2014 年度

線型代数学演習 A

No. 4 要約

2014 年 5 月 19 日実施

1　行列.

$\mathbb{K}$ を体, m, n を正整数とする. このとき, 以下のように $\mathbb{K}$ の元を縦に m 個ずつ, 横に n 個ずつ並べたものを (m, n) **行列**という.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

上から j 番目の n 個の元からなる行ベクトル (横ベクトル) を**第 j 行**, 左から k 番目の m 個の元からなる列ベクトル (縦ベクトル) を**第 k 列**と呼び, それらを総称してそれぞれ**行**, **列**と呼ぶ.

$$第\, j\, 行 \ \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}, \quad 第\, k\, 列 \ \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}.$$

第 j 行第 k 列にある元 $a_{jk} \in \mathbb{K}$ を (j, k) **成分**と呼び, a_{jk} たちを総称して (行列) **成分**と呼ぶ.

$m = n$ のときは, (n, n) 行列を n 次**正方行列**と呼ぶ.

行列はしばしば大文字で表わされる. また, A の各成分が a_{jk} であるという意味で $A = (a_{jk})$ などと表されることもある.

(m, n) 行列 $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ および $\mathbb{K}$ の元 α に対して, 和 $A + B$ およびスカラー倍 αA を, 各成分についての和およびスカラー倍で定義する.

$$A + B = (a_{jk} + b_{jk}), \quad \alpha A = (\alpha a_{jk}).$$

$\mathbb{K}$ 上の (m, n) 行列全体のなす集合を $M(m, n, \mathbb{K})$ と表すとすると, $M(m, n, \mathbb{K})$ はこの和およびスカラー倍についてベクトル空間になる. すべての成分が 0 である行列を**零行列**と呼び, $O_{m,n}$, あるいは混乱の恐れがなければ単に O と表わす. これは, $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $M(m, n, \mathbb{K})$ の零ベクトルである. (j, k) 成分が 1, 他の成分が 0 である行列を**行列単位**と呼び, E_{jk} で表わす.

$$E_{jk} = \begin{array}{cc} & k\,列 \\ j\,行 & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \quad (明記されていない成分はすべて\ 0).$$

すると, 行列単位全体 $\{E_{jk}\,;\,1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n\}$ は $M(m,n,\mathbb{K})$ の基底になり, $A = (a_{jk})$ は $A = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{jk}$ と表される. 特に, $\dim M(m,n,\mathbb{K}) = mn$ である.

(l,m) 行列 $A = (a_{jk})$ および (m,n) 行列 $B = (b_{jk})$ に対して, (l,n) 行列 C を, その (j,k) 成分 c_{jk} が A の第 j 行, B の第 k 列の成分を用いて次のように与えられるものとする.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}, \quad c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jm}b_{mk}.$$

この C を A, B の**積**と呼び, AB で表わす. 積には次の性質がある.

(1) $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$.

(2) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB), \quad \alpha \in \mathbb{K}$.

(3) $(AB)C = A(BC)$.

A と B の積 AB が定まるのは, $\underline{A\text{ の列数と }B\text{ の行数が等しいときのみ}}$ である. よって, AB が定義できても BA が定義できるとは限らない. さらに, たとえ AB, BA ともに定義できても, 一般に $\underline{AB\text{ と }BA\text{ は一致しない}}$.

n 次正方行列において, (j,j) 成分たちを総称して**対角成分**と呼ぶ. 対角成分がすべて 1, 他の成分が 0 である n 次正方行列を (n 次) **単位行列**と呼び, E_n, あるいは混乱の恐れがなければ単に E と表す. (<u>単位行列と行列単位は別のもの</u> なので注意せよ.)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

単位行列は次の性質をもつ.

(i) 任意の (m,n) 行列 A に対して $E_mA = AE_n = A$.

(ii) 特に, n 次正方行列 A について $AE = EA = A$ が成り立つ.

n 次正方行列 A について, n 次正方行列が存在して $AB = BA = E$ が成り立つとき, A は**正則行列**であるといい, B を A の**逆行列**と呼び, A^{-1} と表す. 正則行列について, 以下のことが成り立つ.

(1) 正則行列 A の逆行列 A^{-1} も正則行列で, $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 正則行列 A, B に対して, AB も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

一般に $\underline{(AB)^{-1} \ne A^{-1}B^{-1}}$ である. 行列 A が正方行列でなければ逆行列をもたない. また, 零行列 O も逆行列をもたないことが容易にわかる. しかし, 零行列でない正方行列 A であっても逆行列をもたないものが存在することにも注意が必要である.