2014年度

線型代数学演習A

No. 10 問題

2014年6月30日実施

$\boxed{1}$ 以下の複素行列について, 行基本変形のみを施すことにより, 簡約行列, 即ち, 階段行列であって, その階数を r とし, 第 j 行 $(1 \leq j \leq r)$ の 0 でない成分のうち最も左にある成分を a_{jk_j} とするとき, $a_{jk_j} = 1$ であり, かつ第 k_j 列の他の成分は 0 である行列に変形せよ. その際, その行基本変形の具体的な操作も記述せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 7 & -6 \end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ 以下で与えられる n 次複素正則行列 A (小問 (1) では $n = 3$, 小問 (2) では $n = 4$) について, A と n 次単位行列 E_n を並べて得られる $(n, 2n)$ 複素行列を $\widetilde{A} = (A \ \ E_n)$ とおく. このとき, $\widetilde{A}$ に行基本変形のみを施して, $\widetilde{B} = (E_n \ \ B)$ と変形することにより, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ -i & i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$.　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ n を正整数とし, $M(n, \mathbb{C})$ で n 次複素正方行列全体のなす集合を表すとする. いま, $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して, $G \subset M(n, \mathbb{C})$ を以下の部分集合とする.

$$G = \{X \in M(n, \mathbb{C})\,;\, XA\,{}^t\!X = A\}.$$

(1) $X, Y \in G$ ならば, $XY \in G$ であることを示せ. さらに, $X \in G$ が正則行列であるならば, $X^{-1} \in G$ であることを示せ.

(2) A が正則行列であるならば, 任意の $X \in G$ は正則行列であることを示せ.

(3) A が ${}^t\!A = A$, かつ $A^2 = E_n$ (E_n は n 次単位行列) なる性質をもつとする. このとき, 任意の $X \in G$ について, ${}^t\!X \in G$ が成り立つことを示せ.