2014年度

線型代数学演習A

No. 5 問題

2014年5月26日実施

$\boxed{1}$ 以下の写像 $f : A \longrightarrow B$ が全単射であることを示せ.

(1) $A = \{l \in \mathbb{Z}\,;\, 0 \le l \le 220\}$, $B = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2\,;\, 0 \le m \le 12,\, 0 \le n \le 16\}$, $f(l) = (g(l), h(l))$, ただし, $\mathbb{Z}$ は整数全体のなす集合を表し, $g(l)$, $h(l)$ はそれぞれ l を 13, 17 で割った余り, 即ち, 整数 k_1, k_2 が存在して,

$$l = 13k_1 + g(l) = 17k_2 + h(l),\ 0 \le g(l) \le 12,\ 0 \le h(l) \le 16.$$

(2) $A = \{p(x) = a_1 x + a_0\,;\, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, $B = \mathbb{R}^2$, $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(23) \\ p(37) \end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ 以下の写像 $f : V \longrightarrow W$ が $\mathbb{R}$ 上の線型写像であるかどうか, 理由を付けて答えよ. ただし, $\mathbb{R}^2 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,;\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ とする.

(1) $V = W = \{p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0\,;\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, $f(p(x)) = p(7x) - p(-7x)$.

(2) $V = W = \mathbb{R}^2$, $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1 \end{pmatrix}$.

(3) $V = W = \mathbb{R}^2$, $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 内の直線 $l_1 : 2x_1 - x_2 = 5$, $l_2 : x_1 = 1$, $l_3 : x_1 + x_2 = -2$ に関する線対称変換とし, $f = g_3 \circ g_2 \circ g_1$.

$\boxed{3}$ (1) A, B, C を空でない有限集合とし, $f : B \longrightarrow C$ を全射である写像とする. このとき, A から C への任意の写像 $g : A \longrightarrow C$ に対して, A から B への写像 $h : A \longrightarrow B$ で, $g = f \circ h$ をみたすものが少なくとも1つ存在することを示せ.

(2) U, V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, $\dim U = n > 0$ とし, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset U$ を U の基底, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ とする. いま, 写像 $f : U \longrightarrow V$ を以下で定義する.

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j,\ \text{ただし},\ u = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j,\quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}.$$

このとき, f は $\mathbb{C}$ 上の線型写像であることを示せ.

(3) U, V, W はいずれも $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, $f : V \longrightarrow W$ は $\mathbb{C}$ 上の全射線型写像とする. このとき, $\mathbb{C}$ 上の任意の線型写像 $g : U \longrightarrow W$ に対して, $g = f \circ h$ をみたす $\mathbb{C}$ 上の線型写像 $h : U \longrightarrow V$ が少なくとも1つ存在することを示せ.