2014年度

線型代数学演習A

No. 3 要約

2014年5月12日実施

1 ベクトル空間.

$\mathbb{K}$ を体とする. 集合 V が $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間**であるとは, V の元 x, y および体 $\mathbb{K}$ の元 α (これを**スカラー**と呼ぶ) に対して, 和 $x + y \in V$ およびスカラー倍 $\alpha x \in V$ が定義されて, 以下の性質をみたすことである.

(1) $x + y = y + x$.

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(3) ある元 $0 \in V$ が存在して, 任意の $x \in V$ について, $x + 0 = 0 + x = x$.

(4) 任意の $x \in V$ に対して, ある元 $-x \in V$ が存在して, $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

(6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

(7) $\alpha(\beta x) = \beta(\alpha x) = (\alpha\beta)x$.

(8) $1x = x$.

この (1)〜(8) を**ベクトル空間の公理**と呼び, V の元を**ベクトル**と呼ぶ. また, (3) の $0 \in V$ を**零ベクトル**, (4) の $-x \in V$ を $x \in V$ の**逆ベクトル**と呼ぶ.

V の元 x が <u>有限個</u> の V の元 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ とスカラー $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ を用いて $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r$ と表されるとき, x は $x_1, x_2, \ldots, x_r$ の**一次結合**で表されるという. V の有限個のベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_r$ が**一次独立**であるとは, 次が成り立つことである.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

有限個のベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_r$ が一次独立でないとき, **一次従属**であるという. V の部分集合 S が次をみたすとき, V の**基底**であるという.

(1) V のすべての元 x が S の <u>有限個</u> のベクトルの一次結合で表わされる.

(2) S の任意の <u>有限個</u> の相異なるベクトルは一次独立である.

(1) をみたすとき S は V を**生成する**という. S が V の基底であるとき, S の濃度 (元の個数) $\sharp S$ を V の**次元**と呼び, $\dim V$ と表す. $\dim V$ が有限, 無限のとき, それぞれ V を有限次元ベクトル空間, 無限次元ベクトル空間と呼ぶ. V に対して基底 S の取り方は一通りではないが, その濃度 $\sharp S$ は S のとり方によらない.

有限次元ベクトル空間としては, n を正整数としたときの n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ を例に挙げることができる. 無限次元ベクトル空間の例として, 次のものがある.

例 V として, X を変数とし体 $\mathbb{K}$ の元を係数にもつ一変数多項式全体のなす集合 $V = \mathbb{K}[X]$ を考え, 和とスカラー倍は多項式としての和とスカラー倍で与えるとする.

$$\mathbb{K}[X] = \{\alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0\,;\, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{K},\ n\,\text{は非負整数}\,\}.$$

このとき, $\mathbb{K}[X]$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる. 基底としては, 係数 1 の単項式全体 $S = \{X^n\,;\, n\,\text{は非負整数}\,\}$ をとることができる. よって, $\mathbb{K}[X]$ は無限次元である.

2 線型写像 (一次写像).

V, W を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. V から W への写像 $f : V \longrightarrow W$ が**線型写像**, あるいは**一次写像**であるとは, 次の性質が成り立つことである.

(1) 任意の V の元 x, y について, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(2) 任意の V の元 x およびスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ について, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

(1) は f が「和を保存する」, (2) は f が「スカラー倍を保存する」と言うことがある. これらを組み合わせると, f は「一次結合を保存する」ことがわかる.

線型写像 $f : V \longrightarrow W$ が全単射 (上への 1 対 1 写像) であれば, 逆写像 $f^{-1} : W \longrightarrow V$ も線型写像になることが容易に確かめられる. 従って, V と W における「線型」な性質は f (および f^{-1}) によって完全に対応する. 全単射な線型写像を**線型同型写像**と呼ぶ.

r を正整数とし, V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. いま, V の元 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ を一つ固定する. ここで, 写像 $f : \mathbb{K}^r \longrightarrow V$ を次で与える.

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}\right) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r.$$

すると, f は線型写像であり, 次が成り立つ.

(1) f が単射 ((必ずしも「上への」ではない)1 対 1 写像) $\iff$ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ が一次独立.

(2) f が全射 (上への写像) $\iff$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ が V を生成する.

(3) f が全単射 (上への 1 対 1 写像) $\iff$ $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ が V の基底.

よって, n を正整数, V を $\dim V = n$ なるベクトル空間とし, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を V の基底とするとき, この f により V と $\mathbb{K}^n$ を同一視することができる. しかし, 同一視をするときに用いられる写像 f は V の基底の取り方に依存して定まるので, V と $\mathbb{K}^n$ の同一視の仕方は一通りではない. 一般に, ベクトル空間 V には数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の標準基底のような「標準的」と呼べる基底は存在しない.