2014年度

線型代数学演習A

No. 7 問題

2014年6月9日実施

○ 記号: n を正整数とするとき, n 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n,\mathbb{C})$ と表すことにする.

$\boxed{1}$ a, b を複素数とし, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{C}^4$ を以下の4次複素数ベクトルとする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属となる a, b の必要十分条件を正確に与えよ.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属となる a, b がみたす必要十分条件を正確に与えよ.

$\boxed{2}$ α を複素数, β を $\beta \neq 1$ なる複素数, $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 2\alpha & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 2\beta \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{C})$ とし, A と乗法に関して可換な3次複素正方行列全体のなす集合を M_A とする.

$$M_A = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{C})\,;\, AX = XA \right\}.$$

(1) $\alpha = 2$ のとき, M_A を求めよ.

(2) $\alpha = 2\beta (\neq 2)$ のとき, M_A を求めよ.

$\boxed{3}$ $V = \{f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\,;\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$ を高々2次一変数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, $f \in V$ に対して, f に x^2 を掛けて得られる多項式を x^3+x^2+x+1 で割ったときの余りを Tf とする. 即ち, 一変数複素係数多項式 q が存在して,

$$x^2 f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)q(x) + Tf(x),\ Tf(x) \in V.$$

(1) 写像 $T : V \longrightarrow V$ が $\mathbb{C}$ 上の線型写像であることを示せ.

(2) $f_1(x) = x^2 + x,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = x + 1$ とするとき, V の基底 $\{f_1, f_2, f_3\}$ に関する T の行列表示を求めよ.

(3) T は全単射であることを示せ.