2014年度

線型代数学演習A

No. 1 問題

2014年4月21日実施

$\boxed{1}$ (1) $z^8 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ をみたす複素数 z で, 偏角が最小の正実数であるものを求めよ.

(2) $z^8 = -8-8\sqrt{3}i$ をみたす複素数 z をすべて求めよ.

$\boxed{2}$ (1) n を正整数, $a_0, a_2, \ldots, a_{2n}$ を実数, $a_1, a_3, \ldots, a_{2n+1}$ を純虚数とし, $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k z^k$ とする. いま, 複素数 α について, $f(\alpha) = 0$ が成り立つとする. このとき, $f(-\overline{\alpha}) = 0$ も成り立つことを示せ.

(2) z を変数とし, 偶数次の係数が実数, 奇数次の係数が純虚数である零多項式でない多項式 $f(z)$ で, $f(1+i) = f(3i) = 0$ が成り立ち, 次数が最小なものを考える. そのようなもののうち, それが偶数次多項式であれば最高次の係数が1, 奇数次多項式であれば最高次の係数が i であるものを求めよ.

$\boxed{3}$ 複素数 z について, z の実部, 虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ と表すことにする. 即ち, $z = x + yi$ (x, y は実数) であるとき, $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\, z = y$ である.

(1) 相異なる複素数 z_1, z_2 について, 複素平面内で z_1, z_2 を通る直線 l の方程式は次で与えられる (このことは証明しなくてよい).

$$(\overline{z}_2 - \overline{z}_1)(z - z_1) - (z_2 - z_1)(\overline{z} - \overline{z}_1) = 0.$$

いま, $\mathrm{Im}\, z_1 > 0$, かつ $\mathrm{Im}\, z_2 < 0$ とする. このとき, 直線 l と実軸の交点である実数 a を, $\mathrm{Im}\, z_1$, $\mathrm{Im}\, z_2$, および $\mathrm{Im} z_1 \overline{z}_2$ を用いて表せ.

(2) z_1, z_2 を小問 (1) の仮定に加えて $|z_1| = 1$ が成り立つものとし, さらに小問 (1) における a は $|a| < 1$ をみたすとする. いま, $|z_1 - a| \cdot |z_2 - a| = 1 - a^2$ が成り立つとする. このとき, $|z_2| = 1$ であることを, <u>初等幾何 (円周角, 三角形の相似等) を用いずに</u>示せ. なお, $0 < \arg w_1 < \pi < \arg w_2 < 2\pi$ なる複素数 w_1, w_2 および0が複素平面において同一直線上にあるとき, $\arg w_2 = \arg w_1 + \pi$ であることは証明なしで用いてよい. (ヒント: $(z_1 - a)(\overline{z}_2 - a)$ がどのような値になるか考えよ.)