2014 年度

線型代数学演習 A

No. 3 問題

2014 年 5 月 12 日実施

$\boxed{1}$ $V = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,;\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$ で高々3 次の複素係数一変数多項式全体のなす集合を表し, 通常の和とスカラー倍により, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える. このとき, 以下の多項式たち $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ が一次独立か, あるいは一次従属か, 根拠を添えて答えよ.

(1) $f_1(x) = x^3 + (1+i)x^2 + ix$, $f_2(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $f_3(x) = x^3 + (1-i)x^2 - ix$, $f_4(x) = x^2 + 1$.

(2) $f_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $f_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $f_3(x) = x^3 - x^2 - 2x$, $f_4(x) = x^3 - 3x - 2$.

$\boxed{2}$ $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, 連続\}$ で $\mathbb{R}$ 上の実数値連続函数全体のなす集合を表すとする. すると, 函数としての和と実数倍により, V は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である (このことは示さなくてよい). このとき, 以下の函数たちが一次独立であることを示せ.

(1) $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin x \cos x$, $f_3(x) = \sin^2 x$.

(2) $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = (x+1)e^x$, $f_3(x) = x + e^x$.

$\boxed{3}$ $V = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, 連続\}$ で有界閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続函数全体のなす集合を表し, 函数としての和と実数倍により, V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える. (V がベクトル空間であることは示さなくてよい.)

(1) n を正整数, $\{l_j\}_{j=1}^n$ を狭義単調増加正整数列, 即ち, $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_n$ なる整数列とする. そして, c を $c \notin [0,1]$ なる実数とし, $1 \leq j \leq n$ なる整数 j について, 閉区間 $[0,1]$ 上の函数 $f_j \in V$ を $f_j(x) = \dfrac{1}{(x-c)^{l_j}}$ $(x \in [0,1])$ とする. このとき, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) 閉区間 $[0,1]$ 上の函数 $g_1, g_2, g_3 \in V$ をそれぞれ $g_1(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^4}$, $g_2(x) = \dfrac{1}{(1+x^4)^2}$, $g_3(x) = \dfrac{1}{1+x^8}$ $(x \in [0,1])$ とする. このとき, g_1, g_2, g_3 は $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ.