2014年度

線型代数学演習A

No. 9 問題

2014年6月23日実施

$\boxed{1}$ 以下の複素行列について, (有限回の) 基本変形を施すことにより, $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形せよ．その際, 基本変形の具体的な操作も記述せよ．なお, 最終形において, 下の2つの O, あるいは右の2つの O は現れないことがある．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \in \mathbb{C}^4$ を以下のものとする．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ を並べて得られる行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ とする．このとき, A に <u>行基本変形のみ</u> を施して, 階段行列 B に変形せよ．その際, 行基本変形の具体的な操作も記述せよ．

(2) $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \rangle \subset \mathbb{C}^4$ で, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ で生成される $\mathbb{C}^4$ の部分ベクトル空間を表すとする．このとき, 以下の性質をみたすベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_r}\}$ ($r = \dim V$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq 5$) を, 性質がみたされていることも示して選べ．

(i) $1 \leq k \leq r$ のとき, $\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_k}$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である．

(ii) $1 \leq k \leq r$, かつ $j_{k-1} < l < j_k$ (ただし, $j_0 = 0$) なるとき, $\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_{k-1}}, \boldsymbol{a}_l$ は $\mathbb{C}$ 上一次従属である．

$\boxed{3}$ l, m, n を正整数, A を l 次複素正方行列, B, C をそれぞれ (l, n) 複素行列, (m, l) 複素行列とし, $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$ とする．また, B, C, X の階数をそれぞれ r_B, r_C, r_X とする．

(1) $r_X \geq r_B + r_C$ が成り立つことを示せ．

(2) $l = \max\{r_B, r_C\}$ のとき, $r_X = r_B + r_C$ であることを示せ．