2014年度

線型代数学演習A

No. 12 問題

2014年7月14日実施

○ 記号: 正整数 n について, S_n で n 次の置換全体のなす集合 (n 次対称群) を表すとする.

$\boxed{1}$ 以下の n 次複素正方行列 $A = (a_{jk})$ ((1) では $n = 4$, (2) では $n = 5$) について, 置換を用いた<u>下記の定義に基づいて</u>(行列の基本変形, および行や列に沿った展開公式を用いずに) 行列式 $\det A$ を計算せよ. その際に, 明らかに 0 となることが分かる項は記述しなくてもよい.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ 以下の n 次複素正方行列 A ((1), (2) それぞれ $n = 4, 5$) について, 行列に <u>基本変形を施す</u> ことにより (行や列に沿った展開公式を用いずに) 行列式 $\det A$ を計算せよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 13 \\ 1 & 5 & 12 & 25 \\ 1 & 7 & 27 & 61 \\ 1 & 9 & 52 & 139 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} i & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ a, b, c, d を複素数とし, 4 次複素正方行列 X, Y を以下のものとする.

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & a & -b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

(1) $s, t \in \{\pm 1\}$ とするとき, X の行列式 $\det X$ は a, b, c, d の多項式として $a+sb+tc+std$ で割り切れることを示せ. そして, <u>a^4 の係数に着目して</u> $\det X$ を a, b, c, d の 1 次式の積に因数分解せよ.

(2) Y の行列式 $\det Y$ を a, b, c, d の多項式として割り切る a, b, c, d の複素係数 1 次式で, a の係数が 1 であるものをすべて与えよ.

(3) a, b, c, d がすべて実数であるならば, $\det Y \geq 0$ であることを示せ.