2014 年度

線型代数学演習 A

No. 2 要約

2014 年 4 月 28 日実施

1 数ベクトル空間.

$\mathbb{K}$ を (可換) 体とする. 当面は $\mathbb{K}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$, 実数体 $\mathbb{R}$ あるいは複素数体 $\mathbb{C}$ と考えて構わない. n を正整数とするとき, $\mathbb{K}^n$ で $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ n 次元列ベクトル (縦ベクトル) 全体のなす集合を表す.

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ;\, x_j \in \mathbb{K}\,(1 \le \forall j \le n) \right\}.$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して, 各 $x_j\,(1 \le j \le n)$ を $\boldsymbol{x}$ の**第 j 成分**と呼び, これらを総称して**成分**と呼ぶ.
(以下では, 体は常に (乗法に関して) 可換である とする.)

$\mathbb{K}^n$ における加法およびスカラー倍を, 各成分ごとの加法とスカラー倍により定義する.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

このように, 加法およびスカラー倍が定義された $\mathbb{K}^n$ を (n 次元) **数ベクトル空間**と呼ぶ. 特に, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のときは, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ をそれぞれ (n 次元) **有理数ベクトル空間**, **実数ベクトル空間**, **複素数ベクトル空間**と呼ぶ.

数ベクトル空間は, 以下の性質 (1)〜(8) をもつ. ただし, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.

(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.

(3) $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ とおくとき, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して, $-\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

(5) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$.

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$.

(7) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = \beta(\alpha\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$.

(8) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

(3) の $\mathbf{0}$ を**零ベクトル**, (4) の $-\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ の**逆ベクトル**と呼ぶ.

r を正整数とし, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}^n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ とするとき, $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r$ と表される $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の**一次結合**と呼び, 各 α_j を**係数**と呼ぶ. $\mathbb{K}^n$ の元 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ が**一次独立**であるとは, 次のことが成り立つことである.

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r = \mathbf{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

これは, $\mathbf{0}$ が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の一次結合で表されるのは自明なとき, 即ち, すべての係数が 0 となるときであることを意味する. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ が一次独立でないとき**一次従属**であるという. 一次独立性に関して, 次の補題が成り立つ.

補題 1 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}^n$ とする. もし, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_r, \boldsymbol{y}_{r+1} \in \mathbb{K}^n$ が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の一次結合で表されるならば, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_r, \boldsymbol{y}_{r+1}$ は一次従属である.

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}^n$ について, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の一次結合で表されるとき, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ は $\mathbb{K}^n$ を**生成する**という. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}^n$ が一次独立かつ $\mathbb{K}^n$ を生成するとき, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r\} \subset \mathbb{K}^n$ を $\mathbb{K}^n$ の**基底**という.

$1 \leq j \leq n$ なる j について, 第 j 成分が 1, 他の成分が 0 である n 次元列ベクトル $\boldsymbol{e}_j \in \mathbb{K}^n$ を**基本ベクトル**という.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の基底であり, 次のことが成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n \ (\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}).$$

このことと補題 1 より, 以下のことが示される.

(i) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{K}^n$ が一次独立 $\implies r \leq n$.

(ii) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r\} \subset \mathbb{K}^n$ が $\mathbb{K}^n$ の基底 $\implies r = n$.

なお, この要約では列ベクトルを $\boldsymbol{x}$ などと書いたが, $\vec{x}$, あるいは単に x と表されることもある. 文脈などから, 何がベクトルで何がスカラーか見極める必要がある.