2014年度

$\boxed{\text{線型代数学演習A}}$

No. 8 問題

2014年6月16日実施

$\boxed{1}$ 以下の $\mathbb{C}^3$ の部分集合 $S \subset \mathbb{C}^3$ が部分ベクトル空間であるか, 根拠を添えて答えよ.

(1) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,;\, 3x_1 - 2x_2 - |x_3| = 0 \right\}$.

(2) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,;\, (x_1 - x_2)(x_1 + x_3) = 0 \right\}$.

(3) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,;\, \begin{array}{l} x_1^2 + 2x_2x_3 = 0,\ x_2^2 - 2x_1x_3 = 0, \\ (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{x}_1,\, \boldsymbol{x}_2,\, \boldsymbol{x}_3,\, \boldsymbol{x}_4,\, \boldsymbol{x}_5 \in \mathbb{C}^4$ を以下のものとする.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

そして, $W_1 = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle \subset \mathbb{C}^4$ を $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ で, $W_2 = \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_5 \rangle \subset \mathbb{C}^4$ を $\boldsymbol{x}_3$, $\boldsymbol{x}_4$, $\boldsymbol{x}_5$ で生成される $\mathbb{C}^4$ の部分ベクトル空間とする.

(1) $\dim W_2$ を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組与えよ.

(3) 小問 (2) で得られる $W_1 \cap W_2$ の基底に適当なベクトルを付け加えることにより, $W_1 + W_2$ の基底を一組与えよ. その際に, 基底である根拠も示せ.

$\boxed{3}$ V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $W_1, W_2, W_3 \subset V$ を V の部分ベクトル空間とする.

(1) $V = W_1 \oplus W_2$, かつ $W_2 \subset W_3$ が成り立てば, $W_3 = (W_1 \cap W_3) \oplus W_2$ が成り立つことを示せ.

(2) 小問 (1) の条件が成り立つとき, $W' \subset W_1$ および $V = W' \oplus W_3$ が成り立つ V の部分ベクトル空間 $W' \subset V$ が存在することを示せ.