2014 年度

線型代数学演習A

No. 10 例題

2014 年 6 月 30 日実施

$\boxed{1}$ 以下の複素行列について, (有限回の)行基本変形のみを施すことにより, 簡約行列, 即ち, 階段行列であって, その階数を r とし, 第 j 行 $(1 \leq j \leq r)$ の 0 でない成分のうち最も左にある成分を a_{jk_j} とするとき, $\underline{a_{jk_j} = 1}$ であり, かつ 第 k_j 列の他の成分は 0 である行列に変形せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(略解) 行基本変形の具体的な操作はまとめて書くことにする.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{(i)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{(ii)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{(iii)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{(iv)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

各行基本変形の具体的な操作は以下の通りである.

(i) 第 2, 3 行にそれぞれ第 1 行の 2 倍, 1 倍を加える.

(ii) 第 1, 3 行にそれぞれ第 2 行の -1 倍, 1 倍を加える.

(iii) 第 1, 2 行にそれぞれ第 3 行の $\frac{1}{3}$ 倍, -1 倍を加える.

(iv) 第 2, 3 行をそれぞれ -1 倍, $\frac{1}{3}$ 倍する.

(2)
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{(i)}}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{(ii)}}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{(iii)}}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{(iv)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

各行基本変形の具体的な操作は以下の通りである.

(i) 第 2, 3 行にそれぞれ第 1 行の 1 倍, 2 倍を加える.

(ii) 第 1, 3 行にいずれも第 2 行を加える.

(iii) 第 1, 2 行にそれぞれ第 3 行の $-\frac{6}{7}$ 倍, $-\frac{4}{7}$ 倍を加える.

(iv) 第 1, 2, 3 行をそれぞれ -1 倍, -1 倍, $\frac{1}{7}$ 倍する.

$\boxed{2}$ n を正整数とし, n 次複素正則行列 A について, A と n 次単位行列 E_n を並べて得られる $(n, 2n)$ 複素行列を $\widetilde{A} = (A\ \ E_n)$ とおく. このとき, $\widetilde{A}$ に <u>行基本変形</u> のみを施して, $\widetilde{B} = (E_n\ \ B)$ と変形することにより, A の逆行列 A^{-1} を求めることができる. この方法を用いて, 以下の A について, 逆行列 A^{-1} を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(略解) 行列 X, Y について, $X \to Y$ で X に <u>行基本変形</u> を施すことにより, Y に変形されることを表すとする. $\widetilde{A} = (A\ \ E_n) \to (E_n\ \ B) = \widetilde{B}$ であるとすると, n 次複素正則行列 P が存在して, $\widetilde{B} = P\widetilde{A}$ となる. このとき, $(E_n\ \ B) = P(A\ \ E_n) = (PA\ \ P)$ であるから, $PA = E_n$, かつ $P = B$ が成り立つ. よって, $B = P$ は A の逆行列である.

(1)

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2)

$$\begin{aligned}
\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

従って, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.