2014年度

線型代数学演習A

No. 13 問題

2014年7月17日実施

$\boxed{1}$ 次のn次正方行列A_n (nは正整数) の行列式を求めよ．ただし，小問(1)では$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，小問(2)では$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$とする．

(1) $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.　(2) $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & 3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & n \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ a, bを複素数とし，3次複素正方行列Aおよび$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^3$を以下で与えられるものとする．

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a & 1 \\ 2a & a-1 & a+1 \\ a-1 & -1 & a \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b-2 \\ 4 \\ b+2 \end{pmatrix}.$$

(1) $\mathrm{rank}A = 2$となるためにaがみたす必要十分条件を求めよ．

(2) $B = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$とするとき，$\mathrm{rank}\, B = 2$となる$a, b$の必要十分条件を求めよ．

$\boxed{3}$ Vを$\mathbb{C}$上のベクトル空間とし，$T : V \longrightarrow V$を線型写像とする．そして，任意の複素係数多項式$f(x) = c_l x^l + \cdots + c_1 x + c_0$ (lは非負整数) に対して，線型写像$f(T) : V \longrightarrow V$を$f(T) = c_l T^l + \cdots + c_1 T + c_0 1_V$ (1_VはV上の恒等写像) で定義する．

(1) nを正整数とし，$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$を，$1 \leq k \leq n$なる任意の整数$k$に対して，$\{a_{jk} \in \mathbb{C} ; 1 \leq j \leq n\} \subset \mathbb{C}$が存在して，$Tv_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} v_j$が成り立つものとする．いま，多項式$f_{jk}(x)\,(1 \leq j, k \leq n)$を$f_{jk}(x) = \delta_{jk} x - a_{jk}\,(\delta_{jj} = 1,\ \delta_{jk} = 0\,(j \neq k))$，$X = (f_{jk}(x))$を$(j,k)$成分が$f_{jk}(x)$である$n$次正方行列，$Y = (g_{jk}(x))$を各成分が複素係数一変数多項式である$n$次正方行列とし，$Z = XY = (h_{jk}(x))$とする．このとき，$1 \leq k \leq n$なる任意の$k$について，$\sum_{j=1}^{n} h_{jk}(T) v_j = 0$が成り立つことを示せ．

(2) $V_1 = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subset V$を$\{v_1, \ldots, v_n\}$で生成される$V$の部分ベクトル空間とする．そして，$\varphi(x) = \det X = \det(f_{jk}(x))$とする．このとき，小問(1)における$Y$として$X$の余因子行列$\widetilde{X} = (\widetilde{f}_{kj}(x))$，即ち，$\underline{(j,k)\text{成分が}X\text{の}(k,j)\text{余因子}\ \widetilde{f}_{kj}(x)\ \text{である行列}}$をとることにより，$\varphi(T)$の定義域を$V_1$に制限したものは，$V_1$上の零写像，即ち，任意の$v \in V_1$について，$\varphi(T)v = 0$が成り立つ写像であることを示せ．