2014 年度

線型代数学演習 A

No. 11 例題

2014 年 7 月 7 日実施

◯ 記号: n を正整数とするとき, n 次の置換全体のなす集合 (n 次対称群) を S_n と表すことにする.

$\boxed{1}$ 以下の置換 σ を, 互換の積として表せ. さらに, 符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を求めよ.

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 8 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

(略解) まず, σ を巡回置換の積で表し, それぞれの巡回置換を互換の積で表す.

(1) $\sigma = (1,3,6)(2,7)(4,5)$ である. そして, $(1,3,6) = (1,6)(1,3)$ であるから, $\sigma = (1,6)(1,3)(2,7)(4,5)$. よって, σ は 4 個の互換の積であるから, $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^4 = 1$.

(2) $\sigma = (1,6,4,3)(2,5,8)$ である. ここで, $(1,6,4,3) = (1,3)(1,4)(1,6)$, $(2,5,8) = (2,8)(2,5)$ であるから, $\sigma = (1,3)(1,4)(1,6)(2,8)(2,5)$. よって, σ は 5 個の互換の積であるから, $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^5 = -1$.

(参考: 巡回置換を互換の積で表す方法は一通りではない. 例えば, $(1,3,6)=(1,3)(3,6)$ でもある. 一般に, 長さ r $(r \geq 3)$ の巡回置換 $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ について,

$$(j_1, j_2, \ldots, j_r) = (j_1, j_r) \cdots (j_1, j_3)(j_1, j_2) = (j_1, j_2)(j_2, j_3) \cdots (j_{r-1}, j_r).$$

いずれにせよ, 長さ r の巡回置換は $r-1$ 個の互換の積で表される. (このことは, $r = 1, 2$ でも成り立つ.) よって, 置換 σ の符号を求めるだけであれば, σ を巡回置換の積で表すだけで十分である. 実際, (1) については, σ が長さ 3 の巡回置換と, 2 個の長さ 2 の巡回置換 (互換) の積で表されるから, $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{3-1} \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$ である. (2) については, σ が長さ 4 の巡回置換と長さ 3 の巡回置換の積で表されるから, $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{4-1} \cdot (-1)^{3-1} = -1$ である.)

$\boxed{2}$ $\sigma = (2,5,3,7) \in S_7$ を長さ 4 の (7 次の) 巡回置換とする.

(1) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $\tau\sigma\tau^{-1}$ を巡回置換として表せ.

(2) $\rho = (6,4,1,3)$ を長さ 4 の (7 次の) 巡回置換とするとき, $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$ なる 7 次の置換を一つ与えよ.

(略解) (1) $(\tau\sigma\tau^{-1})\tau = (\tau\sigma)(\tau^{-1}\tau) = (\tau\sigma)1_n = \tau\sigma$ であるから $1 \leq j \leq 7$ なる整数 j について, $\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(j)) = \tau\sigma\tau^{-1}\tau(j) = \tau\sigma(j)$. 即ち,

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) & \tau(5) & \tau(6) & \tau(7) \\ \tau\sigma(1) & \tau\sigma(2) & \tau\sigma(3) & \tau\sigma(4) & \tau\sigma(5) & \tau\sigma(6) & \tau\sigma(7) \end{pmatrix}.$$

ここで, $\sigma = (2,5,3,7)$ であるから, $\sigma(j) = j\ (j = 1,4,6)$ であり, $\sigma(j) \neq j$ なる j に着目すると, $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(2),\tau(5),\tau(3),\tau(7)) = (4,6,2,1)$.

(2) (1) の解法を参考にして, $\tau(2) = 6$, $\tau(5) = 4$, $\tau(3) = 1$, $\tau(7) = 3$ なる置換 $\tau \in S_7$ を考える. すると, $\{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,5,3,7\} = \{1,4,6\}$ であり, $\{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{6,4,1,3\} = \{2,5,7\}$ であるから, τ が全単射であることより, $\{\tau(1),\tau(4),\tau(6)\} = \{2,5,7\}$ でなければならない. そこで, τ を次のように定義する.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$j = 1,4,6$ のとき, $\sigma(j) = j$ であるから, $\tau\sigma(j) = \tau(j)$ となる. ゆえに, $k = 2,5,7$ のとき, それぞれ $j = 1,4,6$ とすれば $k = \tau(j)$ と表されるから, $\tau\sigma\tau^{-1}(k) = \tau\sigma\tau^{-1}(\tau(j))$ $= \tau\sigma(j) = \tau(j) = k$. そして, $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(2),\tau(5),\tau(3),\tau(7)) = (6,4,1,3) = \rho$ となる.

(参考: (2) について, 巡回置換 $\rho = (6,4,1,3)$ は $\rho = (4,1,3,6) = (1,3,6,4) = (3,6,4,1)$ とも表すことができる. よって, $\tau \in S_7$ として, 例えば, $\tau(2) = 4$, $\tau(5) = 1$, $\tau(3) = 3$, $\tau(7) = 6$ となるものをとったとしても, (この場合も $\{\tau(1),\tau(4),\tau(6)\} = \{2,5,7\}$ であるから,) 上と同様にして, $\tau\sigma\tau^{-1} = \rho$ が成り立つ. そして, $\tau(2) = 1$ あるいは 3 としても, 順に $\tau(5),\tau(3),\tau(7)$ が決まる. ゆえに, 問題の条件をみたす $\tau(2),\tau(5),\tau(3),\tau(7)$ の選び方は, 巡回置換の長さである 4 通りとなる. その上で, $\tau(1),\tau(4),\tau(6)$ を $\{2,5,7\}$ から重複がないように選べば, $\tau \in S_7$ は問題の条件をみたす. よって, $\tau(1),\tau(4),\tau(6)$ の選び方は $3! = 6$ 通りであり, τ の選び方は $4 \cdot 6 = 24$ 通りである.)