2014年度

線型代数学演習A

No. 1 要約

2014年4月21日実施

1　複素平面 (Gauss 平面).

(一時期高等学校の課程で複素数平面と呼ばれていたことがある.)

虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ で表すことにする. i はしばしば添え字として用いられ, 混乱することもあり得るので, この演習では極力 i を添え字として用いないようにする.

2次元平面に直交座標が入っているとする. このとき, 複素数 $\alpha = a + bi$ に平面上の点 (a, b) を対応させると, この対応は複素数全体のなす集合 $\mathbb{C}$ から2次元平面 $\mathbb{R}^2$ への上への1対1対応である. この対応により $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視するとき, この平面を**複素平面**, または **Gauss 平面**と呼ぶ.

2次元平面 $\mathbb{R}^2$ を, 単に図形ではなく, しばしば自然な加法とスカラー倍が入ったベクトル空間と考える. すると, 2つの基本ベクトル $(1, 0)$, $(0, 1)$ にはそれぞれ実数1と虚数単位 i が対応する. また, 複素数の加法は, 対応する平面上のベクトルの加法と一致する.

実数全体のなす集合, 純虚数 (0も含む) 全体のなす部分集合は, 複素平面の中でそれぞれ原点を通り基本ベクトル $(1, 0)$, $(0, 1)$ を方向ベクトルにもつ直線になる. これらの直線をそれぞれ**実軸**, **虚軸**と呼ぶ. 実軸は実直線 $\mathbb{R}$ に他ならない. 従って, 複素平面は実直線の自然な拡張とみなせる.

複素数 $\alpha = a + bi$ に対して, 複素平面上の対応する点と原点との距離を α の**絶対値**と呼び, $|\alpha|$ と表す. $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ であり, 以下のことがわかる.

$$|\alpha| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff \alpha = 0.$$

α を0でない複素数とし, 複素平面内の原点を端点とし α に対応する点を通る半直線を α の**動径**と呼ぶ. 1の動径から反時計回りにみた α の動径となす <u>一般角</u> を α の**偏角**と呼び, $\arg \alpha$ と表す. (0については $\arg 0$ は通常定義しない.) 複素数 α に対して $\arg \alpha$ は一意的には定まらないが, 0でない複素数 α, β について, 以下のことが成り立つ.

$$\alpha = \beta \iff |\alpha| = |\beta|, \text{かつ } \arg \alpha = \arg \beta + 2\pi n,\ \exists n \in \mathbb{Z}.$$

逆に, 絶対値 $r > 0$, 偏角 $\theta \in \mathbb{R}$ が与えられると, 複素数 $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が定まる. これを複素数 α の**極座標表示**と呼ぶ.

複素数 $\alpha = a + bi$ に対し, 虚部の符号を変えた複素数 $a - bi$ を α の**共役複素数** (**きょうやくふくそすう**, 読み方に気を付けよ) と呼び, $\overline{\alpha}$ と表す. α と $\overline{\alpha}$ に対応する点は互いに実軸に対して対称な位置 にある.

今まで述べた定義より, 以下のことが示される.

(i) $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

(ii) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$.

(iii) $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

(iv) $\alpha \in \mathbb{R} \iff \overline{\alpha} = \alpha$.

(v) $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2$.

(vi) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

(vii) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (**三角不等式**).

(viii) $\arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta + 2\pi n, \quad \exists n \in \mathbb{Z}$.

(ix) $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
$$= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

(x) 特に, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (**de Moivre の公式**).

複素数 $\alpha, \beta\,(\alpha, \beta \neq 0)$ の積 $\alpha\beta$ は, 次のような図形的性質をもつ. α, β, $\alpha\beta$ に対応する複素平面上の点をそれぞれ A, B, C とし, 原点を O, 1 に対応する点を (この場でのみ)E で表すとする. いま, 三角形 $\triangle OEA$, $\triangle OBC$ を考える. (退化している, 即ち, これらの三角形がある直線に含まれることもありうる.) すると, $\triangle OBC$ は $\triangle OEA$ を原点を中心に $|\beta|$ 倍し, 反時計回りに $\arg\beta$ 回転させたものになる. 特に, $\triangle OEA$ と $\triangle OBC$ は相似であり, 相似比は $1 : |\beta|$ である.

複素平面内の原点を中心とし半径 1 の円周を**単位円周**と呼ぶ. すると, de Moivre の公式より, 次のことがわかる.

補題 1 *正整数 n について, 単位円周を 1 を n 等分点の一つとしてもつように n 等分し, そのときに現れる n 等分点に対応する複素数たちを考える. すると, それらはすべて 1 の n 乗根である.*

1 の n 乗根は高々n 個しか存在しないから, この補題で得られる複素数で尽くされる.