い. 2つの集合 A, B について,

$$A \subset B \underset{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ ならば } x \in B.$$

このとき, A は B に含まれる, あるいは B は A を含むといい, A を B の**部分集合**と呼ぶ. 元を1つももたない集合を**空集合**と呼び, $\emptyset$ で表す. 定義より, 空集合 $\emptyset$ はすべての集合の部分集合である.

集合 A に対して, A の元の個数を A の**濃度**と呼ぶ. ここでは A の濃度を $\sharp A$ で表すことにする. $\sharp A$ が有限のとき A を**有限集合**, 無限のとき A を**無限集合**と呼ぶ.

X を集合とし, A, B を X の部分集合とする. このとき, A と B の**和集合** $A \cup B$, **共通部分** $A \cap B$ および (X における) A の**補集合** A^c を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in X\,;\, x \in A \text{ または } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in X\,;\, x \in A \text{ かつ } x \in B\}, \\ A^c &= \{x \in X\,;\, x \notin A\}. \end{aligned}$$

さらに, A と B の**差集合** $A \setminus B$ を $A \setminus B = A \cap B^c = \{x \in A\,;\, x \notin B\}$ と定義する. $A \cup B$, $A \cap B$, A^c, $A \setminus B$ はいずれも X の部分集合である. このような新しい部分集合を作る操作と部分集合の濃度には, 次の関係がある.

(i) $A \cap B = \emptyset$ ならば, $\sharp(A \cup B) = \sharp A + \sharp B$.

(ii) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$ であるから, $\sharp A = \sharp(A \cap B) + \sharp(A \setminus B)$.

(iii) 一般に, $\sharp(A \cup B) + \sharp(A \cap B) = \sharp A + \sharp B$.

2　写像.

集合 A, B について, A の <u>すべての</u> 元 x に対して B の元 $f(x)$ を定める「対応」を A 上の B への**写像**, または A から B への写像と呼び, $f : A \longrightarrow B$ と表す. $x \in A$ に $f(x)$ が対応することを $x \mapsto f(x)$ と表す. (矢印が "$\longrightarrow$" ではなく "$\mapsto$" であることに注意せよ.)

写像 $f : A \longrightarrow B$ について, $f(A) = \{f(x) \,;\, x \in A\} \subset B$ を f の**像**と呼び, $\mathrm{Im} f$ と表す. $\mathrm{Ran} f$, $\mathrm{ran} f$ などと表されることもある.

写像 $f : A \longrightarrow B$ が**単射**であるとは, A の元 x, y について, $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ となることである. 対偶を考えると, 単射であることは, $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ であることと同値である. また, f が**全射**であるとは, $\mathrm{Im} f = B$, 即ち, 任意の $y \in B$ に対して $f(x) = y$ なる $x \in A$ が存在することである. f が単射かつ全射であるとき**全単射**であるという. f が単射のとき $\sharp A \leq \sharp B$, 全射のとき $\sharp A \geq \sharp B$, 全単射のとき $\sharp A = \sharp B$ が成り立つ.

集合 A に対して, $f(x) = x \, (\forall x \in A)$ なる写像 $f : A \longrightarrow A$ を A 上の**恒等写像**と呼び, 1_A, Id_A, id_A などと表す. 恒等写像は明らかに全単射である.

A, B, C を集合とし, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ をそれぞれ写像とする. このとき, 次のような写像 $g \circ f : A \longrightarrow C$ が得られる.

$$g \circ f : A \longrightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

この写像 $g \circ f$ を**合成写像**と呼び, 2 つの写像から合成写像を作る操作を**写像の合成**と呼ぶ. 写像の合成には以下の性質がある.

(i) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ に対して $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(ii) $f : A \longrightarrow B$ に対して $f \circ 1_A = f$, $1_B \circ f = f$.

写像 $f : A \longrightarrow B$ に対して, 次の性質をみたす写像 $g : B \longrightarrow A$ が存在するとする.

$$g \circ f = 1_A, \quad f \circ g = 1_B.$$

このとき, g を f の**逆写像**と呼び, f^{-1} と表す. 次の事実は重要である.

$$f : A \longrightarrow B \text{ が逆写像をもつ} \iff f : A \longrightarrow B \text{ が全単射}.$$

3 線型写像.

$\mathbb{K}$ を体とし, V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. このとき, 写像 $f : V \longrightarrow W$ が ($\mathbb{K}$ 上の) 線型写像であるとは, 次の性質が成り立つことである.

(1) 任意の $x, y \in V$ について, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(2) 任意の $x \in V$ および $\alpha \in \mathbb{K}$ について, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

$\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 V について, V 上の恒等写像 $1_V : V \longrightarrow V$ は線型写像である.

V, W, U を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \longrightarrow W$, $g : W \longrightarrow U$ を線型写像とするとき, 合成写像 $g \circ f : V \longrightarrow U$ も線型写像である. また, f が全単射線型写像であるとき, f の逆写像 $f^{-1} : W \longrightarrow V$ も線型写像である.

一般に, m, n を正整数, $A = (a_{jk})$ を $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m, n) 行列とするとき, 写像 $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \;\; (\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n)$ とすると, f_A は線型写像である.