2014 年度

線型代数学演習 A

No. 4 問題

2014 年 5 月 19 日実施

○ 記号: n を正整数とするとき, n 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n, \mathbb{C})$ と表すことにする.

$\boxed{1}$ 2 次複素正方行列 $X=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$ を, 次の 4 個の行列の一次結合として表せ.

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

(2) $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_3 = B_1 B_2 B_1$, $B_4 = B_2 B_1 B_2^2$.

$\boxed{2}$ $A \in M(3, \mathbb{C})$ が与えられたとき, A と (乗法に関して) 可換な 3 次複素正方行列全体のなす集合を M_A と表すとする.

$$M_A = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{C})\,;\, AX = XA \right\}.$$

A が以下のものであるとき, M_A を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ n を正整数とし, $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ とする. そして, B の l 乗 B^l (l は非負整数) を帰納的に $B^0 = E_n$ (n 次単位行列), $B^l = B^{l-1}B$ $(l \geq 1)$ と定義する. すると, 任意の非負整数 l, m について, $B^{l+m} = B^l B^m = B^m B^l$ が成り立つ (このことは証明しなくてもよい).

(1) $AB^m = B^m A$, $AB^{m+1} = B^{m+1}A$ が成り立つ <u>正整数</u> m が存在するならば, $l \geq m$ なる任意の整数 l について, $AB^l = B^l A$ が成り立つことを示せ.

(2) 小問 (1) の条件に加えて, さらに B が正則行列であるならば, 任意の整数 l について, $AB^l = B^l A$ が成り立つことを示せ. ただし, $B^{-l} = (B^{-1})^l$ (l は正整数) とする.

(3) b を複素数, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & b \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ とする. このとき, $AB \neq BA$, $AB^2 = B^2 A$, $AB^3 = B^3 A$ となる b を求めよ.