2014年度

$\boxed{\text{線型代数学演習A}}$

No. 14 問題

2014年7月28日実施

$\boxed{1}$ 次の4次複素正方行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 1+i & -1+i \\ 1-i & -1-i & -1+i & -1-i \\ -1-i & 1-i & -1-i & -1+i \\ 1-i & 1+i & -1+i & 1+i \end{pmatrix}.$$

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) A と4次単位行列 E_4 を並べて得られる $(4,8)$ 複素行列 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & E_4 \end{pmatrix}$ に対して行基本変形のみを施して $(4,8)$ 複素行列 $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} E_4 & B \end{pmatrix}$ に変形することにより, A の逆行列 A^{-1} を求めよ. その際, 行基本変形の過程も記述せよ.

$\boxed{2}$ (1) n を正整数, A を n 次複素正方行列とする. このとき, $n + \operatorname{rank} A^2 \geq 2 \operatorname{rank} A$ が成り立つことを示せ.

(2) a を複素数とし, A を以下で与えられる複素行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & a \\ a-5 & 1-a & -2 \\ a^2-2a-1 & 1-a & a^2-2a \end{pmatrix}.$$

このとき, $\operatorname{rank} A^2 = 1$ となる a をすべて求め, それらの a について, $\operatorname{rank} A$ を答えよ.

$\boxed{3}$ V を $\mathbb{C}$ 上の (有限次元とは限らない) ベクトル空間とする. そして, 線型写像 $f, g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ および $a \in \mathbb{C}$ について, 写像 $f+g, af : V \longrightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する.

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v),\ (af)(v) = a(f(v))\ (v \in V).$$

すると, $f+g, af$ はいずれも線型写像である (このことは示さなくてよい). いま, n を $n \geq 2$ なる整数とし, $f_j : V \longrightarrow \mathbb{C}\,(1 \leq j \leq n)$ を線型写像とする.

(1) $f_1 \neq 0$ (零写像) ならば, $f_1(v_1) = 1$, かつ $V = \langle v_1 \rangle + \operatorname{Ker} f_1$ (ただし, $\langle v_1 \rangle \subset V$ は $\{v_1\} \subset V$ で生成される V の部分ベクトル空間) となる $v_1 \in V$ が存在することを示せ.

(2) $\operatorname{Ker} f_n \supset \bigcap_{j=1}^{n-1} \operatorname{Ker} f_j$ が成り立つことと, $f_n = a_1 f_1 + \cdots + a_{n-1} f_{n-1}$ なる複素数 $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ が存在することが同値であることを示せ.

(ヒント: (2) $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ の存在を示すために, n に関する帰納法を用いよ.)