2014 年度

線型代数学演習A

No. 13 例題

2014 年 7 月 17 日実施

$\boxed{1}$ 以下の正方行列 A について, 行または列に沿って展開することにより, 行列式 $\det A$ を計算せよ.

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}. \qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&2&1\\2&1&0&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&2&1&0&0\\-1&0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$

(略解) (1)

$$\begin{aligned}
\det A &= 1\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\\
&=\left(1\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right)\\
&\quad-\left(1\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)\\
&\quad+\left(1\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right)\\
&=(-(1\cdot1-1\cdot1)+(1\cdot1-0\cdot1))-((0\cdot1-1\cdot1)-(1\cdot1-1\cdot1))\\
&\quad+((1\cdot1-1\cdot1)-(0\cdot1-1\cdot1))\\
&=1-(-1)+1=3.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\det A &= 2\cdot(-1)^{1+4}\det\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&2&1&0\\-1&0&0&-2\end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{1+5}\det\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&0&-2&1\\0&2&1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\\
&=-2\cdot(-2)\cdot(-1)^{4+4}\det\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&-2\\0&2&1\end{pmatrix}+1\cdot(-1)^{2+4}\det\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\\
&=4\cdot(-2)\cdot(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\\
&=8\cdot(2\cdot2-0\cdot1)-(1\cdot1-2\cdot0)=32-1=31.
\end{aligned}$$

(参考: 行や列に沿った展開は, ひたすら行のみ, あるいは列のみとこだわる必要はなく, 行列によって適宜どちらかに沿った展開を行えばよい. また, 単に行列式を求めるのであれば, 行や列に沿った展開公式のみを用いるというのではなく, 必要に応じて基本変形や置換を用いた定義を併用すればよい.)

$\boxed{2}$ (3,4) 複素行列 $A=\begin{pmatrix}3&2&1&4\\2&3&4&1\\4&6&8&2\end{pmatrix}$ について, 2 次, 3 次の小行列式をすべて計算せよ. そして, それに基づいて, A の階数 $\mathrm{rank}A$ を求めよ.

(略解) まず, 2 次の小行列式を求める.

$\det\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}=3\cdot3-2\cdot2=5,\quad \det\begin{pmatrix}3&1\\2&4\end{pmatrix}=3\cdot4-2\cdot1=10,\quad \det\begin{pmatrix}3&4\\2&1\end{pmatrix}=3\cdot1-2\cdot4=-5,$

$\det\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=5,\quad \det\begin{pmatrix}2&4\\3&1\end{pmatrix}=2\cdot1-3\cdot4=-10,\quad \det\begin{pmatrix}1&4\\4&1\end{pmatrix}=1\cdot1-4\cdot4=-15,$

$\det\begin{pmatrix}3&2\\4&6\end{pmatrix}=3\cdot6-4\cdot2=10,\quad \det\begin{pmatrix}3&1\\4&8\end{pmatrix}=3\cdot8-4\cdot1=20,\quad \det\begin{pmatrix}3&4\\4&2\end{pmatrix}=3\cdot2-4\cdot4=-10,$

$\det\begin{pmatrix}2&1\\6&8\end{pmatrix}=2\cdot8-6\cdot1=10,\quad \det\begin{pmatrix}2&4\\6&2\end{pmatrix}=2\cdot2-6\cdot4=-20,\quad \det\begin{pmatrix}1&4\\8&2\end{pmatrix}=1\cdot2-8\cdot4=-30,$

$\det\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}=2\cdot6-4\cdot3=0,\quad \det\begin{pmatrix}2&4\\4&8\end{pmatrix}=2\cdot8-4\cdot4=0,\quad \det\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}=2\cdot2-4\cdot1=0,$

$\det\begin{pmatrix}3&4\\6&8\end{pmatrix}=3\cdot8-6\cdot4=0,\quad \det\begin{pmatrix}3&1\\6&2\end{pmatrix}=3\cdot2-6\cdot1=0,\quad \det\begin{pmatrix}4&1\\8&2\end{pmatrix}=4\cdot2-8\cdot1=0.$

次に, 3 次の小行列式を, 置換を用いた定義に基づいて求める.

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}3&2&1\\2&3&4\\4&6&8\end{pmatrix}&=1\cdot3\cdot3\cdot8+(-1)\cdot3\cdot6\cdot4+(-1)\cdot2\cdot2\cdot8\\&\quad+1\cdot2\cdot6\cdot1+1\cdot4\cdot2\cdot4+(-1)\cdot4\cdot3\cdot1\\&=72+(-72)+(-32)+12+32+(-12)=0,\\ \det\begin{pmatrix}3&2&4\\2&3&1\\4&6&2\end{pmatrix}&=1\cdot3\cdot3\cdot2+(-1)\cdot3\cdot6\cdot1+(-1)\cdot2\cdot2\cdot2\\&\quad+1\cdot2\cdot6\cdot4+1\cdot4\cdot2\cdot1+(-1)\cdot4\cdot3\cdot4\\&=18+(-18)+(-8)+48+8+(-48)=0,\\ \det\begin{pmatrix}3&1&4\\2&4&1\\4&8&2\end{pmatrix}&=1\cdot3\cdot4\cdot2+(-1)\cdot3\cdot8\cdot1+(-1)\cdot2\cdot1\cdot2\\&\quad+1\cdot2\cdot8\cdot4+1\cdot4\cdot1\cdot1+(-1)\cdot4\cdot4\cdot4\\&=24+(-24)+(-4)+64+4+(-64)=0,\\ \det\begin{pmatrix}2&1&4\\3&4&1\\6&8&2\end{pmatrix}&=1\cdot2\cdot4\cdot2+(-1)\cdot2\cdot8\cdot1+(-1)\cdot3\cdot1\cdot2\\&\quad+1\cdot3\cdot8\cdot4+1\cdot6\cdot1\cdot1+(-1)\cdot6\cdot4\cdot4\\&=16+(-16)+(-6)+96+6+(-96)=0.\end{aligned}$$

従って, A の階数は $\mathrm{rank}A=2$ である.

（参考: $\mathrm{rank}A$ は A を行基本変形することにより求めることができる. また, A の第 3 行は第 2 行の 2 倍であるから, 小行列式を計算する 4 個の 3 次正方行列もすべて第 3 行が第 2 行の 2 倍であり, 3 次の小行列式はすべて 0 であることがわかる.)