2014年度

$\boxed{\text{線型代数学演習A}}$

No. 2 問題

2014年4月28日実施

$\boxed{1}$ 以下の3次複素数ベクトルを考える.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -i \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ が $\mathbb{C}^3$ を $\mathbb{C}$ 上生成しないことを, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の一次結合で表すことができない複素数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3$ を1つ (<u>根拠を添えて</u>) 与えることにより示せ.

$\boxed{2}$ a, b を複素数とし, 以下の4次複素数ベクトルを考える.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(1) a がどのような複素数であっても, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ.

$\boxed{3}$ (1) α_1, α_2 を相異なる複素数, $f(x)$, $g(x)$ を高々1次の複素係数多項式で, $f(1)g(0) \neq f(0)g(1)$ が成り立つものとし, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ g(\alpha_1) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} f(\alpha_2) \\ g(\alpha_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とする. このとき, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) α_1, α_2, $f(x)$, $g(x)$ は小問 (1) の条件をみたすものとする. そして, β を複素数, $h(x)$ を高々1次の複素係数多項式とし, $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ g(\alpha_1) \\ h(\alpha_1) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} f(\alpha_2) \\ g(\alpha_2) \\ h(\alpha_2) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} f(\beta) \\ g(\beta) \\ h(\beta) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ とする. このとき, $\boldsymbol{z}$ が $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ の一次結合として表されることを, その係数を $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ を用いて表すことにより示せ.