2014年度

線型代数学演習A

No. 6 問題

2014年6月2日実施

○ 記号: n を正整数とするとき, n 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n,\mathbb{C})$ と表すことにする.

$\boxed{1}$ $V=\{f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\,;\,a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{C}\}$ を高々3次複素係数一変数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, $T:V\longrightarrow V$ を以下で与えられる線型写像とする.

$$Tf(x)=x(f(x+1)+f(-x))+2f(-1)(3x^3-x).$$

この T について, V の以下の基底 $\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ に関する行列表示を求めよ.

(1) $f_0(x)=1$ (定数項のみの多項式), $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^3$.

(2) $f_0(x)=2x^3-x^2-x$, $f_1(x)=x^3+x^2+x$, $f_2(x)=x^2+x-1$, $f_3(x)=x^3+x^2$.

$\boxed{2}$ $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$ とし, $f:\mathbb{C}^3\longrightarrow\mathbb{C}^3$ を $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^3)$ とする. このとき, 線型写像 f の, 以下で与えられる $\mathbb{C}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ に関する行列表示を求めよ. ただし, $\boldsymbol{e}_j\in\mathbb{C}^3$ $(j=1,2,3)$ は第 j 成分が1, 他の成分が0である基本ベクトルとする.

(1) $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$.

(2) $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{e}_1+(-1+i)\boldsymbol{e}_2+i\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{v}_3=-\boldsymbol{e}_1+(1+i)\boldsymbol{e}_2+i\boldsymbol{e}_3$.

$\boxed{3}$ $V=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C})\,;\,a,b\in\mathbb{C}\right\}$ とする. すると, V は通常の加法, スカラー倍について $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であり, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とすると, $\{A,B\}\subset V$ は V の基底である.

(1) $f:V\longrightarrow V$ を $\mathbb{C}$ 上の線型写像とし, $f(A)=x_{11}A+x_{21}B$, $f(B)=x_{12}A+x_{22}B$ $(x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\in\mathbb{C})$ とする. このとき, $f(A)B-Bf(A)+Af(B)-f(B)A=f(B)$ が成り立つための必要十分条件を, $x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}$ を用いて簡潔に表せ.

(2) $C\in V$ とし, $X\in V$ に対して, $f_C(X)=CX-XC$ とすると, $f_C(X)\in V$ となる (このことは証明しなくてもよい). このとき, $f_C:V\longrightarrow V$ が $\mathbb{C}$ 上の線型写像であり, $f_C(A)B-Bf_C(A)+Af_C(B)-f_C(B)A=f_C(B)$ が成り立つことを示せ.

(3) 小問 (1) の f について, $f=f_C$ となる $C\in V$ を, $x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}$ で表せ.