2014年度

線型代数学演習A

No. 11 問題

2014年7月7日実施

○ 記号: 正整数nについて, S_nでn次の置換全体のなす集合 (n次対称群) を表すとする.

$\boxed{1}$ 以下の置換σを, 互換の積として表せ. そして, σの符号$\operatorname{sgn}\sigma$を求めよ.

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 8 & 2 & 10 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 9 & 10 & 6 & 11 & 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 6 & 2 & 1 & 10 & 11 & 5 & 8 & 4 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

(4) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 8 & 13 & 10 & 9 & 5 & 7 & 3 & 11 & 4 & 12 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 9 & 6 & 10 & 2 & 13 & 1 & 4 & 5 & 8 & 3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \in S_{13}$を13次の置換とする.

(1) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 6 & 7 & 9 & 13 & 8 & 4 & 3 & 12 & 1 & 5 & 2 & 11 & 10 \end{pmatrix} \in S_{13}$とする. このとき, $\tau\sigma$, $\sigma^{-1}\tau$, $\tau\sigma\tau^{-1}$, $\sigma^{-1}\tau\sigma\tau^{-1}\sigma$を求めよ.

(2) $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 10 & 13 & 7 & 2 & 1 & 11 & 8 & 3 & 6 & 5 & 9 & 4 & 12 \end{pmatrix} \in S_{13}$とする. このとき, $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$となる$\tau \in S_{13}$で, $\tau(5) = 11$, $\tau(7) = 8$, $\tau(8) = 10$, $\tau(13) = 4$なるものを与えよ.

$\boxed{3}$ nを$n \geq 2$なる整数, fを複素係数n変数多項式とし, $\sigma \in S_n$をn次の置換とするとき, 多項式σfを$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$と定義する. すると, 任意の$n$次の置換$\sigma, \tau \in S_n$について, $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$が成り立つ (このことは証明なしで用いてよい). そして, 任意の$\sigma \in S_n$について$\sigma f = f$が成り立つとき, fを**対称式**, 任意の$\sigma \in S_n$について$\sigma f = (\operatorname{sgn}\sigma)f$が成り立つとき, fを**交代式**と呼ぶ.

(1) 対称式, かつ交代式である複素係数n変数多項式fは零多項式であることを示せ.

(2) 複素係数n変数多項式fを, 任意のn次の偶置換σについて$\sigma f = f$が成り立つものとする. このとき, 任意の二つの互換$\sigma, \tau \in S_n$について, $\sigma f = \tau f$が成り立つことを示せ.

(3) 小問(2)の条件が成り立つfについて, 対称式gおよび交代式hで, $f = g + h$をみたすものがただ一組存在することを示せ.