2014年度

線型代数学演習A

No. 12 例題

2014年7月14日実施

○ 記号: n を正整数とするとき, n 次の置換全体のなす集合 (n 次対称群) を S_n と表すことにする.

$\boxed{1}$ 以下の n 次正方行列 $A\,(n=3,4)$ について, 置換を用いた行列式の以下の定義に基づいて, 行列式 $\det A$ を計算せよ.

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(略解) (1) S_3 のすべての元の符号を求めると, $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=1$, $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}=-1$, $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=-1$, $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=1$, $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=1$, $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=-1$ であるから,

$$\begin{aligned} \det A &= 1\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 2\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot 1\cdot(-2) \\ &\quad + 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) \\ &= 4-6+2-1-3+1 = -3. \end{aligned}$$

(2) 定義通り計算すると, S_4 の元の個数は $4! = 24$ であるから, 24個の積の和を考えなければならない. ところが, この行列の幾つかの成分は0であるから, 定義に現れる幾つかの項が0となる. 本質的に残る項に対応する S_4 の元は以下のものである.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

それぞれを巡回置換の積で表すと, 順に $(1,2)(3,4)$, $(1,2,3,4)$, $(1,3,4)$, $(1,3,2,4)$ であるから, 符号は順に 1, -1, 1, -1 となる. よって,

$$\begin{aligned} \det A &= 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1 \\ &\quad + 1\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 1 \\ &= 1+1-1-1 = 0. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 以下の正方行列 A について, 行列式を計算しやすくなるように基本変形を施して, 行列式 $\det A$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(略解) (1) A を上半三角行列に変形することにより, 行列式を計算する.

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-4) = 4. \end{aligned}$$

(2) A を上半三角行列に変形して, 行列式を計算する.

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 \cdot (-4) \cdot (-4) = -64. \end{aligned}$$

(参考: (2) の A について, すべての成分が偶数であるから, 各行 (あるいは各列) について, 2 をくくり出すことにより, 行列式の計算は比較的容易になる. 特に, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $A = 2B$ であるが, 基本変形という観点からすると, A は B のすべての行 (あるいはすべての列) を 2 倍して得られる行列と考えられる. よって, $\det A = 2^4 \det B = 16 \det B$ である. なお, $A = 2B = (2E_4)B$ であるが, $2E_4$ は対角成分がすべて 2 となる上半三角行列である (下半三角行列でもある) から, $\det(2E_4) = 2^4 = 16$ である. このことからも, $\det A = 2^4 \det B = 16 \det B$ であることがわかる. 一般に, n を正整数, $c \in \mathbb{K}$ とするとき, $\det(cE_n) = c^n$ である. そして, 任意の n 次正方行列 A について, $\det(cA) = c^n \det A$ である. ちなみに, 上と同様の操作により, $\det B = -4$ であり, 確かに $\det A = 16 \cdot (-4) = -64$ である.)